HANDBUCH

DER

VERMESSUNGSKUNDE

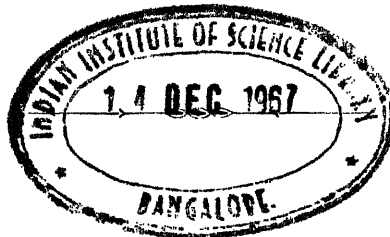
VON

D^{R} W. JORDAN

PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU HANNOVER

ZWEITER BAND

FELD- UND LAND-MESSUNG

DRITTE VERBESSERTE UND ERWEITERTE AUFLAGE

STUTTGART

VERLAG DER J. B. METZLERSCHEN BUCHHANDLUNG

1888

VORWORT.

Dieser zweite Band der dritten Auflage des nun auf drei Bände berechneten „Handbuchs der Vermessungskunde“ enthält im wesentlichen das, was in der vorigen zweiten Auflage (1877) im zweiten Teil des ersten Bandes enthalten war, aber in gründlichster Neubearbeitung und mit sehr vielen Erweiterungen.

Trotz der Vermehrung des Inhalts wurde der Gesamtumfang nicht erheblich vermehrt, weil andererseits durch Beschränkungen und kürzere Ausdrucksweise Raum gewonnen wurde.

Zur Umgestaltung und Verbesserung des Werkes hat namentlich die im Jahre 1881 erfolgte Berufung des Verfassers von Karlsruhe nach Hannover beigetragen, zunächst durch die von hoher Behörde bewilligte Neueinrichtung der Hannoverschen geodätischen Sammlung, welche nun, nebst unserer früheren Karlsruher Sammlung, die für das Buch ausgewählten charakteristischen Instrumente geliefert hat. Auch glaubt Verfasser aus Vergleichungen mancher süddeutscher und norddeutscher Vermessungs-Verhältnisse, in Verbindung mit der theoretischen Erfassung der Gesamtaufgabe der Feld- und Landmessung, zur Gewinnung eines eigenen Urteils und zur Berechtigung des öffentlichen Aussprechens eines solchen, gelangt zu sein.

Nach dem Druck des zwölften Bogens wurde die Weiterführung unterbrochen, weil der Verfasser im Sommer 1887 Gelegenheit fand, die Triangulierung und Polygonisierung der Stadt Linden bei Hannover auszuführen. Dadurch sind einige Unstetigkeiten entstanden, indem z. B. die Triangulierung von S. 188, welche als Hauptbeispiel für Kapitel VIII. bestimmt war, nun durch die grössere Triangulierung von S. 228 ersetzt wurde.

Diese Lindener Stadtvermessung war auch das beste Mittel, auf die Kataster-Anweisung IX. vom 25. Oktober 1881 Bezug zu nehmen, und die dieser wichtigen Anweisung IX. zu Grunde liegenden Theorieen zu behandeln.

Die Instrumenten-Zeichnungen und sonstigen Figuren, welche zum Teil auch aus der vom Verfasser fachwissenschaftlich redigierten „Zeitschrift für Vermessungswesen“ entlehnt wurden, sind im Schnitt nicht gleichartig; die gleichartige Neuherstellung aller Figuren würde unverhältnismässige Kosten verursacht haben.

Allen Fachgenossen, welche uns durch Zusendung von Sonderabdrücken geeigneter Abhandlungen unterstützt haben, sagen wir hiefür Dank, und hoffen, durch richtige Einreihung solcher Mitteilungen, den Gebern entsprochen zu haben.

Im Jahre 1881 erschien eine russische*) Übersetzunng von zwei Teilen dieses Werkes, ohne vorherige Einholung der Zustimmung des Verfassers. —

Eine autorisierte italienische Übersetzung von Ing. *Emilio Ferrero*, im Verlage von *Ermanno Loescher* in Turin, ist gegenwärtig in Arbeit.

Für etwaige weitere Übersetzungen oder ähnliche Weiterverwertungen dieses Werkes werden alle Rechte vorbehalten.

Hannover im Mai 1888.

Jordan.

---

*) Moskau, Buchhändler *N. J. Mamontowa*. Preis 8 Rbl. Silb. Mit Übersendung 9 Rbl.

INHALTS-ÜBERSICHT.

Seite

Kapitel III. Mechanische Hilfsmittel für Berechnungen.

Kapitel IV. Die Libelle.

Kapitel V. Die optischen Instrumente.

Kapitel VI. Der Theodolit.

Kapitel VII. Coordinaten- und Azimut-Rechnung.

Seite

Kapitel VIII. Triangulierung.

Kapitel IX. Polygonale Züge.

Kapitel X. Nivellierung.

Kapitel XI. Trigonometrische Höhenmessung.

Kapitel XII. Barometrische Höhenmessung.

Kapitel XIII. Distanzmesser.

Kapitel XIV. Tachymetrie.

Kapitel XV. Der Messtisch.

Kapitel XVI. Abstecken von Linien.

Hilfstafeln.

§ 1. Einleitung.

Die Vermessungskunde (Geodäsie) beschäftigt sich mit dem Messen einzelner Teile der Erde, und mittelbar mit dem Messen der Erde selbst.

Man wendet die Namen *Feldmessung, Landmessung, Erdmessung* an, wenn es sich um Messung von kleineren oder grösseren Teilen der Erdoberfläche handelt.

Messen heisst das Bestimmen des Verhältnisses zweier gleichartiger Grössen. Als unmittelbar zu messende Grössen kommen hier nur in Betracht Längengrössen und Winkelgrössen, weil sich die Bestimmung aller anderen geometrischen Grössen hierauf zurückführen lässt.

Als Masseinheit für Längengrössen dient eine ursprünglich willkürlich gewählte Länge, das *Meter*, mit seinen Vielfachen und Unterabteilungen, namentlich:

1000 Meter = 1 Kilometer, $1000^m = 1^{km}$
Ein Hundertstel-Meter = 1 Centimeter, $0{,}01^m = 1^{cm}$
Ein Tausendstel-Meter = 1 Millimeter, $0{,}001^m = 1^{mm}$

Die Zwischenstufen 100^m, 10^m, $0{,}1^m$ werden gewöhnlich nicht besonders benannt, dagegen wird bei feinen Massvergleichungen noch ein kleinerer Teil benannt:

Ein Tausendstel-Millimeter = 1 Mikromillimeter, $0{,}001^{mm} = 1^{\mu}$

Die metrischen Flächenmasse des Feld- und Landmessens sind:

100 Quadratmeter = 1 Ar, $(10^m)^2 = 100^{qm} = 1^a$
10 000 Quadratmeter = 100 Ar = 1 Hektar, $(100^m)^2 = 1^{ha}$
100 Hektare = 1 Quadratkilometer, $(1000^m)^2 = 1^{qkm}$

Als Masseinheit für *Winkelgrössen* dient der einer vollen Umdrehung einer Geraden um einen Punkt entsprechende Winkel, mit Teilung in 360 Grad (alte Teilung) oder 400 Grad (neue Teilung).

Die Oberfläche der Erde ist, abgesehen von Bergen und Thälern und sonstigen örtlichen Unregelmässigkeiten, nahezu diejenige, welche eine Ellipse bei der Umdrehung um ihre kleine Axe erzeugt. Der Quadrant dieser Ellipse hat eine Länge von rund 10 000 000 Metern, und die Abplattung der Ellipse ist rund $\frac{a-b}{a} = \frac{1}{299}$, wo a und b die beiden Halbaxen sind.

Das beschriebene Umdrehungs-Ellipsoid ist nahezu diejenige Oberfläche, durch welche der Erdkörper begrenzt wäre, wenn er überall von ruhender Flüssigkeit umgeben wäre; es stellt also der Meeresspiegel, abgesehen von Flut und Ebbe, Wellenschlag u. s. w., nahezu einen Teil dieser Fläche vor.

Die Genauigkeit, mit welcher man die Grösse der Erde kennt, ist veranschaulicht durch folgende Zahlen der *Bessel*schen Bestimmung vom Jahr 1842, welche heute noch allgemein gebraucht werden:

$$\text{Quadrant} \quad Q = 10\,000\,856^m \pm 498^m$$

$$\text{Abplattung} \quad \frac{a-b}{a} = \frac{1}{299 \pm 5}$$

wo die mit $\pm$ beigefügten Beträge die mittleren zu fürchtenden Fehler sind.

Die grosse Halbaxe der Ellipse ist $a = 6\,377\,397$ Meter und die kleine Halbaxe ist $b = 6\,356\,079$ Meter, woraus sich der angegebene Abplattungswert berechnet. Das geometrische Mittel der drei Hauptaxen des Umdrehungs-Ellipsoids ist $\sqrt[3]{a\,a\,b} =$ 6 370 283 Meter, dieser Wert ist gleich dem Halbmesser einer Kugel, welche mit dem Ellipsoid gleiches Volumen hat. Das arithmetische Mittel der drei Hauptaxen ist $\frac{a+a+b}{3} = 6\,370\,291$ Meter, und dieser Wert ist zugleich auf ein Meter genau gleich dem Halbmesser einer Kugel, welche mit dem Ellipsoid gleiche Oberfläche hat.

Für summarische Berechnungen ohne Rücksicht auf die Abplattung der Erde kann man hiernach in runder Zahl annehmen:

$$\text{Erdhalbmesser} \quad r = 6\,370\,000 \text{ Meter.}$$

Eine in einem Punkte des Ellipsoids gelegte Berührungsebene heisst die Horizontalebene des Punktes, und jede in dieser Ebene liegende Berührungslinie heisst Horizontale. Die geometrische Normale eines Punktes der Erdoberfläche heisst die Vertikale (welche demnach im allgemeinen *nicht* nach dem Erdmittelpunkt gerichtet ist).

Da die Oberfläche einer ruhenden Flüssigkeit in allen Punkten rechtwinklig zu der auf die einzelnen Flüssigkeitsteile wirkenden Kraft ist, so folgt, dass die Vertikale in der Richtung der Schwerkraft liegt.

Je nachdem man bei Messungen die Ausdehnung der Erdoberfläche nur in horizontalem oder vertikalem Sinne in Betracht zieht, unterscheidet man *Lagemessungen* und *Höhenmessungen* (Horizontalmessungen und Vertikalmessungen).

Bei Lagemessungen unterscheidet man je nach der Gestalt der zu Grunde gelegten Erdoberfläche vier Stufen:

1) Man betrachtet die Erde als *Ebene*, was etwa bis zur Ausdehnung von 1 Quadratmeile (1 Quadratmeile = 55,0629 Quadratkilometer) ausreicht.
2) Man betrachtet die Erde als *Kugel*, deren Halbmesser der Erdkrümmung an der betreffenden Stelle möglichst entspricht (z. B. für Hannover rund $r = 6\,380\,000^m$). Diese Annahme reicht bis zu einer Ausdehnung von einigen Hundert Quadratmeilen.
3) Man betrachtet die Erde als Ellipsoid von gegebenen Grössenwerten; diese Annahme reicht bis zu einer Ausdehnung von 1000 und mehr Quadratmeilen.
4) Man untersucht die Abweichungen, welche zwischen der Annahme eines Umdrehungs-Ellipsoids und der wirklichen idealen Erdform, dem *Geoid*, noch bestehen.

Diese Unterscheidung 1) 2) 3) 4) mit den angegebenen Gültigkeitsbereichen gilt nur für *Lage*messungen; bei *Höhen*messungen wird die Erdkrümmung viel früher merklich; die Erdkrümmung beträgt z. B. auf 1^{km} Entfernung bereits 8^{cm} in der Höhe.

Die Höhenmessungen werden nicht nach der Ausdehnung, wie die La messungen, sondern nach anderen Rücksichten eingeteilt.

Im Folgenden behandeln wir zuerst nur Lagemessungen, und später die Höh messungen.

Kapitel I.

Die einfachsten Arbeiten des Feldmessens und ihre Verbindun zu kleineren Aufnahmen.

§ 2. Bezeichnung von Punkten.

Ein *Punkt* im Sinne der Feldmessung ist für Lagemessungen bestimmt durcl eine senkrechte körperliche Linie, d. h. eine Bake (Fluchtstab, Stange u. s. w.) ode eine Hauskante, Kirchturmspitze u. s. w.

Wir unterscheiden hiebei künstliche Punktbezeichnung und natürliche Punkt bezeichnung, und zählen zur ersteren alle besonders für Vermessungszwecke aufgestellter Zeichen, welche man auch unter dem Gesamtnamen *Baken* zusammenfasst, währenc zur zweiten, der natürlichen Art, alle solche Zeichen gehören, welche ursprünglich ohne Beziehung zu Vermessungszwecken entstanden sind, namentlich Kirchtürme.

Man kann auch zugängliche und unzugängliche Punkte unterscheiden, zu letzteren gehören meist die Kirchtürme.

Die gewöhnlichen Feldmess-Baken sind Stäbe von 1,5 bis 3 Meter Länge, unten mit eiserner Spitze, zum Einstossen in den Boden, versehen (der eiserne Schuh, dessen Unterteil die Spitze ist, soll nach oben zwei Lappen haben, welche das Holz von zwei Seiten noch über der Höhlung des Schuhs umfassen). Die Baken werden etwa von halb zu halb Meter weiss und rot oder schwarz angestrichen (das obere Ende soll immer hell sein), auf weitere Entfernung oben mit einer weiss-roten Fahne versehen.

Unsere kleinen Baken sind mit Spitze 1,7 Meter lang, 3 Centimeter dick. Der Querschnitt ist rund, oder quadratisch mit abgeschrägten Kanten (dieser Querschnitt ist zu vielen Nebenzwecken besser als der runde Querschnitt). Einzelne Baken versieht man an einer Seite mit Decimeterteilung, um sie gelegentlich als Massstäbe zu verwenden.

Die Baken dienen zur Punktbezeichnung für das Messen selbst, auf kurze Dauer.

Zur Punktversicherung auf kleinere oder grössere Dauer hat man Holzpflöcke und Marksteine.

Um bei Pflöcken die Bakeneinsetzung sicher zu haben, thut man oft gut daran, *zwei* Pflöcke zu schlagen, zwischen welchen der eigentliche Punkt, bzw. eine Bake sich befindet.

Marksteine sind das beste Mittel zur dauernden, auch rechtlich gültigen Bezeichnung.

Unterirdische Versicherung, durch Thonröhren, ist zweifellos wertvoll, aber unterirdische Punktbezeichnung allein, ohne Bezeichnung über dem Boden, kann beim Nachgraben viel Zeitverlust verursachen.

§ 3. Abstecken von geraden Linien.

Eine *gerade Linie* oder kurz eine *Gerade*, im Sinne der Feldmessung ist bestimmt durch die Aufeinanderfolge mehrerer Punkte (Baken), die in einer senkrechten Ebene liegen. Der Abstand der Baken von einander beträgt in der Ebene etwa 100 bis 200 Meter, auf unregelmässigem Boden etwa 20—100 Meter.

Wenn zwei Punkte einer Geraden gegeben sind, und die Aufgabe vorliegt, die Gerade durch weitere Punkte abzustecken, so hat man zwei Fälle zu unterscheiden, ob nämlich die Verlängerung über die zwei gegebenen Punkte hinaus geschehen soll, oder ob die Absteckung zwischen jenen Punkten stattfinden soll.

Fig. 1.
Abstecken einer Geraden $A\ B\ C\ D$

A B C D

Das erstere geschieht durch »*Einrichten*« weiterer Punkte in der Verlängerung der zwei gegebenen, das zweite geschieht durch »*Einweisen*« zwischen die gegebenen Punkte.

1) *Einrichten.* Wenn in Fig. 1. A und B gegeben sind, so wird die Bake C dadurch in die Gerade $A\ B$ eingerichtet, dass man sie so steckt, dass C, B und A in Deckung erscheinen, ebenso wird mit D u. s. w. fortgefahren.

2) *Einweisen.* Hiezu ist ein Gehülfe erforderlich.

Wenn in Fig. 1. die Endpunkte A und D gegeben sind, so schickt man den Gehilfen ungefähr in die Gegend von B (oder C) und weist ihn durch Zeichen (Aufheben des linken oder rechten Armes) so ein, dass die Baken sich decken. Hat man mehrere Baken einzuweisen, so sind stets die entfernteren zuerst zu stecken, damit ihre Stelle nicht durch die näherstehenden (unter grösserem Winkel erscheinenden) Baken verdeckt wird. Der Eingewiesene hat, um rasch zum Ziele zu kommen, jeweils den Raum zwischen den zwei letzten Versuchen zu halbieren.

Hat man keinen Gehilfen und kein besonderes Absteck-Werkzeug (§ 4.), so kann man *durch mehrfaches Probieren* auch eine Gerade zwischen zwei Endpunkten abstecken, indem man (nach Fig. 1.) B und C zuerst schätzungsweise steckt, und dann durch abwechselndes Zielen längs ABC und BCD die Punkte B und C allmählich in die Gerade $ABCD$ herein bringt.

Da das Auge für die gegenseitige Deckung einer Fluchtreihe von Baken sehr empfindlich ist, kann man sehr lange Gerade, bis zu 1 Kilometer und mehr, lediglich von freiem Aug, durch fortgesetztes Verlängern, abstecken, ohne dass die Geradrichtung zu wünschen übrig liesse.

§ 4. Kreuzscheibe, Winkelkreuz, Winkeltrommel.

Mit diesen Namen werden die verschiedenen einfachen Werkzeuge bezeichnet, welche mit zwei sich rechtwinklig schneidenden Absehvorrichtungen versehen sind, und sehr verschiedene Formen haben, wie in Fig. 1., Fig. 2. und Fig. 3. S. 5 angedeutet ist.

Die in Süddeutschland fast ausschliesslich gebrauchte *Kegelform* (Fig. 1.) hat mancherlei Vorzüge:

Bei gleicher Höhe der Instrumente gestattet der Kegel steileres Zielen als der Cylinder. Die Kegelkreuzscheibe mit ihrer vorstehenden starken eisernen Grundplatte ist Beschädigungen (etwa beim Umfallen) weniger ausgesetzt als die Cylinder-Trommel.

Fig. 1.
Kegelkreuzscheibe.

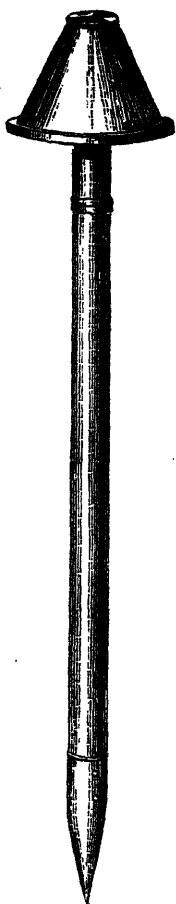



Fig. 2.
Winkelkreuz.

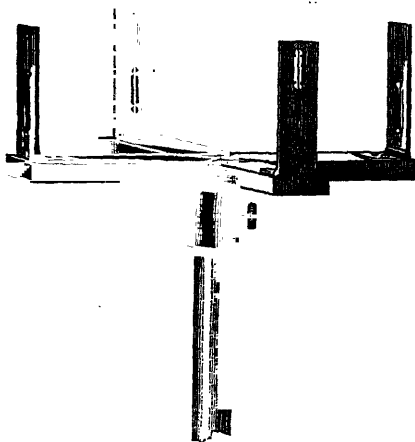
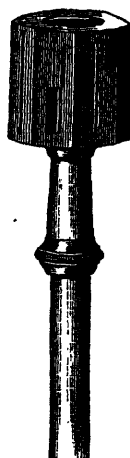



Fig. 3.
Winkeltrommel.

Die *Absehvorrichtung* (Diopter) besteht entweder aus zwei einander gegenüberliegenden Spalten (Fig. 1.) oder einer Spalte mit gegenüberliegendem Faden (Fig. 2.). Es sind jedenfalls zwei solcher Diopter, in zwei vertikalen, sich rechtwinklig schneidenden Ebenen liegend, vorhanden, unter Umständen benützt man auch ein drittes oder viertes Diopter, die Winkel der zwei ersten halbierend (Halbschnitte Fig. 3.), so dass mit dem Instrumente nicht nur rechte Winkel, sondern auch halbe rechte Winkel abgesteckt werden können.

Vergleichung der beiden Arten von Absehvorrichtungen:

Eine Spalte mit einem gegenüberstehenden Faden hat den Vorzug des deutlicheren und bequemeren Sehens; zwei einander gegenüberliegende Spalten haben dagegen den Vorzug der Möglichkeit des Vor- und Rückzielens, der Unveränderlichkeit und der Dauerhaftigkeit.

Der Anfänger wird Spalten und Fäden vorziehen, jedoch bald zu der unveränderlichen und zum Vor- und Rückzielen geeigneten Kreuzscheibe, welche nur Spalten hat, übergehen.

Der Durchmesser der Kreuzscheibe kann, wenn das Instrument nicht schwerfällig werden soll, nicht über 20^{cm} genommen werden.

Die Breite der Spalten kann bis zu 1^{mm} betragen. Durch sehr enge Spalten lässt sich die Genauigkeit nicht vergrössern. Die beste Breite der Spalten dürfte $0{,}5^{mm}$ sein.

Die Kreuzscheibe dient 1) zum Errichten von Senkrechten (durch Einweisen), 2) zum Fällen von Senkrechten (durch Probieren), 3) zum Aufsuchen eines Punktes einer Geraden zwischen zweien ihrer Punkte, Vor- und Rückzielen, mit allmählichem Richtigstellen.

Fig. 4.

B

A P C

Die *Prüfung* der Kreuzscheibe (Fig. 4.) geschieht durch Abstecken eines rechten Winkels APB und Anlegen eines zweiten rechten Winkels BPC an den ersten, mit gleicher Benützung des Instruments, worauf APC eine Gerade sein muss; oder auf ähnliche Weise. Berichtigung ist selten möglich.

Was die *Genauigkeit* des Absteckens mit der Kreuzscheibe betrifft, so kann der mittlere Zielfehler etwa $= 2'$ angenommen werden.

Verfasser hat dieses durch verschiedene Versuche gefunden (Zeitschr. für Verm. 1875, S. 303, und 1885 S. 27) und bei fremden Versuchen bestätigt gefunden (Zeitschr. f. Verm. 1886, S. 586).

Hiernach hat man auf 50 Meter Entfernung einen mittleren Fehler

$$= \frac{2'}{3438'} 50 = 0{,}03^m \text{ oder rund } = 3^{cm}$$

Aus diesem Grunde gestatten die Kataster-Vermessungsanweisungen meist keine längeren Ordinaten als 30 Meter, 40 Meter, höchstens 50 Meter.

Bei gutem Auge und Übung kann man die Genauigkeit auch bis $\pm 1'$ bringen; andererseits ist an Abhängen, wenn der Kreuzscheibenstock nur nach Augenmass senkrecht gestellt wird, und bei schlechter Beleuchtung, wohl ein mittlerer Fehler von $\pm 5'$ zu fürchten.

§ 5. Spiegel-Instrumente.

Wenn man es nur mit Absteckungen in der Ebene, und nicht an Abhängen, zu thun hat, sind, statt der im vorigen § 4. beschriebenen Werkzeuge, die nun zu betrachtenden Spiegel-Instrumente in vielen Fällen vorzuziehen:

Fig. 1.
Winkelspiegel
zum Gebrauch in freier Hand.

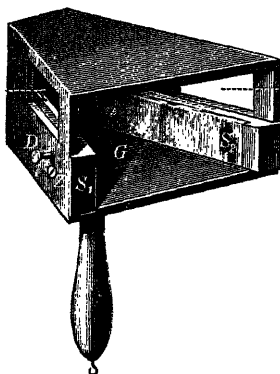



Fig. 2.
Winkelspiegel
zum Gebrauch auf einem Stock.

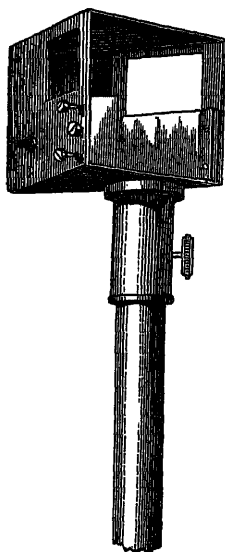



Fig. 3. Theorie des Winkelspiegels.

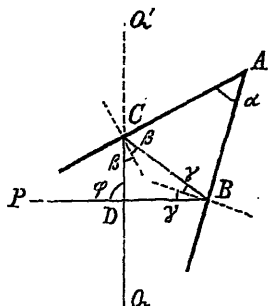
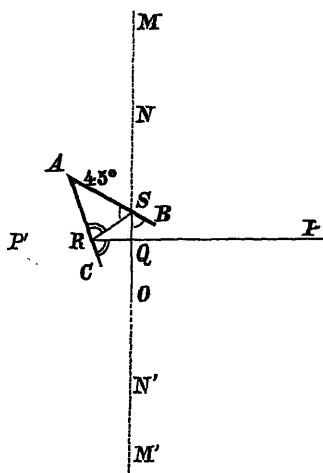



Fig. 4. Gebrauch des Winkelspiegels.

Der *Winkelspiegel* (Fig. 1. und Fig. 2.), welcher vor etwa 100 Jahren in England erfunden wurde, dient zum Abstecken rechter Winkel. Seine Wirkungsweise beruht auf dem Gesetz der Reflexion des Lichtes (gleiche Winkel mit der spiegelnden Ebene). Der Winkelspiegel besteht im Wesentlichen aus zwei (bei der Anwendung vertikal stehenden) spiegelnden Ebenen AC, AB (Fig. 3.). In Folge von Reflexion an jeder derselben macht ein von P ausgehender Strahl den Weg $PBCQ$ und scheint daher dem in Q befindlichen Auge von Q' herzukommen.

Die Beziehung zwischen dem Winkel $Q'DP = \varphi$ des eintretenden und des austretenden Strahls und dem Winkel $BAC = \alpha$ der beiden Spiegel giebt sich nach Fig. 3.:

Aus dem Dreieck ABC folgt: $\alpha + (90° - \beta) + (90° - \gamma) = 180°$, d. h. $\alpha = \beta + \gamma$
Aus dem Dreieck BCD folgt: $\varphi = 2\beta + 2\gamma$, also $\varphi = 2\alpha$.
Beim Winkelspiegel ist $\alpha = 45^0$, folglich $\varphi = 90°$.

Die *Anwendung* des Instruments zeigt Fig. 4. Um von P eine Senkrechte PQ auf die Gerade MN zu fällen, schreitet man, mit dem Auge O nach NM schauend, in dieser Geraden so lange vor, bis das doppelt reflektierte Bild von P in dem Spiegel AB unter der (über den Spiegel hinweg gesehenen) Bake N erscheint.

Diese Art der Anwendung ist nicht die einzige; man kann in Fig. 4. auch QP als die gegebene Gerade, und NQ als die zu fällende Senkrechte betrachten.

Ausserdem kann man in beiden Fällen links und rechts vertauschen, und hat somit im ganzen 4 Fälle der Anwendung, welche nach kurzer Übung mit Sicherheit angewendet und ausgewählt werden.

Wenn man in der zuletzt angegebenen Weise eine Senkrechte *zweifach* bestimmt, etwa zuerst nach Fig. 4. und dann mit Vertauschung von links und rechts, d. h. P mit P', und A nach rechts, so hat man eine Probe, welche in dreifachem Sinn gebraucht werden kann:

1) Wenn das Instrument als solches richtig ist und $P' Q P$ eine richtige Gerade ist, so hat man die Sicherheit richtigen Zielens und richtiger Handhabung des Instruments.

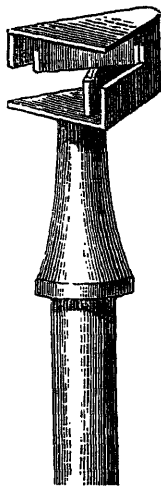
2) Wenn $P' Q P$ eine richtige Gerade ist, richtig gezielt worden ist, und dennoch die Umwendung von links nach rechts einen Widerspruch giebt, so ist das Instrument falsch und bedarf einer Veränderung des Winkels α, welchen die beiden Spiegel nach Fig. 3. unter sich bilden. Dieser Winkel α ist dann nicht genau $45°$, und kann durch Korrektionsschrauben (z. B. die Zug- und Druckschrauben Z und D in Fig. 1.) berichtigt werden, wozu nur wenige Versuche erforderlich sind.

3) Wenn das Instrument an sich richtig ist ($\alpha = 45°$) und wenn es richtig behandelt wird, so kann man die Probe mit Vertauschung von P und P' in Fig. 4. auch dazu benutzen, zu bestimmen, ob Q sich in der Geraden $P' P$ befindet. (Der Winkelspiegel erfüllt dann mit *zwei* Stellungen denselben Zweck, wie das nachher zu beschreibende Spiegelkreuz (Fig. 5.) in einer Stellung.)

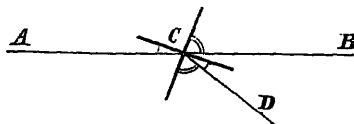
Der Strahlenschnittpunkt D in Fig. 3. ist ein wenig veränderlich, man kann deswegen nicht ein für allemal genau angeben, an welcher Stelle des Instruments das Absenkeln auf den Boden stattfinden soll, jedenfalls liegt aber der richtige Winkelscheitel nicht im Schwerpunkt des Instruments, sondern mehr der Hauptöffnung nahegerückt, wie die Befestigung des Stockes in Fig. 2. zeigt.

Den Winkelspiegel auf einem leichten *Stock* zu tragen (Fig. 2.) ist dem Gebrauch in freier Hand (Fig. 1.) vorzuziehen, wenn man das Ablothen auf den Boden auf 1—2^{cm} genau haben will.

Die Zielgenauigkeit des Winkelspiegels beim Feldmessen ist derjenigen der Kreuzscheibe (§ 4. S. 6) nahezu gleich, nämlich etwa $2'$.

Fig. 5.
Das Spiegelkreuz.

Das *Spiegelkreuz* (Fig. 5. und 6.) besteht aus zwei rechtwinklig gegen einander gestellten Spiegeln. Dasselbe dient zum Aufsuchen eines Punktes auf der Geraden zwischen zwei gegebenen Punkten.

Dieses Instrumentchen wurde im Jahr 1844 von Regierungsgeometer *Berlin* in *Gruners* Archiv 4. Teil S. 126 beschrieben.

Fig. 6.
Theorie des Spiegelkreuzes.

Die durch Fig. 6. veranschaulichte Theorie des Spiegelkreuzes ist einfach: Wenn die Spiegelmitte C sich auf der Geraden $A B$ befindet, so erscheinen dem Auge in D die beiden Spiegelbilder von A und von B in Deckung.

Die Prüfung des Instruments geschieht durch Aufsuchen des Punktes C, indem man in die Gerade $A B$ sowohl von D her als auch von der anderen Seite herkommend eintritt. Erhält man hiebei zwei verschiedene Punkte, so erfolgt eine Berichtigung durch Veränderung des Winkels der beiden Spiegel.

§ 6. Das *Bauernfeind*sche Prismenkreuz.

Dieses im Jahr 1851 von *Bauernfeind* in München konstruierte Instrument, welches zum Abstecken von 180°-Winkeln, also zum Einrichten eines Punktes in die Gerade zwischen zwei gegebenen Punkten dient, beruht mit seiner Wirkungsweise auf dem Satz, dass ein gleichschenklig rechtwinkliges Glasprisma mit seiner Hypotenusen-Ebene wie ein ebener Spiegel wirkt. (Dieses gilt für Fig. 3. und Fig. 3a. S. 10.)

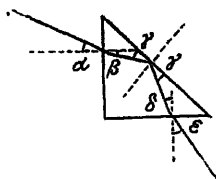
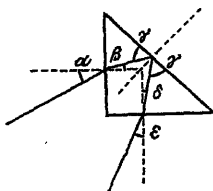
Wir schicken den Beweis dieses Satzes hier voraus (indem wir die optischen Brechungsgesetze, $\sin\alpha = \mu \sin\beta$, totale Reflexion u. s. w. als bekannt annehmen).

In Fig. 1. und Fig. 2. wird der Eintritt eines Strahls an einer Katheten-Ebene, Reflexion an der Hypotenusen-Ebene und Wiederaustritt an der anderen Katheten-Ebene dargestellt. Diese zwei Figuren geben, indem der Brechungs-Coëfficient des Glases mit μ (etwa $= 1{,}5$) bezeichnet wird:

Fig. 1. Fig. 2.

$$\left.\begin{array}{ll} 45° + (\beta + 90^0) + \gamma = 180° & 45° + (90° - \beta) + \gamma = 180° \\ 45° + (\delta + 90^0) + \gamma = 180° & 45° + (90° - \delta) + \gamma = 180° \end{array}\right\} \quad (1)$$

Fig. 1. und Fig. 2.

$$\left.\begin{array}{l} \sin\alpha = \mu \sin\beta \\ \sin\varepsilon = \mu \sin\delta \end{array}\right\} \quad (2)$$

Die Gleichungen (1) geben $\beta = \delta$, und dieses in die Gleichungen (2) eingesetzt giebt:

$$\alpha = \varepsilon \quad (3)$$

Damit ist bewiesen, dass die Hypotenusen-Ebene eines rechtwinkligen gleichschenkligen Prismas (Fig. 1. und Fig. 2.) in Bezug auf die Richtungsveränderung eines Strahles ebenso wie ein ebener Spiegel wirkt.

In Fig. 1. findet jedenfalls totale Reflexion statt; in Fig. 2. nur dann, wenn der Winkel α sehr klein ist, nämlich kleiner als 4° 47′, was daraus folgt, dass γ in Fig. 2. nicht grösser sein darf als entsprechend der Gleichung:

$$\sin\gamma_{max} = \frac{1}{\mu}$$

wo μ der Brechungs-Coëfficient des Glases ist, woraus $\gamma_{max} = 49° 11'$ folgt, sodann $\beta_{min} = 4° 11'$, $\sin\alpha_{max} = \mu \sin 4° 11'$, $\alpha_{max} = 4^0 47'$.

In dem Falle von Fig. 2. wird also sehr oft *nicht* totale Reflexion an der Hypotenusen-Ebene stattfinden, und dann tritt der grösste Teil des Lichtes an der Hypotenusen-Ebene aus. Dieses kann verhindert werden dadurch, dass man die Hypotenusen-Ebene mit Folie belegt.

Aus (2) und (3) folgt:

$$\beta = \delta$$

Damit geben (1) und (4) zusammen:

$$\alpha = \varepsilon \qquad (5)$$

Damit ist der Winkel φ des eintretenden und des austretenden Strahles:

$$\varphi = 90° + \alpha - \alpha = 90°$$

Der hier in Betracht kommende Lichtstrahl, welcher an einer Kathete eintritt, im Innern an der andern Kathete und an der Hypotenuse reflektiert wird, und dann an der anderen Kathete austritt, heisst der *feste* Strahl, im Gegensatz zu dem in Fig. 1. und Fig. 2. § 6. S. 9 betrachteten, nur an der Hypotenusen-Ebene reflektierten, bei der Drehung des Prismas beweglichen Strahl.

Ausser diesem Kennzeichen hat man zur Unterscheidung beider Strahlen folgendes:

1) Der feste Strahl ist immer in der Nähe einer scharfen Kante (mit 45°) zu suchen, und zwar an der dem Eintritt abgewendeten Kante.

2) Der feste Strahl ist lichtschwach, wenn die Hypotenusen-Ebene unbelegt ist, denn der Winkel γ in Fig. 2. ist für totale Reflexion zu klein. Wenn man dagegen, was neuerdings geschieht, die Hypotenusen-Ebene mit Folie belegt, so ist auch der feste Strahl lichtstark.

Vergleicht man das Winkelprisma mit der Kreuzscheibe und mit dem Winkelspiegel, so hat es mit dem Winkelspiegel den Nachteil des Versagens bei steilen Strahlen gemein, weshalb für solche Fälle die schwerfällige Kreuzscheibe nicht zu entbehren ist.

In der Ebene dagegen ist das Prisma ein vorzügliches Instrumentchen, das dem Winkelspiegel gegenüber den Vorzug der Bequemlichkeit und Handlichkeit (Gewicht nur etwa 60 Gramm) hat, und namentlich den Vorzug, dass es, wenn einmal richtig, richtig bleibt, so lange es überhaupt dienstfähig ist.

Die *Prüfung* des Winkel-Prismas besteht darin, dass man eine Senkrechte links und rechts nimmt, wobei kein Widerspruch entstehen darf. Ausserdem darf das Prisma beim schwachen Drehen in der Hand keine Drehung des Lichtstrahls geben.

Zur Beurteilung etwaiger Abweichungen in dieser Beziehung dient die folgende

Optische Fehler-Theorie des Winkel-Prismas).*

In Fig. 3. und Fig. 4. S. 13, ist ein Prisma angenommen, welches weder rechtwinklig, noch gleichschenklig ist, indem es die Winkel hat:

$$A = 90° - x$$

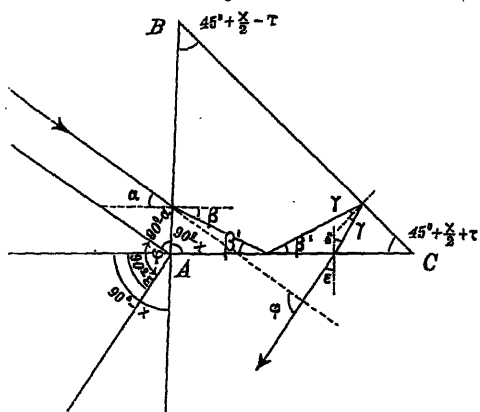
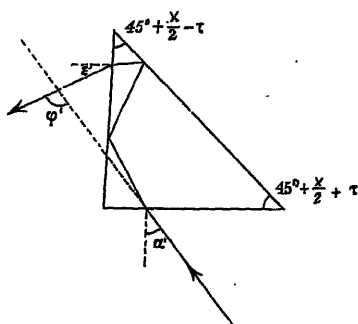
$$B = 45° + \frac{x}{2} - \tau$$

$$C = 45° + \frac{x}{2} + \tau$$

$$A + B + C = 180°.$$

Hiebei ist x der Fehler des rechten Winkels, und τ das Mass der Unsymmetrie. Im Übrigen sind die Bezeichnungen von Fig. 2. beibehalten.

---

*) Diese Entwicklung ist aus einer Anfrage von Landmesser *Deubel*, und Erörterung desselben mit dem Verfasser, entstanden. S. Zeitschr. f. Verm. 1885, S. 138 und S. 176.

Um den Weg des Lichtstrahls durch das Prisma zu verfolgen, haben wir zunächst beim Eintritt und beim Austritt die Brechungsgleichungen:

$$\sin\alpha = \mu \sin\beta \tag{6}$$

$$\sin\varepsilon = \mu \sin\delta \tag{7}$$

Ferner wird aus der Figur 3. abgeleitet:

$$\left(45^\circ + \frac{x}{2} + \tau\right) + (90^\circ + \gamma) + \beta' = 180^\circ \tag{8}$$

$$\left(45^\circ + \frac{x}{2} + \tau\right) + (90^\circ - \gamma) + (90^\circ - \delta) = 180^\circ \tag{9}$$

Hieraus folgt:

$$x + 2\tau = \delta - \beta' \tag{10}$$

Zur Vergleichung von β' und β hat man in dem Dreieck bei A:

$$(90^\circ - x) + (90^\circ - \beta) + \beta' = 180^\circ$$

$$\beta' - \beta = x$$

Folglich nach (10):

$$2x + 2\tau = \delta - \beta \quad , \quad \delta = \beta + 2(x + \tau) \tag{11}$$

Dieses δ in (7) gesetzt giebt:

$$\sin\varepsilon = \mu \sin(\beta + 2(x + \tau))$$

Da x und τ klein sind, kann man entwickeln:

$$\sin\varepsilon = \mu(\sin\beta + 2(x + \tau)\cos\beta)$$

.nd mit (6) verglichen:

$$\sin\varepsilon - \sin\alpha = 2\mu(x + \tau)\cos\beta \tag{12}$$

Da bei einem fehlerfreien Prisma $\alpha = \varepsilon$ wäre, so ist auch $\alpha - \varepsilon$ als klein zu ehandeln, d. h.:

$$\sin\varepsilon - \sin\alpha = (\varepsilon - \alpha)\cos\alpha$$

'as in Verbindung mit (12) giebt:

$$(\varepsilon - \alpha) = 2\mu(x + \tau)\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \tag{13}$$

Hier ist β zu eliminieren, nämlich nach (6):

$$\sin\beta = \frac{1}{\mu}\sin\alpha \qquad \cos\beta = \sqrt{1-\frac{\sin^2\alpha}{\mu^2}} \quad , \quad \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{1}{\mu}\sqrt{(\mu^2-1)\sec^2\alpha+1}$$

also:
$$\varepsilon-\alpha = 2\,(x+\tau)\sqrt{1+(\mu^2-1)\sec^2\alpha} \tag{14}$$

Denkt man sich nun durch den Scheitel des Winkels A Parallelen zu dem ein- und austretenden Strahl gezogen, so ergiebt sich aus der Fig. 3.:

$$(90^\circ-\alpha)+\varphi+(90^\circ-x)-(90^\circ-\varepsilon) = 180^\circ$$
$$\varphi = 90^\circ+x+\alpha-\varepsilon \tag{15}$$

oder den Wert für $\varepsilon-\alpha$ nach (14) eingesetzt:

$$\varphi = 90^\circ+x-2\,(x+\tau)\sqrt{1+(\mu^2-1)\sec^2\alpha} \tag{16}$$

Betrachtet man nun den von der entgegengesetzten Seite eintretenden Strahl Fig. 4., so gelten hiefür im wesentlichen dieselben Gleichungen, aber mit geänderten Vorzeichen von x und τ, d. h.:

$$\varepsilon'-\alpha' = -2\,(x+\tau)\frac{\cos\beta'}{\cos\alpha'} \tag{17}$$

$$\varphi' = 90^\circ+x+2\,(x+\tau)\sqrt{1+(\mu^2-1)\sec^2\alpha'} \tag{18}$$

Aus den Gleichungen (16) und (18) geht hervor,
dass der abgesteckte Winkel φ abhängig ist:

1) von den konstanten Fehlern x und τ des Prismas,
2) von dem veränderlichen Winkel α, welchen der eintretende Strahl mit dem Einfallslote bildet.

Nehmen wir nun an, dass das fehlerhafte Prisma zwar *rechtwinklig,* aber *nicht gleichschenklig* ist, so wird in obigen Gleichungen $x = 0$, und dieselben gehen über in:

$$\varphi = 90^\circ-2\,\tau\sqrt{1+(\mu^2-1)\sec^2\alpha} \tag{19}$$

$$\varphi' = 90^\circ+2\,\tau\sqrt{1+(\mu^2-1)\sec^2\alpha'} \tag{20}$$

Wird also der Winkel $\alpha = \alpha'$, so ergänzen sich die Winkel φ und φ' zu 180°; die Bilder decken sich mit dem direkt gesehenen Objekt. Da aber bei der Drehung des Prismas in der Hand dieser Fall jederzeit eintreten kann, so ist bewiesen, dass die Deckung der Bilder entgegengesetzter Signale mit dem Objekt, allein nicht zur Feststellung der Richtigkeit eines Prismas genügt. Es wird vielmehr durch sorgfältige Beobachtung während der Drehung des Instrumentes zu konstatieren sein, ob das Prisma einen wirklich festen, von dem Winkel α unabhängigen Strahl hat.

Um Zahlenwerte einzuführen, nehmen wir in runder Zahl $\mu = 1{,}5$, also $\mu^2-1 = 1{,}25$, und $x+\tau$ zusammen rund $= 1'$, damit wird folgendes berechnet:

α		
$\alpha = 0^\circ$	$2\,(x+\tau)\sqrt{1+1{,}25\sec^2\alpha}$ =	3,0′
„ 10	„ „	3,0
„ 20	„ „	3,1
„ 40	„ „	3,5
„ 60	„ „	4,9
„ 80	„ „	13,0
„ 90	„ „	∞

§ 8. Längenmessung mit Messlatten.

Das wichtigste Werkzeug zur Längenmessung im Felde sind die Messlatten (oder Messstangen). Das sind Massstäbe von möglichst astfreiem Tannenholz, gewöhnlich 5^m lang, in der Mitte 30—40^{mm}, an den Enden 20—30^{mm} dick, an den Enden mit Metall beschlagen. Der Querschnitt wird kreisrund oder etwas elliptisch gemacht, oder man nimmt von dem ursprünglich kreisförmigen Querschnitt nachher oben und unten kleine Segmente ab. (Hiernach sind z. B. zweckmässige Dimensionen: in der Mitte 45^{mm} und 30^{mm} und an den Enden 30^{mm} und 25^{mm}.) Zum Schutz gegen Feuchtigkeit, und um das Abfasern des Holzes zu vermindern, werden die Latten mit Ölfarbe angestrichen, und zwar, um zugleich Einteilung zu erzielen, von Meter zu Meter mit verschiedenen Farben (weiss und rot). Die weitere Teilung auf Decimeter wird ebenfalls durch Farbenstriche oder durch eingeschlagene Nägel mit runden Köpfen bewirkt, Centimeter können geschätzt werden.

Die Anwendung der Latten auf ebenem Boden ist folgende: Zur Messung einer Linie sind *zwei* Latten erforderlich. In der Ebene genügt *ein* Arbeiter; derselbe legt die Latten, die er am *hinteren* Ende hält, eine vor die andere, unmittelbar auf den Boden, indem er nach den Baken schaut, welche die Gerade bezeichnen. Beim Aufheben wird die Latte durch die Hand geworfen, und dann wieder in die Gerade gelegt.

Das Zählen geschieht *laut* und konsequent im Augenblick des Aufhebens; eine Latte, welche noch liegt, gilt noch nicht als gezählt. Das *laute* Zählen schützt sehr gegen Zählfehler, ferner kann man als Mittel dagegen äusserliche Unterscheidung der Latten anwenden, indem man z. B., bei weiss-roter Abteilung nach Metern, die erste Latte so legt, dass weiss anfängt und die zweite so, dass rot anfängt; dann haben in der ganzen Linie die Latten mit weissem Anfang ungerade, und die Latten mit rotem Anfang gerade Zählung, und man kann, wenn man hierauf achtet, sich nur um 2 (oder 4 . . .) Latten verzählen, jedenfalls nicht um 1 Latte, was sonst am häufigsten vorkommt. Ferner hat man damit in der ganzen Linie durchlaufend die ungeraden einzelnen *Meter* weiss, die geraden rot. Bei kürzeren Linien und solchen mit vielen Zwischenpunkten, zählt man sofort die Anzahl der Meter, also 5 10 15 . . . Meter. Bei langen Linien ohne Zwischenpunkte kann man auch die einzelnen Latten zählen, und nachher mit 5 multiplizieren.

An Abhängen wird nach der *Staffelmethode* gemessen, es sind dazu *zwei* Mann erforderlich, welche mit *einer* Latte und einem Lotstab arbeiten. Als Lotstab kann eine Bake, der Kreuzscheibenstock u. dergl. dienen. Der Lotstab soll übrigens womöglich prismatisch bearbeitet sein, wobei nicht seine Mitte, sondern eine seiner Kanten den Endpunkt der Messlatte bezeichnet. Der Lotstab wird bei kleinen Höhen nach Augenmass, bei grösseren Höhen mittelst des Handsenkels senkrecht gestellt. Die Horizontalität der Messlatte selbst wird nach dem Augenmass geprüft oder dadurch, dass man die Latte um ihren festen Endpunkt einen Kreisbogen beschreiben lässt, wobei dann diejenige Lage der Latte die horizontale ist, welche den *grössten* Abstand des Lotstabes von dem festen Ende verlangt.

Die Aufsetzung einer Libelle oder Setzwage auf die horizontale Latte ist bei Staffelmessung nur dann nötig, wenn man nicht nur die horizontalen Entfernungen, sondern auch die Höhen erhalten will, d. h. wenn man *Profile* aufnehmen will.

Auf schwach, aber nahezu gleichförmig geneigtem Boden wird nicht bei jeder einzelnen Lattenlage abgelotet, sondern es wird der Zwischenraum bestimmt, welcher zwischen je zweien Latten-Enden zu bleiben hat, und zwar durch *einmaliges* Abloten, worauf der dabei beobachtete Zwischenraum nach Schätzung beibehalten wird. Ausserdem kann man den Zwischenraum nach Massgabe des Höhenunterschiedes der beiden Latten-Enden berechnen. Ist nämlich (Fig. 1.) h die Höhe des Lotstabes, welche beim Staffelmessen in Betracht käme, so ist der bei aufliegenden Latten einzuhaltende Zwischenraum:

Fig. 1.
Schiefe Messung mit Zwischenmas z.

$$z = \sqrt{l^2 + h^2} - l \tag{1}$$

wobei l die Länge der Latte ist. Wenn nun h verhältnismässig klein gegen l ist, so rechnet man genähert:

$$z = l\sqrt{1 + \frac{h^2}{l^2}} - l = l\left(1 + \frac{h^2}{2\,l^2}\right) - l = \frac{h^2}{2\,l} \tag{2}$$

Zählt man hiebei h in Decimetern und z in Millimetern, so hat man bei 5-Meter-Latten schlechthin:

$$z^{mm} = (h^{dm})^2 \tag{3}$$

z. B. wenn $h = 3$ Decimeter ist, so muss der Zwischenraum $z = 9$ Millimeter genommen werden.

In der Zeitschrift für Verm. 1873 S. 77—88 wurde von *Schmitz* vorgeschlagen, den Lotstab mit einer Teilung zu versehen, welche sofort das nach Gleichung (1) berechnete Zwischenmass angiebt. Um den Lotstab selbst nach gleichförmigem Intervall von z zu beziffern, hat man (1) nach h aufzulösen:

$$h = \sqrt{z\,(z + 2\,l)} \tag{4}$$

Die hiernach berechneten Zahlenwerte zeigt folgende Tafel:

Lotstockhöhe h für das Zwischenmass z, für die Lattenlänge $l = 5$ Meter. (5)

Zwischen-mass z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
0,0	0,000	0,316	0,447	0,549	0,634	0,709	0,777	0,840	0,898	0,953
0,1	1,005	1,054	1,102	1,148	1,191	1,234	1,275	1,315	1,354	1,392
0,2	1,428	1,464	1,499	1,534	1,568	1,601	1,633	1,665	1,696	1,727
0,3	1,758	1,788	1,817	1,846	1,875	1,903	1,931	1,959	1,986	2,013

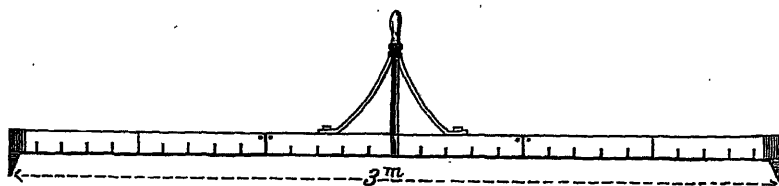
Hiernach hätte man den Lotstock einzuteilen.

Die damit zu erreichende Messungs-Genauigkeit ist nur scheinbar grösser als bei unmittelbarem Abloten, denn wenn das Verfahren gut sein soll, so muss man, um die Lothöhe h genügend genau zu erhalten, die Latte selbst gut horizontal halten.

Nur bei kleinen Höhen ist das Messen der Lothöhe, und Berücksichtigung nach der Tabelle (5), oder einfacher nach der Formel (3), zu empfehlen.

Die *Drehlatte* (Feldzirkel) (Fig. 2. S. 17) ist eine besondere Art der Messlatte, welche in Bayern üblich ist. Beim Gebrauch wird die Latte um die eine in den

Boden gestellte Spitze umgeschwungen, also wie ein Zirkel auf dem Reissbrett gehandhabt. Der Boden darf hiebei nicht zu hart sein, weil sonst die Spitzen nicht fest sitzen, und nicht zu weich, weil sonst die Spitzen denselben aufwühlen und sich

Fig. 2.
Die Dreh-Latte.

verschieben. Auf ebenem Boden misst *ein* Arbeiter mit dieser Drehlatte nahezu mit gewöhnlicher Gehgeschwindigkeit. Die Genauigkeit ist hiebei nahezu dieselbe, wie bei der Kettenmessung.

§ 9. Längenmessung mit dem Stahlband und mit der Kette.

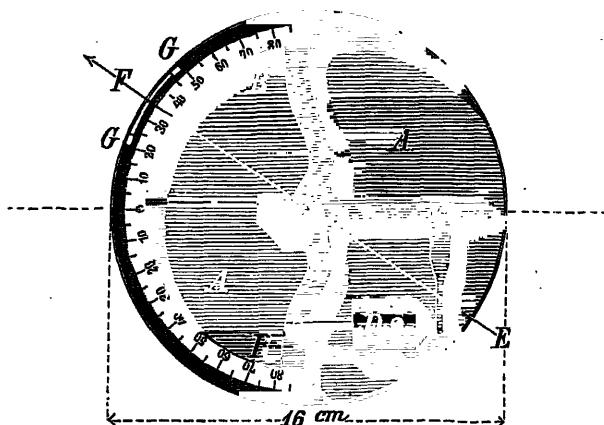
Das seit etwa 10 Jahren in Anwendung genommene *Stahlband* ist für viele Messungen ein sehr zweckmässiges Werkzeug. Das Band besteht aus gehärtetem Stahl, ist gewöhnlich 10—20^m lang, 15—20^{mm} breit, etwa $0{,}5^{mm}$ dick, durch eingeschlagene Nägel in Meter und Decimeter geteilt. An den Enden sind, durch Vermittlung der nötigen Gelenke, metallene Ringe von 3—4^{cm} Durchmesser befestigt, welche über entsprechende Stäbe geschoben werden. Mit diesen Stäben wird das Band durch zwei Mann gehandhabt. Für den Transport und die Aufbewahrung wird das Band auf ein Gestell aufgerollt.

Bei der Anwendung wird das Band längs der zu messenden Linie auf dem Boden ausgespannt, das hintere Ende wird auf den Anfangspunkt der zu messenden Linie gebracht, und nachdem der vordere Endpunkt durch einen eingesteckten Stab oder eisernen Nagel bezeichnet ist, rückt das ganze Band um seine eigene Länge vor, und so fort. Die vom Hintermann gesammelten Nägel oder Pflöcke geben zugleich die Zählung der ganzen Bandlagen.

Auf geneigtem Boden müssen die Neigungswinkel der einzelnen Bandlagen gegen den Horizont gemessen werden, wonach die Reduktion auf den Horizont berechnet werden kann. Im Notfall kann man sich hiebei eines einfachen Gradbogens, der mit dem Zirkel auf ein kleines mit Papier überzogenes Brett aufgetragen ist, mit angehängtem Lotfaden, zum Messen der Neigungswinkel bedienen, und leicht Genauigkeit von etwa 1° erreichen; ein besseres Instrument für diesen Zweck zeigt Fig. 1. S. 18, dessen Prinzip von *Matthes* und *Zugmaier* in der „Zeitschr. f. Verm. 1872“ S. 214, und 1873, S. 113 angegeben wurde (vgl. auch „Zeitschr. f. Verm. 1887“, S. 6—7).

Das Instrument besteht aus einem kreisförmigen Gehäuse AA, in welchem sich ein geteilter Kreisbogen BB centrisch um C bewegt. Durch Zufügung eines Gewichtes D ist der Schwerpunkt des ganzen um C drehbaren Teiles so bestimmt, dass der zum Nullstrich der Teilung gehörige Halbmesser sich immer horizontal stellt. Die cylindrische Wand des Gehäuses trägt bei E eine Sehspalte, gegenüber auf einer Glasplatte GG angebracht, eine Zielmarke F. Die Kreisteilung BB ist nicht auf einer Ebene aufgetragen, wie der Anblick unserer Figur vermuten lässt, sondern auf

einer Kegelfläche, so dass alle Teilstriche ungefähr unter 45° gegen die Zeichenebene der Figur geneigt sind. Das Auge kann daher von *E* aus den Teilstrich ablesen, welcher sich an der Zielmarke *F* befindet. Damit ist der Höhenwinkel der Ziellinie *EF* bestimmt.

Fig. 1.
Neigungsmesser für schiefe Bandmessung.

Um zu prüfen, ob das Instrument die Höhenwinkel bzw. Tiefenwinkel richtig giebt, misst man zwischen zwei Punkten hin und her, und sieht zu, ob der Höhenwinkel hin dem Tiefenwinkel her gleich wird.

Zeigt sich ein Fehler, so kann man denselben durch Verschieben des Gewichtes *D* verbessern, indem durch solche Verschiebung der Schwerpunkt des Ganzen sich ändert

Hätte man z. B. einen Höhenwinkel $+3°$ und zurück den Tiefenwinkel $-5°$ gemessen, so wäre der richtige Höhenwinkel $=+4°$, und darauf hin das Instrument zu verbessern.

(Hat man ein richtiges Nivellier-Instrument zur Hand, so wird man viel einfacher dessen Ziel-Linie als Kontrolle benützen.)

Unser Instrument ist so eingerichtet, dass man Winkel bis zu 80° damit messen kann, obgleich für Reduktion schiefer Längen gewöhnlich nicht mehr als 30° gebraucht werden.

In Betreff der Genauigkeit haben wir uns durch vielfache Versuche überzeugt, dass man die Höhenwinkel leicht auf 0,2° genau mit diesem Instrument messen kann. Indessen genügt es gewöhnlich, für die Reduktion schiefer Längen auf den Horizont, die Winkel nur auf einzelne Grade abgerundet anzugeben. Eine zur Berechnung der Reduktion auf den Horizont dienende Tafel ist auf S. [2] des Anhangs gegeben.

Die Anwendung dieser Tafel wird durch nachstehendes einfache Beispiel (siehe Tabelle S. 19) erläutert.

Die *Messkette* besteht aus einzelnen etwa $0{,}5^{mm}$ langen, 3^{mm} dicken Gliedern von Eisen oder Messing, welche durch Ringe verbunden sind. Die Enden sind mit grösseren Ringen versehen zur Befestigung an Stäben. Die Anwendung der Kette ist dieselbe, wie die soeben beim Bande beschriebene. Die Kette ist wegen des häufigen Verschlingens der Glieder, wegen des Dehnens der Ringe und Ösen und dadurch er-

Schiefe Länge L	Neigungswinkel α	Reduktion $L - L \cos \alpha$	
20^m	5°	$0{,}08^m$	
20^m	6°	$0{,}11^m$	
20^m	8°	$0{,}19^m$	
20^m	10°	$0{,}30^m$	
20^m	13°	$0{,}51^m$	
20^m	15°	$0{,}68^m$	
20^m	17°	$0{,}87^m$	
$17{,}3^m$	20°	$1{,}04^m$	(0,60 + 0,42 + 0,02)
Schiefe Länge = $157{,}30^m$		$3{,}78^m$	

Horizontale Länge $= 157{,}30^m - 3{,}78^m = 153{,}52^m$.

zeugten Verlängerns des ganzen Werkzeuges, zu guten Messungen nicht geeignet, und jedenfalls dem Bandmass untergeordnet.

Die Messkette war früher das wichtigste Werkzeug der norddeutschen Feldmesser (in Süddeutschland war sie nie im Gebrauch), die Kette ist aber bei den neueren Preussischen Kataster-Vermessungen ausser Gebrauch gesetzt, und durch das Stahlband oder die Messlatten ersetzt.

§ 10. Massvergleichung für Messlatten und Messbänder.

Die Normalmasse zur Herstellung und zur zeitweiligen Vergleichung der Messlatten und der Messbänder müssen auf amtlichem Wege erhalten werden. Die Kaiserliche *Normal-Aichungs-Kommission* in Berlin und die ihr unterstellten Aichungsämter verwalten das deutsche Urmeter, dessen unmittelbare Kopieen und die davon abgeleiteten Haupt-Normale und Gebrauchs-Normale *).

---

*) *Abstufung der aichamtlich gebrauchten Masse und Gewichte.*

1) Deutsches *Urmeter* und *Urkilogramm.* (Vgl. Art. 2. und 5. der Mass- und Gewichtsordnung.)

2) *Unmittelbare Kopieen* der Urmasse. Diese können nur von der Normal-Aichungs-Kommission hergestellt werden.

3) *Haupt-Normale* werden von einzelnen Aufsichtsbehörden ausgegeben.

4) *Kontroll-Normale* werden von allen Aufsichtsbehörden ausgegeben und zwar sowohl an die Aichämter als an Private. Der Maximalfehler eines Kontroll-Normals ist $1/20$ des entsprechenden im öffentlichen Verkehr zulässigen Fehlers.

5) *Gebrauchs-Normale* sind hauptsächlich für den Gebrauch der Aichämter bestimmt. Der Maximalfehler eines Gebrauchs-Normals ist $1/5$ des entsprechenden im öffentlichen Verkehr zulässigen Fehlers.

6) *Neu geaichte Verkehrs-Masse* werden von den Aichämtern an das Publikum ausgegeben. Der Maximalfehler derselben ist $1/2$ des entsprechenden im öffentlichen Verkehr zulässigen Fehlers.

Die Abstufung der Genauigkeit ist so bemessen, dass selbst die ungünstigste Anhäufung aller Fehler nicht im stande ist, ein Mass zuzulassen, dessen Fehler gleich anfangs die im Verkehr gestattete Grenze überschreitet.

Grösste zulässige Differenzen zwischen Gebrauchs-Normalen und den entsprechenden Kontroll-Normalen.

Ein Meter von Messing, als „Handelsmass“	hat zulässige Differenz	0,10	Millimeter.
Ein Meter von Messing, als „Präzisionsmass“	„ „ „	0,04	„
Ein Meter von Holz	„ „ „	0,3	„
Ein Doppelmeter von Holz	„ „ „	0,6	„
Ein Anschlagmeter von Stahl	„ „ „	0,3	„
Ein Bandmass von 20 Meter Länge	„ „ „	1,6	„

Die hölzernen Messlatten werden aichamtlich als „Werkmassstäbe" behandelt, und nach der Aich-Ordnung ist der grösste im öffentlichen Verkehr zu duldende Fehler einer 5 Meter-Latte $= \pm 8^{mm}$, und der grösste bei der Aichung selbst zulässige Fehler $= \pm 4^{mm}$, entsprechend bei 20-Meter-Stahlbändern bzw. 4^{mm} und 8^{mm}.

Diese Fehlergrenzen sind bei hölzernen Messlatten für gute Feldmessung zu weit, es sind deswegen von der Kataster-Verwaltung besondere Bestimmungen getroffen, wonach der Feldmesser sich nur die Normal Masse amtlich zu verschaffen hat, nach welchen er dann seine Feld-Gebrauchs-Masse selbst richtig stellt.

Diese Bestimmung wurde in der „Zeitschr. f. Verm. 1884" S. 160—161 mitgeteilt, und enthält im wesentlichen folgendes:

Die Normal-Masse müssen mindestens die Genauigkeit von Gebrauchs-Normalen im Sinne des § 51. der Aich-Ordnung vom 16. Juli 1869 (Beilage zu Nr. 32 des Bundesgesetzblattes für 1869) besitzen und als solche in Gemässheit des ersten Nachtrags vom 30. Juni 1870 zu der gedachten Aich-Ordnung (Beilage zu Nr. 29 des Bundesgesetzblattes für 1870) bzw. des zehnten Nachtrags vom 25. März 1878 (Centralblatt für das Deutsche Reich, 1878, S. 205) mit einem dazu gehörigen Beglaubigungsscheine versehen sein. Es sind thunlichst nur solche Normal-Masse zu verwenden, welche bei 15° Celsius ihre richtige Länge haben.

Bei der Prüfung nach den Normal-Massen dürfen (unter Berücksichtigung der durch die Wärme eintretenden Änderungen) die Feld-Gebrauchs-Masse folgende Abweichungen im Zuviel oder Zuwenig haben:

a.	die Stahlband-Masse	von	20^m	Länge höchstens	$3{,}5^{mm}$
b.	„ „	„	10^m	„ „	$2{,}4^{mm}$
c.	„ Messlatten	„	5^m	„ „	$1{,}6^{mm}$
d.	„ „	„	3^m	„ „	$1{,}3^{mm}$
e.	„ „	„	2^m	„ „	$1{,}1^{mm}$

Hiezu wird noch weiter bemerkt:

Zum handlichen Gebrauche und zum leichten Transporte empfehlen sich als Normal-Masse zwei Stahlstäbe von je 1^m Länge und quadratischem Querschnitt, von etwa 1^{cm}, mit keilförmig abgeschrägten Enden, welche kreuzweise vor einander gelegt werden.

Solche Normal-Masse können von Mechaniker *Bamberg* in Berlin N. Linienstrasse 158, mit Kasten, zum Preise von 15 Mark für ein Paar bezogen werden. Mechaniker *Bamberg* besorgt auch die Aichung der Stäbe als „Gebrauchs-Normale" durch die kaiserliche Normal-Aichungs-Kommission.

Nachdem man in den Besitz eines Normal-Masses und der aichamtlichen Gleichung desselben gelangt ist, legt man eine Tabelle dafür an.

So haben wir zwei der technischen Hochschule zu Hannover gehörige Endmasse von Messing mit Stahlenden vergleichen lassen, und in einem Beglaubigungsschreiben der K. Normal-Aichungs-Kommission die Resultate erhalten:

$$\left.\begin{array}{l} \text{I} \;= 1^m + 0{,}04^{mm} + t \times 0{,}0182^{mm} \\ \text{II} = 1^m - 0{,}09^{mm} + t \times 0{,}0182^{mm} \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Bei der Temperatur $t = 0°$ hat der Stab I die Länge $1^m + 0{,}04^{mm}$, d. h. er ist um $0{,}04^{mm}$ zu lang, und für je 1° Zunahme der Temperatur t dehnt sich der Stab um $0{,}0182^{mm}$ aus.

Hiernach wurde eine Tabelle berechnet, von welcher wir den am meisten gebrauchten Teil von 10° bis 20° als Beispiel hierhersetzen:

$t = 10°$	$I + 1^m + 0{,}22^{mm}$	$II = 1^m + 0{,}09^{mm}$	$I + II = 2^m + 0{,}31^{mm}$
11	0,24	0,11	0,35
12	0,26	0,13	0,39
13	0,28	0,15	0,42
14	0,30	0,16	0,46
15	0,31	0,18	0,50
16	0,33	0,20	0,53
17	0,35	0,22	0,57
18	0,37	0,24	0,61
19	0,39	0,26	0,64
20	0,40	0,27	0,68

(2)

Eine allgemeinere kleine Tabelle dieser Art für Ausdehnung von Messing, Eisen und Tannenholz haben wir im Anhang S. [1] gegeben, nebst einer Übersichts-Tabelle der Vielfachen solcher Ausdehnungen.

Die oben erwähnten, von der Preussischen Kataster-Verwaltung empfohlenen Normal-Masse haben ihre richtige Länge nicht bei 0°, sondern etwa bei 15°, und können dann bei den gewöhnlichen Gebrauchs-Temperaturen zwischen 10° und 20° wohl ohne Rücksicht auf die Temperatur-Ausdehnung zur Vergleichung gewöhnlicher hölzerner Messlatten benützt werden.

Nach diesen Vorbereitungen kommt die Vergleichung selbst.

Fig. 1.
Vergleich-Apparat für Messlatten.

Als Vergleich-Apparat für Messlatten benützt Verfasser ein starkes forchenes Brett BB' (Fig. 1.), auf welchem, im Abstand von etwas mehr als 5 Metern, zwei Stahlschneiden SS' befestigt sind. Nachdem die zu untersuchende Latte LL' auf das Brett zwischen die Schneiden gelegt ist, wird der noch bleibende Zwischenraum z mit einem Stahlkeil sehr bequem auf $0{,}1^{mm}$ genau gemessen.

Dieser Messkeil, in der Figur unten gezeichnet, ist mit einer Teilung versehen, welche die jeweilige Dicke des Keils, bis zu welcher er zwischen die Schneiden eingeschoben werden kann, d. h den Zwischenraum z, unmittelbar angiebt. Der Keil wird mit der einen seiner schiefen Flächen an das ebene Ende L' der Messlatte angelegt, während die andere Fläche an die Schneide S' anstösst.

Statt des Keils kann auch ein Schieber mit Nonius oder auch ein einfacher in Millimeter geteilter Anlege-Massstab angewendet werden.

Zur Messung des Abstandes der Schneiden selbst dienen die oben bei (1) und (2) erwähnten zwei messingenen Endmeter mit stumpfen Stahlschneiden, welche auf dem Brett an einander abgeschoben werden. Der in jedem Falle noch bleibende Zwischenraum zwischen dem letzten Meter und der Fixpunktsschneide wird ebenfalls mit dem Keil gemessen. Durch Wiederholung dieses Abschiebens überzeugt man sich, dass man dadurch rasch den Schneidenabstand auf $0{,}1^{mm}$ genau bestimmen kann.

Folgendes ist ein Beispiel zur weiteren Erläuterung dieses Verfahrens mit der Annahme, dass die Stäbe I und II mit der obigen Tabelle (2) gebraucht worden sind.

Bei einer Temperatur von 14° C. wurden die beiden messingenen Kontroll-Normal-Meter zwischen den Schneiden abgeschoben, und gaben einen Zwischenraum $z = 10{,}6^{mm}$. Bei 14° haben wir nach der Tabelle (2) S. 21:

$$I + II + I + II + I = 5^m + 0{,}30 + 0{,}16 + 0{,}30 + 0{,}16 + 0{,}30 = 5^m + 1{,}22^{mm}$$

also 5 Messingmeter $= 5{,}0012^m$
hiezu Zwischenmass $z = 0{,}0106$
Schneiden-Abstand $= 5{,}0118 = 5^m + 11{,}8^{mm}$

Eine Messlatte wird eingelegt, und giebt
mit dem Keil das Zwischenmass: $9{,}0^{mm}$
folglich ist die wahre Lattenlänge: $= 5^m + 2{,}8^{mm} = 5{,}0028^m$ (3)

Die Kontrollierung des Schneiden-Abstandes selbst braucht nicht sehr oft gemacht zu werden, die Änderung eines solchen Brettes von 5^m Länge beträgt bei geschützter Aufbewahrung nur $1—2^{mm}$ in einem Jahr. Indessen bei Witterungswechsel soll man sich nie auf die Unveränderlichkeit von Hölzern verlassen.

Einige Versuche mit Karlsruher Latten haben wir in der Zeitschr. f. Verm. 1877, S. 69 mitgeteilt. Die mittlere Änderung von April bis Oktober 1876 war $\pm 0{,}8^{mm}$ auf 5 Meter Länge.

Unsere Hannover'schen Latten gaben seit drei Jahren folgendes:

Lattenlänge = 5 Meter + Tafelwert:

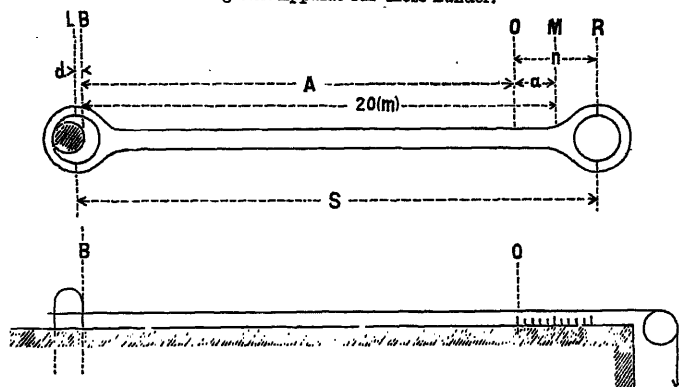
Latte Nr.	1883 8. März	1883 30. April	1885 13. Oktbr.	1886 4. Novbr.	1886 12. Novbr.	Änderung
	mm	mm	mm	mm	mm	mm
1	+ 2,4	+ 2,6	+ 3,9	+ 4,1	+ 3,6	+ 1,2
2	+ 2,8	. .	+ 3,6	+ 3,9	+ 3,9	+ 1,1
3	+ 2,2	. .	+ 3,0	+ 2,4	+ 2,3	+ 0,1
4	+ 2,4	+ 2,4	. .	+ 4,6	+ 4,7	+ 2,3
5	+ 2,9	. .	. .	+ 4,1	+ 4,0	+ 1,1
6	+ 2,3	. .	. .	+ 4,4	+ 4,2	+ 1,9
7	+ 1,8	+ 1,6	+ 2,3	+ 2,9	+ 3,1	+ 1,3
8	+ 1,6	. .	+ 2,4	+ 3,2	+ 3,1	+ 1,5
9	+ 3,1	. .	. .	+ 2,4	+ 2,4	(— 0,7)
10	+ 1,8	+ 2,3	+ 2,7	+ 3,6	+ 3,5	+ 1,7

Diese Latten haben sich also um etwa $1—2^{mm}$ verlängert.

Vergleich-Apparat für Stahlbänder und Ketten.

Zur Vergleichung und Berichtigung der Stahlbänder kann man sich eines Kontroll-Normal-Bandes bedienen. Da ein solches verhältnismässig teuer ist, und da man metallene Kontrollmeterstäbe wohl für andere Zwecke ohnehin hat, kann man auch mit diesen die Vergleichung vornehmen.

Hiezu haben wir auf der Brüstungsmauer der nördlichen Altane der technischen Hochschule in Hannover die durch Fig. 2. S. 23 veranschaulichte Einrichtung getroffen: Es ist B ein etwa 2^{cm} dicker eiserner Bolzen, welcher in die Brüstung eingegossen ist, und zum Anhalten des linkseitigen Ringes des zu untersuchenden Bandes dient. Rechts befindet sich eine Rolle mit angehängtem Gewicht, wodurch dem Band eine gewisse Spannung erteilt werden kann.

Fig. 2.
Vergleich-Apparat für Mess-Bänder.

Zur Massbestimmung ist rechts ein in Millimeter geteilter Messingmassstab in die Mauer eingelassen, dessen Nullpunkt O den Abstand A von der rechten Fläche des Bolzens B hat. Zur Bestimmung dieses Abstandes A werden die 2 messingenen Endmeterstäbe, welche oben bei (1) und (2) beschrieben wurden, von dem Bolzen B an 20 mal abgeschoben, und geben die Entfernung $B\,M = 20$ nominelle Meter, was in Fig. 2. mit 20 (m) angedeutet ist. Diese 20fache Meterabschiebung trifft den Punkt M, oder den Strich a der Teilung, während das zu untersuchende Stahlband bis zum Punkte R oder dem Striche n der Teilung reicht. Sind nun I_t und II_t die Meterlängen bei der betreffenden Temperatur, so hat man:

$$A = 10\,(I_t + II_t) - a \tag{4}$$

Wenn der Bolzen B nicht genau die halbe Dicke des Bandringes hat, so kommt noch die kleine Reduktion d links, nach Andeutung der Figur, hinzu, und damit wird:

$$S = A + n + d \tag{5}$$

oder:

$$S = 10\,(I_t + II_t) - a + n + d \tag{6}$$

Beispiel.

Am 9. November 1886 wurde unser Stahlband (Nr. 2096) bei einer Temperatur von 11° auf dem Apparat Fig. 2. mit einer Spannung von 5 Kilogramm verglichen.

Zuerst wurden die beiden Messing-Endmeter 20 mal abgeschoben, und gaben:

$$a = 8{,}4^{mm} \tag{6}$$

Diese Messingmeter haben nach der Tabelle (2) bei 11° zusammen die Länge

$$I_t + II_t = 2^m + 0{,}35^{mm}$$

also

$$10\,(I_t + II_t) = 20^m + 3{,}5^{mm} \tag{7}$$

Ferner fand sich:

$$d = 3{,}0^{mm} \qquad n = 1{,}5^{mm} \tag{8}$$

Es ist also nun nach (6):

$$S = 20^m + 3{,}5^{mm} - 8{,}4^{mm} + 1{,}5^{mm} + 3{,}0^{mm}$$

$$S = 20^m - 0{,}4^{mm} \tag{9}$$

Das Band ist also um $0{,}4^{mm}$ zu kurz, d. h. hinreichend richtig.

Die Temperatur des Bandes selbst ist hiebei nicht in Rechnung gebracht, es ist nur die Länge des Bandes in der Temperatur, welche gerade stattfand, (11°) bestimmt worden. Da man bei den Messungen im Felde selbst die Temperatur des

Bandes auch nicht berücksichtigt, so ist es am einfachsten, die Vergleichungen bei mittleren Temperaturen, möglichst bei 15° zu machen, und von der Temperatur des Bandes abzusehen. Übrigens kann man auch die Temperatur des Bandes, welche für 10° und 20^m rund 2^{mm} ausmacht, nach der Tabelle S. [1] des Anhangs berücksichtigen.

Wenn man mehrere Bänder nach einander vergleicht, so gilt die Berechnung von A nach (4) für alle gemeinsam; auf einer steinernen Sockel-Mauer an der Nordseite eines Hauses, wie in unserem Falle, kann man auch A längere Zeit als konstant annehmen, und hat dann folgende Anordnung der Vergleichung:

I. Vorbereitung.

20 Meter bei 11° abgeschoben, geben nach der Tabelle (2):

$$10\,(\mathrm{I}_t + \mathrm{II}_t) = 20^m + 3{,}5^{mm}$$

Ablesung an dem Massstab $a = 8{,}4^{mm}$

$$10\,(\mathrm{I}_t + \mathrm{II}_t) - a = A = 20^m - 4{,}9^{mm}$$

II. Bandvergleichung.

Bolzen-Reduktion am linken Ende: . . . . $d = +\,3{,}0^{mm}$

Ablesung des Massstabes am rechten Ende: . . . . $n = +\,1{,}5^{mm}$

Bandlänge: $S = 20^m - 0{,}4^{mm}$

III. Etwaige Berücksichtigung der Temperatur des Bandes.

Die Temperatur 11° verglichen mit dem Normalwert 15° giebt 4° Temperatur unter dem Normalwert, dieses giebt rund . . . . . . $\frac{4}{10}\,2^{mm} = +\,0{,}8^{mm}$

Bandlänge bei 15°: $S_{15} = 20^m + 0{,}4^{mm}$

Hat man viele Vergleichungen zu machen, so legt man ein autographiertes Schema an, in welchem alles Konstante vorgedruckt ist. Ein solches Schema schützt namentlich vor den in solchen Fällen gefährlichen Vorzeichen-Fehlern.

Es ist noch ein Wort über die Spannung des Stahlbandes zu sagen: Wir haben eine Spannung von 5 Kilogramm angenommen, welche durch die Rollen-Vorrichtung von Fig. 2. bestimmt wird. Die mit verschiedenen Gewichten gemachten Erfahrungen gaben für eine Spannungs-Zunahme von 10 kg eine Bandstreckung im Mittel etwa $= 2^{mm}$. Das Band hat 20^{mm} Breite und etwa $0{,}5^{mm}$ Dicke, also einen Querschnitt $= 10^{qmm}$ oder $= 0{,}1^{qcm}$.

Man berechnet hieraus einen Elastizitäts-Modul = 1000 000 kg pro 1^{qcm}, während für Stahl gewöhnlich etwa 2000 000 angenommen wird.

Die in der Anmerkung auf S. 19 angegebene aichamtliche Fehlergrenze $1{,}6^{\,m}$ gilt für eine Spannung von 20 Kilogramm.

§ 11. Genauigkeit der Längenmessung mit Messlatten, mit dem Messband und mit der Messkette. Allgemeine Vergleichung dieser Werkzeuge.

Die bei Längenmessungen auftretenden Fehler sind teils unregelmässig, gleich wahrscheinlich positiv und negativ, teils regelmässig oder einseitig wirkend.

Wir betrachten zunächst nur die unregelmässigen Fehler: Eine Länge l werde durch n maliges Aneinanderlegen der Massstablänge λ erhalten, also:

$$l = \lambda + \lambda + \lambda + \ldots \lambda = n\,\lambda \qquad (1)$$

Jede Massstab-Anlage habe den unregelmässigen mittleren Fehler $\pm \mu$, dann ist der Gesamtfehler angedeutet durch:

$$= \pm \mu \pm \mu \pm \mu \pm \ldots \pm \mu$$

und nach Band I, Meth. d. kl. Q. (2b), § 5. S. 12, ist der mittlere Fehler der gemessenen Länge l:

$$m = \sqrt{\mu^2 + \mu^2 + \mu^2 + \ldots \mu^2} = \sqrt{n\,\mu^2} = \mu \sqrt{n}$$

Setzt man hier nach (1): $$n = \frac{l}{\lambda}$$

so wird: $$m = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{l} = m_1 \sqrt{l} \qquad (2)$$

wo gesetzt ist: $$\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} = m_1 \qquad (3)$$

d. h. m_1 ist der mittlere Fehler der Längeneinheit. Man hat also in Worten den wichtigen Satz, dass der mittlere unregelmässige Fehler der Längenmessung proportional der *Quadratwurzel* der Länge wächst.

Um die Genauigkeit irgend welcher Längenmessungs-Art zu bestimmen, kann man etwa eine Länge l oft wiederholt messen, nach den Sätzen über das arithmetische Mittel (Band I, § 7. S. 15) den mittleren Fehler m einer einzelnen Messung der Länge l ableiten, und hieraus nach (2) auch den mittleren Fehler m_1 der Längeneinheit finden.

In der Praxis hat man es viel häufiger mit zahlreichen Doppelmessungen zu thun, wie sie z. B. bei Polygon-Zügen auftreten.

Die hiezu nötige Formel haben wir schon in Band I (6) § 11. S. 30 entwickelt, nämlich, wenn nun der mittlere Längeneinheits-Fehler mit m_1 und die einzelnen Längen mit l bezeichnet werden:

$$m_1 = \sqrt{\frac{1}{2n}\left[\frac{d\,d}{l}\right]} \qquad (4)$$

Dabei sind $d_1\ d_2\ d_3 \ldots d_n$ die Differenzen von n Doppelmessungen.

Als Beispiel hiefür wollen wir einige Messungen besonders genauer Art nehmen, nämlich Messungen mit Meterstäben längs gespannter Schnur:

Num.	l	l'	$d = l - l'$	d^2	$\frac{d^2}{l}$
	m	m	mm		
1	28,1155	28,111	+ 4,5	20,25	0,72
2	28,136	28,140	— 4,0	16,00	0,57
3	28,061	28,057	+ 4,0	16,00	0,57
4	28,019	28,021	— 2,0	4,00	0,14
5	14,400	14,399	+ 1,0	1,00	0,07
6	14,549	14,5475	+ 1,5	2,25	0,15
7	14,271	14,272	— 1,0	1,00	0,07
8	14,135	14,1385	— 3,5	12,25	0,87
9	9,582	9,582	0,0	0,00	0,00
10	9,776	9,776	0,0	0,00	0,00
11	9,741	9,741	0,0	0,00	0,00
12	9,367	9,3675	— 0,5	0,25	0,03
					3,19

$$m_1 = \sqrt{\frac{3{,}19}{24}} = \pm 0{,}36^{mm} \text{ pro } 1^m \qquad (5)$$

Hiernach sind folgende Zahlenwerte berechnet:

Gemessene Länge	$l =$	1^m	5^m	10^m	20^m	50^m
Mittlerer Fehler einer Messung	$m =$	$0{,}4^{mm}$	$0{,}8^{mm}$	$1{,}1^{mm}$	$1{,}6^{mm}$	$2{,}5^{mm}$

Wenn man nicht lauter Doppelmessungen hat, sondern Gruppen von beliebigen Messungshäufungen, so berechnet man aus jeder Gruppe den mittleren Fehler m_1 für sich, wie schon im Anschluss an (2) angegeben wurde, und dann bildet man aus diesen verschiedenen m_1^2 einen Gesamtmittelwert, indem man jedem m_1^2 sein $(n-1)$ als Gewicht giebt, wo n die einzelnen Gruppenzahlen sind, also wenn in der ersten Gruppe n' in der zweiten n'' u. s. f. Messungen vereinigt sind, berechnet man:

$$m_1^2 = \frac{(n'-1)(m_1')^2 + (n''-1)(m_1'')^2 + (n'''-1)(m_1''')^2 + \ldots}{(n'-1)+(n''-1)+(n'''-1)+\ldots} \tag{6}$$

Nach solchen Formeln kann man den unregelmässigen Längeneinheitsfehler m_1 immer berechnen, und da in Messungswiederholungen sich die einseitig wirkenden Fehler wohl grösstenteils aufheben (einzelne Reste hievon, z. B. beim Messen bergauf und bergab u. s. w. werden immer noch vorkommen), so kann man die so berechneten Werte m_1 für praktische Zwecke hinreichend genau als unregelmässig annehmen.

Nun sind aber alle unmittelbaren Längenmessungen mehr oder weniger auch mit einseitig wirkenden und konstanten Fehlern behaftet, z. B. erzeugt das Ausweichen aus der Geraden nach rechts oder links, nach oben oder unten, ferner bei der Messung mit dem Band oder der Kette das Einschlagen derselben, unter allen Umständen einen positiven Fehler, d. h. das Resultat wird infolge dieses Fehlers zu gross erhalten.

Diese regelmässigen Fehler sind proportional der Länge selbst anzunehmen, und da nun in dem Gesamtfehler zwei Elemente zusammentreten, von denen das erste proportional $\sqrt{l}$ und das zweite proportional l ist, so ist als theoretische Form für den Gesamtfehler anzunehmen (nach Band I, § 6. S. 14):

$$M = \sqrt{(A\sqrt{l})^2 + (B\,l)^2} = \sqrt{A^2\,l + B^2\,l^2} \tag{7}$$

Dieses ist das theoretische Gesetz, und es kommt nun darauf an, die Coëfficienten A^2 und B^2 jeweils durch Erfahrung zu bestimmen.

Im Jahr 1877 war mancherlei hiezu bestimmtes Material vorhanden (vgl. hierüber „Zeitschr. f. Verm." Band I (1872) S. 17—36, 120—129, 154—162, 199—200 221—225, Band II (1873) S. 185—211 und S. 344—362), sowie auch *Wastler*, 845 Doppelmessungen mit der Kette (Zeitschr. des österr. Ing.- und Arch.-Vereins 1876, S. 33—37), und *Lorber*, 5970 Doppelmessungen mit Latten, Kette, Stahlband und Drehlatte: „Über die Genauigkeit der Längenmessungen", Wien 1877, Berg- und Hüttenmännisches Jahrbuch 1877, I. Heft.

Hieraus haben wir folgende Mittelformeln gebildet:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für Lattenmessung} & m = 0{,}003\sqrt{l} \\ \text{für Stahlbandmessung} & m = 0{,}005\sqrt{l} \\ \text{für Kettenmessung} & m = 0{,}008\sqrt{l} \end{array}\right\} \tag{8}$$

und hiernach wurde folgende Übersichts-Tabelle berechnet:

Gemessene Länge	Mittlerer unregelmässiger Fehler einer Messung mit			Mittlerer regelmässiger Fehler
	I. Latten $m_1 = 0,003$	II. Stahlband $m_1 = 0,005$	III. Kette $m_1 = 0,008$	$+ 0,03\ \%$
10^m	$m = \pm 0,01^m$	$m = \pm 0,02^m$	$m = \pm 0,03^m$	$m' = + 0,00^m$
50	0,02	0,04	0,06	0,02
100	0,03	0,05	0,08	0,03
200	0,04	0,07	0,11	0,06
300	0,05	0,09	0,14	0,09
400	0,06	0,10	0,16	0,12
500	0,07	0,11	0,18	0,15
1000	0,09	0,16	0,25	0,30

(8 a)

Soweit nicht Untersuchungen für besondere Umstände vorliegen, wird man die Angaben dieser Tabelle wohl als allgemeine Mittelwerte annehmen dürfen.

Als wichtigste amtliche Bestimmung über Feldmess-Längen-Genauigkeit haben wir aus der „Preuss. Anweisung IX", vom 25. Oktober 1881 S. 20, folgendes anzuführen:

Die zulässige Abweichung zweier unabhängiger Messungen (hin und her) der Länge l ist für Latten oder Stahlband:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I. auf ebenem günstigem Boden} & a = 0,01\sqrt{4\,l + 0,005\,l^2} \\ \text{II. auf mittlerem Boden} & a = 0,01\sqrt{6\,l + 0,0075\,l^2} \\ \text{III. auf unebenem ungünstigem Boden} & a = 0,01\sqrt{8\,l + 0,01\,l^2} \end{array}\right\} \quad (9)$$

Hiernach ist folgende Übersichts-Tabelle berechnet:

Gemessene Länge	Zulässige Differenz zweier Messungen		
	I. günstig.	II. mittel.	III. ungünstig.
$l = 10^m$	$a = 0,06^m$	$a = 0,08^m$	$a = 0,09^m$
50	0,14	0,18	0,20
100	0,21	0,26	0,30
200	0,32	0,39	0,45
300	0,41	0,50	0,57
400	0,49	0,60	0,69
500	0,57	0,70	0,81
1000	0,95	1,16	1,34
2000	1,67	2,05	2,36
3000	2,60	2,92	3,38

(10)

Um die Bestandteile der drei Formeln (9) besser übersehen zu können, schreiben wir diese Formeln auch in andere Form:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I. günstig} & a = \sqrt{(0,02\sqrt{l})^2 + \left(0,071\,\frac{l}{100}\right)^2} \\ \text{II. mittel} & a = \sqrt{(0,025\sqrt{l})^2 + \left(0,087\,\frac{l}{100}\right)^2} \\ \text{III. ungünstig} & a = \sqrt{(0,028\sqrt{l})^2 + \left(0,100\,\frac{l}{100}\right)^2} \end{array}\right\} \quad (11)$$

Es wird also im Falle II. ein unregelmässiger mittlerer Fehler-Teil von $0,025^m$ für 1^m und ein einseitig wirkender Fehler-Teil von $0,087\ \%$ angenommen.

Um ferner diese amtlich gültigen äussersten Messungsdifferenzen mit den unter (8) gefundenen mittleren Fehlern vergleichen zu können, muss man sich zuerst erinnern, dass nach Band I, § 98. S. 296, die zulässige Messungs-Abweichung a etwa gleich dem 4fachen mittleren Fehler einer Messung zu setzen ist.

Hiernach bilden wir folgende Vergleichung:

Gemessene Länge l	$\sqrt{m^2 + m'^2}$ nach (8a), II.	$\frac{a}{4}$ nach (10) II.
100^m	0,06^m	0,06^m
200	0,09	0,10
500	0,19	0,18
1000	0,34	0,29

(12)

Dieses ist eine befriedigende Übereinstimmung.

Was die Vergleichung der verschiedenen Vorzüge und Nachteile der Messlatten, des Stahlbandes, der Kette u. s. w. betrifft, so steht so viel fest, dass die Messlatten die grösste Genauigkeit geben, dass aber die Messung mit dem Stahlband im freien Feld etwas rascher von statten geht, und jedenfalls für die Arbeiter auf die Dauer weniger ermüdend ist.

Der Deutsche Geometer-Verein hat im Jahr 1873 auf seiner Hauptversammlung in Nürnberg Versuchsmessungen mit diesen Werkzeugen angestellt, worüber ein ausführlicher Bericht in der „Zeitschr. für Verm. 1873", S. 344—362 von uns veröffentlicht wurde.

Das Ergebnis dieser Versuchs- und Konkurrenz-Messungen, bei welchen die Süddeutschen zum erstenmal die Messkette, und die Norddeutschen zum erstenmal die Latten in Thätigkeit sahen, war, dass *zunächst* beide Parteien um so hartnäckiger bei ihren gewohnten Werkzeugen blieben, nämlich die Süddeutschen bei den Latten, die Norddeutschen bei der Kette oder dem Band. Doch haben jene Nürnberger Versuche mittelbar viel zur Klärung der Ansichten beigetragen, wornach *beide* Arten von Längenmess-Werkzeugen nach Umständen auszuwählen sind. Die Messlatten haben sich inzwischen in Norddeutschland sehr eingebürgert.

§ 12. Ausgleichung von Längenmessungen.

Obgleich die Ausgleichung von Messungen in einer Geraden, etwa mit verschiedenen Teilpunkten, ungemein einfach ist und von jedem Praktiker durch Proportional-Verteilung gelöst wird, ist es doch nicht überflüssig, sich auch theoretisch hierüber klar zu werden, namentlich weil es ein weitverbreiteter Irrtum ist, die Methode der kl. Q. verlange ein *anderes* als „das bisherige Verfahren, die Fehler der Längenmessungen im einfachen Verhältnis der Länge der Linien zu verteilen" (vgl. „Zeitschr. f. Verm. 1872", I. Band S. 162).

Dieses „bisherige Verfahren" entspricht nämlich gerade den theoretischen Fehlergesetzen, denn wenn die unregelmässigen Fehler proportional $\sqrt{l}$ wachsen, so sind ihre Gewichtsreciproken proportional l, und darnach ist die Verteilung zu treffen. Andererseits sind die regelmässigen Fehlerteile, welche selbst proportional l sind, jedenfalls proportional l zu verteilen, weil bei einseitig wirkenden Fehlern kein gegenseitiges Aufheben angenommen wird.

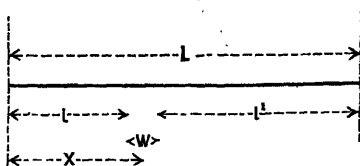
Die Fehlerverteilung „im einfachen Verhältnis der Längen" entspricht also allen theoretischen und praktischen Anforderungen.

Wir wollen dieses näher betrachten:

Man habe den Fall, dass auf einer Geraden zwischen zwei unabänderlich gegebenen Fixpunkten weitere Punkte einzumessen sind. Wir machen dabei die Annahme, dass der mittlere Längenmessungsfehler proportional der Quadratwurzel der Länge wächst, oder dass das Gewicht einer Längenmessung umgekehrt proportional der Länge selbst ist.

Fig. 1.
Längen-Ausgleichung. $w = L - (l + l')$.

Der geradlinige Abstand der Fixpunkte sei L, die Messung soll aber einen Widerspruch w ergeben, indem statt L der Wert $L - w$ erhalten wird. Ein Punkt sei festgelegt durch den gemessenen Abstand l vom ersten Fixpunkt und den gemessenen Abstand l' vom zweiten Fixpunkt (vgl. Fig. 1.), es ist also:

$$L = l + l' + w \qquad (1)$$

Der durch die Ausgleichung zu findende Abstand vom ersten Fixpunkt sei $= x$. Nun hat man zwei Bestimmungen für x:

1) $x_1 = l$ mit dem Gewicht $p_1 = \frac{1}{l}$

2) $x_2 = L - l'$ oder wegen (1): $x_2 = l + w$ mit dem Gewicht $p_2 = \frac{1}{l'}$

also nach Band I. § 8. S. 19.

$$x = \frac{p_1 \, l + p_2 (l + w)}{p_1 + p_2} = l + \frac{p_2}{p_1 + p_2} w$$

oder mit Einsetzung der Gewichte p_1 und p_2:

$$x = l + \frac{l}{l + l'} w = l + \frac{l}{L} w \qquad (2)$$

Hiebei ist im Nenner näherungsweise L statt $l + l'$ geschrieben. Die Korrektion der ersten Messung l beträgt also:

$$v_1 = + \frac{l}{L} w$$

und für die zweite Messung l' wird die Korrektion entsprechend sein:

$$v_2 = + \frac{l'}{L} w$$

d. h. der Widerspruch w wird auf die zwei Strecken l und l' proportional den Streckenlängen verteilt.

Die vorstehende Betrachtung gestattet noch, den mittleren Messungsfehler für die Länge 1 und den mittleren Fehler der Lage des Punktes *nach* der Ausgleichung anzugeben. Zuerst kann man den mittleren Fehler einer Messung der Länge 1 (*vor* der Ausgleichung) bestimmen; derselbe ist nach den Sätzen über das arithmetische Mittel von Beobachtungen verschiedener Genauigkeit Band I § 8. S. 22:

$$m = \sqrt{\frac{p_1 \left(\frac{l}{L} w\right)^2 + p_2 \left(\frac{l'}{L} w\right)^2}{2 - 1}} = \frac{w}{\sqrt{L}}$$

wie sich auch unmittelbar einsehen lässt, indem w als der mittlere Fehler einer Messung der Länge L zu betrachten ist. Der mittlere Fehler von x nach der Ausgleichung ist:

$$M = \frac{m}{\sqrt{p_1 + p_2}} = \frac{w}{L} \sqrt{l\,l'}$$

d. h. der mittlere Fehler der Punktfestlegung durch Einmessen zwischen zwei Fixpunkten ist proportional der Ordinate $\sqrt{l\,l'}$ des über der Geraden L als Durchmesser beschriebenen Kreises; er wird am grössten in der Mitte, nämlich $= \frac{w}{2}$.

Etwaige Fehler der Fixpunkte selbst müsste man, um sie wenigstens möglichst zu zerstreuen, ebenfalls den Längen proportional verteilen; ebenso etwaige einseitig wirkende Messungsfehler, es führt also die Annahme des theoretischen Quadratwurzelgesetzes von selbst zu dem überall befriedigenden Verfahren.

Hat man eine Linie einmal durchlaufend und sodann in zwei Absätzen gemessen, so verfährt man nach demselben Prinzip, wie folgendes Beispiel zeigt:

Durchlaufend gemessen: $l + l' = 415{,}26^m$
Einzelne Messungen: $l = 274{,}38$, $l' = 140{,}72$, also $l + l' = 415{,}10$

Man nimmt nun für die Gesamtlänge das Mittel aus 415,26 und 415,10, d. h. 415,18 (sofern nicht etwa durch das Absetzen eine aussergewöhnliche Unsicherheit entstanden ist) und verteilt dann den Widerspruch $274{,}38 + 140{,}72 - 415{,}18 = 415{,}10 - 415{,}18 = -0{,}08$ proportional den Strecken 274 und 141, d. h. in die Teile 0,05 und 0,03 und man hat das Gesamtresultat:

$$l = 274{,}38 + 0{,}05 = 274{,}43$$
$$l' = 140{,}72 + 0{,}03 = 140{,}75$$
$$l + l' = 415{,}26 - 0{,}08 = 415{,}18$$

Die Ausgleichung von Längenmessungen, welche nicht auf *einer* Geraden vorgenommen werden, also die Ausgleichung eines durch Längenmessungen aufgenommenen Polygons wird theoretisch sehr umständlich. Schon die Ausgleichungs-Rechnung eines Vierecks, in welchem die vier Seiten und beide Diagonalen gemessen sind, würde sich praktisch nicht lohnen.

Einige solche Ausgleichungen, welche jedenfalls ein gewisses theoretisches Interesse verdienen, hat Steuerrat *Vorländer* in der „Zeitschr. für Verm. 1873" S. 145 bis 171 mitgeteilt, wobei jedoch allen Messungen, unabhängig von den Längen, gleiche Gewichte zugeteilt sind.

§ 13. Das Messrad.

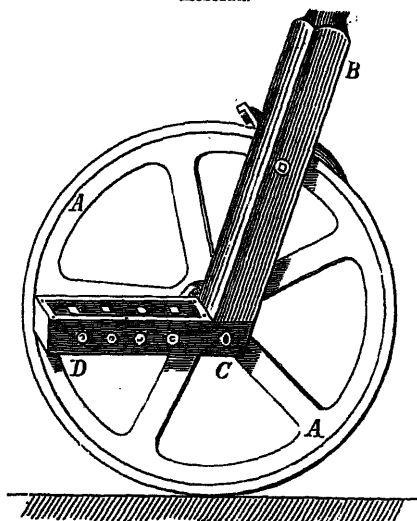
Unter „Messrad" verstehen wir ein Rad, das mit einer mechanischen Vorrichtung zur Zählung der Umdrehungen versehen ist, wodurch bei der Abwicklung des Rades auf einer Geraden die Länge dieser Geraden auf bequemste Weise gemessen wird.

In Deutschland werden namentlich die Messräder von *Wittman* in Wien gebraucht, deren Konstruktion die folgende Fig. 1. S. 31 veranschaulicht.

Das Rad A hat einen Umfang von 0,5 bis 2 Meter, und ist je nach der Grösse mit einer mehr oder weniger ausgedehnten Vorrichtung B zum Halten und Handhaben versehen (die grösseren Räder haben ein schubkarrenartiges Gestell, welches sich an B anschliesst). Die Axe des Rades setzt ein Zahlwerk in Bewegung, welches in

dem Gehäuse *CD* sich befindet, und die Zahl der Umdrehungen an einzelnen Zifferblättern abzulesen gestattet.

In Betreff der Genauigkeit, welche das Messrad liefert, benützen wir einen Teil der Versuche, welche Prof. *Tinter* in Wien angestellt, und in der „Zeitschr. des österr. Ing.- und Arch.-Vereins 1875" Heft II und III mitgeteilt hat:

Fig. 1.
Messrad.

Versuche auf einem guterhaltenen Fussweg, teilweise mit feinem Schotter.

a) Langsam gefahren:

	Gemessene Entfernung.				
	99,95^m	199,85^m	299,82^m	399,55^m	499,80^m
	100,00	200,05	300,28	400,23	499,55
	99,65	199,58	299,69	399,75	499,85
	99,97	200,05	300,15	400,02	499,57
	100,05	200,10	300,15	400,05	499,67
Mittel	99,92	199,93	300,02	399,92	499,69
Wahrsch. Fehler einer Messung	± 0,08^m	± 0,15^m	± 0,17^m	± 0,18^m	± 0,09^m
Fehler-Verhältnis	$\frac{1}{1249}$	$\frac{1}{1333}$	$\frac{1}{1759}$	$\frac{1}{2222}$	$\frac{1}{5552}$

b) Sehr schnell gefahren:

Mittel	99,90^m	199,57^m	299,47^m	339,35^m
Wahrsch. Fehler einer Messung	± 0,10^m	± 0,10^m	± 0,18^m	± 0,23^m
Fehler-Verhältnis	$\frac{1}{999}$	$\frac{1}{1996}$	$\frac{1}{1664}$	$\frac{1}{1475}$

Die beigesetzten wahrscheinlichen Fehler und die Fehler-Verhältnisse sind die von *Tinter* berechneten. Aus den Fehler-Verhältnissen, welche mit wachsender Länge zweifellos abnehmen, erkennt man, dass man den mittleren Fehler nicht der Länge selbst proportional annehmen darf, sondern mit der Quadratwurzel der Länge wachsend. Wir machen daher für die erste Versuchsreihe die folgende Fehlerberechnung:

Nummer der Messung	Messungs-Resultate				
1. 2. 3. 4. 5.	99,95^m 100,00 99,65 99,97 100,05	199,85^m 200,05 199,58 200,05 200,10	299,82^m 300,28 209,69 300,15 300,15	399,55^m 400,23 399,75 400,02 400,05	499,80^m 499,55 499,85 499,57 499,67
Mittel und mittlerer Fehler des Mittels	99,92 ± 0,07	199,93 ± 0,09	300,02 ± 0,11	399,92 ± 0,12	499,69 ± 0,06
Mittlerer Fehler *einer* Messung	± 0,16^m	± 0,20^m	± 0,25^m	± 0,27^m	± 0,13^m

Der mittlere Fehler einer Messung der Längeneinheit (1 Meter) findet sich hieraus:

$$m = \sqrt{\frac{1}{5}\left(\frac{0{,}16^2}{100} + \frac{0{,}20^2}{200} + \frac{0{,}25^2}{300} + \frac{0{,}27^2}{400} + \frac{0{,}13^2}{500}\right)} = \pm\, 0{,}013^m$$

es ist also der mittere Fehler *einer* Messung der Länge l:

$$m = \pm\, 0{,}013 \sqrt{l}$$

wobei m und l in Metern zu rechnen sind.

Da die einzelnen Strecken ausser mit dem Rade, mit anderen genaueren Mitteln gemessen sind, so kann man noch unter der Voraussetzung, dass diese anderen Messungen im Vergleich zu den Radmessungen fehlerfrei seien, den konstanten Fehler der Radmessung, welcher in der vorstehenden Berechnung ausser Betracht geblieben ist, bestimmen. Dass ein konstanter Fehler vorliegt, entweder in den Radmessungen oder in den anderen Messungen, zeigt sich daran, dass in vier Fällen die Mittel der Radmessungen kleiner sind, als die anderen Resultate, während nur in einem Falle das Rad im Mittel ein etwas grösseres Resultat gegeben hat.

Das Verhältnis der Radresultate zu den anderweitig bestimmten Längen ist im Mittel:

$$= \frac{99{,}92 + 199{,}93 + 300{,}02 + 399{,}92 + 499{,}69}{100 + 200 + 300 + 400 + 500} = \frac{1499{,}48}{1500}$$

oder:

$$= 1 - \frac{0{,}52}{1500} = 1 - 0{,}000347$$

und hiernach giebt das Rad die Entfernungen im Mittel um 0,0347% zu klein.

Dass die Angaben des Rades im allgemeinen einer kleinen prozentischen Korrektion bedürfen, wird man wohl annehmen müssen Die Korrektion kann sogar für dasselbe Rad bei verschiedener Bodenbeschaffenheit verschieden sein. Da man aber die Korrektion leicht bestimmen, und mittelst einer zu berechnenden kleinen Hilfstafel berücksichtigen kann, so ist dieses durchaus kein besonderer Übelstand der Radmessung, sondern eine Sache, welche diese Messungsmethode mit jeder anderen Methode der unmittelbaren Längenbestimmung mehr oder weniger gemeinsam hat.

Professor *Schlebach* berichtet in der „Zeitschr. für Verm. VI. Band 1877" S. 241—249, über eine grössere Reihe von Versuchen mit einem Rad von 2^m Umfang

von *Konrad Baer* in Nürnberg. Der mittlere Fehler wurde durch Vergleichung gleichartiger Messungen mit ihrem arithmetischen Mittel bestimmt mit der Annahme, dass der mittlere Messungsfehler proportional der Quadratwurzel der Länge wächst. Die Länge der gemessenen Linien war zwischen 60^m und 300^m. Folgendes sind die Hauptresultate:

Beschaffenheit des Bodens	*Anzahl der Messungen*	*Mittlerer Fehler einer Messung von 1 Meter Länge*
1. Pflaster aus Granitplatten	40	$\pm 0{,}009^m$
2. Bekiester Fussweg	40	0,019
3. Gutes Strassenpflaster aus kleinen Kalksteinen . . .	30	0,012
4. Gut erhaltene Landstrasse	50	0,006
5. Neu erstellte Strasse mit ganz grobem Schotter . .	30	0,036
6. Trockenes Wiesland mit kurzem Gras	50	0,020
7. Bekiester ordentl. erhalt. Feldweg mit 9% Steigung auf u. ab	10	0,039
8. Frisch geackertes Feld mit 9% Steigung	10	0,014
	Durchschnitt	$\pm 0{,}019^m$

Dieses stimmt nahezu mit den oben angegebenen Resultaten von *Tinter*, und da unsere eigenen seit etwa 10 Jahren jährlich bei den Messungsübungen angestellten Vergleichungen im wesentlichen damit übereinstimmten, nehmen wir den mittleren unregelmässigen Fehler einer Messrad-Messung:

$$m = 0{,}02\sqrt{l}$$

wonach folgende Übersicht berechnet ist:

Gemessene Länge l	*Mittlerer Fehler einer Messrad-Messung*
10	$\pm 0{,}06^m$
50	0,14
100	0,20
200	0,28
300	0,35
400	0,40
500	0,45
1000	0,63

Vergleicht man dieses mit der Tabelle (8a) § 11. S. 27 für Latten-, Band- und Ketten-Messung, so sieht man, dass mit Rücksicht auf die Bequemlichkeit der Radmessung, diese für viele Zwecke ein vorzügliches Hilfsmittel ist. Nur darf man konstante Fehler hiebei ja nicht ausser Acht lassen.

Zu ausgedehnten Kontrollierungen, z. B. der Distanzsteine an Strassen und Eisenbahnen, eignet sich das Messrad vorzüglich, und es empfiehlt sich dann, das Zählwerk mit einem Glockenschlag zu versehen, welcher etwa alle 100^m, 500^m u. s. w. tönt.

§ 14. Schrittmass und Marschzeit.

Die Entfernungs-Bestimmung durch Abschreiten ist eine so bequeme und einfache, dass ihr trotz der augenscheinlichen Unsicherheit immer noch für manche Zwecke eine hohe praktische Bedeutung zukommt. Aus diesem Grunde hat Verfasser seit Jahren Erfahrungen über Schrittmasse gesammelt.

Die erste Frage betrifft die Schwankungen der Schritte verschiedener Menschen.

Zur Beantwortung derselben stehen uns 256 Schrittwerte zur Verfügung, welche seit 1873 bei den ersten Längenmessungen der Studierenden an den technischen Hochschulen zu Karlsruhe und Hannover gewonnen wurden, indem Linien von 200—300^{m} mit Latten und Messbändern auf ebenem Boden gemessen und nachher von den Messenden abgeschritten wurden. Nach der Grösse geordnet geben diese 256 Schrittwerte folgende Übersicht:

Schrittlänge s	*Häufigkeit des Vorkommens* n	*Schrittlänge* s	*Häufigkeit des Vorkommens* n
63 ^{cm}	1 mal	83 ^{cm}	10 mal
70 „	2 „	84 „	13 „
71 „	1 „	85 „	11 „
72 „	1 „	86 „	13 „
73 „	2 „	87 „	11 „
74 „	5 „	88 „	3 „
75 „	6 „	89 „	4 „
76 „	13 „	90 „	2 „
77 „	18 „	91 „	1 „
78 „	34 „	92 „	1 „
79 „	29 „	93 „	1 „
80 „	28 „	94 „	1 „
81 „	23 „	96 „	1 „
82 „	20 „	97 „	1 „
	183		73.

Das Mittel aus allen 256 Werten ist 80,7^{cm} und, wenn man diese 250 Werte als ebenso viele unabhängige Bestimmungen einer Unbekannten auffasst, so findet man aus den Abweichungen dieser Bestimmungen von ihrem Mittelwerte den mittleren Fehler *einer* solchen Bestimmung $= \pm 4{,}47^{cm}$ oder 5,5 %; hiernach hat man das Recht, wenn ein Schrittmass in der Ebene vorliegt, ohne dass man über die Persönlichkeit des Schreitenden oder sonstige Umstände etwas Besonderes weiss, 1 Schritt rund $= 80^{cm}$ anzunehmen, und der damit berechneten Länge einen mittleren Fehler von etwa 5 % zuzuschreiben.

Die *Verteilung* der Häufigkeits-Zahlen n, die man am besten durch Auftragen dieser Zahlen n als Ordinaten zu den Schrittwerten s als Abscissen veranschaulicht, zeigt, wie zu erwarten, ein asymptotisches Auslaufen gegen die untere und die obere Grenze, aber keine Symmetrie gegen den Mittelwert. Vielmehr hat 78^{cm} das deutlich ausgesprochene Maximum der Häufigkeit ($n = 34$), von welchem die Kurve nach beiden Seiten rasch abfällt und beim Mittelwerte 80,7 nur noch etwa $n = 25$ zeigt.

Das *Alter* der Schreitenden war im Mittel etwa 20 Jahre; es ist wahrscheinlich, dass mit zunehmendem Alter die Schrittgrösse wieder etwas abnimmt.

Man kann annehmen, dass der Schritt eines und desselben Menschen, von Zeit zu Zeit neu bestimmt, Entfernungs-Bestimmungen etwa auf 2 % genau grebt, wenn keine ungünstigen Ursachen einwirken. Solche Ursachen sind z. B. Steigung des Weges und Ermüdung nach langem Marsche.

Zur Prüfung des Schrittmasses für Nivellements-Zwecke beging der Verfasser im September 1881 die Strassenstrecke von Freudenstadt nach Lautenbach über den Kniebis, und schritt den grössten Teil derselben nach den Strassensteinen ab. Es fand sich die Schrittlänge:

auf wagerechter Strasse . . . . 78,0^{cm},
auf der Kniebis-Strasse mit 7,4 % Steigung aufwärts . 76,3^{cm},
(Mittags-Pause)
auf der Kniebis-Strasse mit 7,4 % Gefälle abwärts . . 76,8^{cm},
auf wagerechter Strasse nach 7stündigem Marsche . . 75,0^{cm}.

Also trotz erheblich verschiedener Umstände ergaben sich doch nur Abweichungen bis zu 4 % vom Mittel (vgl. „Zeitschr. f. Verm. 1882“, S. 299).

Viel bedeutender werden die Änderungen, wenn man die Landstrasse verlässt und auf Gebirgspfaden oder pfadlos an Abhängen marschiert. Zur Gewinnung der Schrittwerte unter solchen Verhältnissen benutzte der Verfasser tachymetrische und Messband-Züge. Aus 136 Vergleichsstrecken fand sich nach graphischer Ausgleichung:

aufwärts Steigung	*Schrittwert cm*	*abwärts Gefälle*	*Schrittwert cm*
0°	77	0°	77
5°	70	5°	74
10°	62	10°	72
15°	56	15°	70
20°	50	20°	67
25°	45	25°	60
30°	38	30°	50

Bei 30° Steigung ist also die Horizontal-Projektion eines Schrittes nur noch die Hälfte von dem Werte in der Ebene, während bei 30° abwärts 1 Schritt immer noch etwa $^2/_3$ des Wertes in der Ebene als Horizontal-Projektion giebt. (Weiteres hierüber s. „Zeitschr. f. Verm. 1884“, S. 485—488.)

Man kann noch fragen, in welcher Weise das Schrittmass von der Körpergrösse abhängig ist? Eine kleine hierauf bezügliche Untersuchung an 19 Studierenden vom Jahre 1884 gab:

Manneshöhe h	*Schrittwert* s	*Manneshöhe* h	*Schrittwert* s
$1,59^m$	$0,77^m$	$1,74^m$	$0,81^m$
$1,62^m$	$0,79^m$	$1,75^m$	$0,76^m$
$1,63^m$	$0,74^m$	$1,76^m$	$0,81^m$ $0,85^m$
$1,64^m$	$0,75^m$	$1,77^m$	$0,80^m$ $0,75^m$ $0,81^m$
$1,67^m$	$0,80^m$	$1,78^m$	$0,83^m$
$1,71^m$	$0,88^m$ $0,76^m$	$1,80^m$	$0,84^m$ $0,83^m$
$1,72^m$	$0,77^m$	$1,81^m$	$0,80^m$.

Das Wachsen des Schrittes mit der Körperhöhe zeigt sich deutlich, wie es ja auch nicht anders sein kann. Zur Ausgleichung wurde nach der Methode der kleinsten Quadrate die Formel gebildet:

$$s = 0,7905^m + 0,25\,(h - 1,70^m),$$
$$\pm 0,0085 \quad \pm 0,12$$

wo die mit $\pm$ beigesetzten Werte die mittleren zu fürchtenden Fehler nach der Ausgleichung sind. Der mittlere Fehler einer Schrittbestimmung wurde $= \pm 0,034^m$.

Der Coëfficient $0,25 \pm 0,12$ sagt, dass einer Zunahme der Körperhöhe eine Schrittzunahme von $^1/_4$ entspricht, dass aber diese Zunahme selbst nur auf $^1/_2$ ihres eigenen Wertes sicher berechnet ist.

Nach der letzten Formel bildet man folgende Tabelle:

Höhe	*Schritt*	*Höhe*	*Schritt*
1,55^m	0,75^m	1,80^m	0,82^m
1,60^m	0,77^m	1,85^m	0,83^m
1,65^m	0,78^m	1,90^m	0,84^m
1,70^m	0,79^m	1,95^m	0,85^m
1,75^m	0,80^m	2,00^m	0,87^m.

Wir haben noch ein Wort über sogen. *Normalschritte* zu sagen. Beim Militär ist beim Marschieren in Reih und Glied gleicher „Schritt und Tritt" nötig, aber ausserhalb Reih und Glied und ohne Trommeltakt hat jeder Mann seinen *eigenen* Schritt, in den er immer wieder unwillkürlich verfällt. Man soll daher auch nicht einen Messgehilfen zwingen wollen (was zuweilen vorkommt), einen „Normalschritt" anzunehmen; vielmehr muss man umgekehrt, wo es auf Genauigkeit ankommt, den natürlichen Schritt der Gehilfen bestimmen und entsprechend besonders in Rechnung bringen.

Mechanische Schrittzähler, zur Ersparung des Schrittzählens in Gedanken, sind schon mehrfach konstruiert worden. Es giebt deren, welche in solcher Weise mit den Beinen verbunden werden, dass jeder einzelne Schritt auf einem Zahnrad durch einen Schalthaken registriert wird, und dieselben (welche auch Reittieren angelegt werden können), leisten jedenfalls den gewünschten Dienst.

In neuerer Zeit hat man Schrittzähler, welche, einfach in die Tasche gesteckt, nur durch die allgemeine Erschütterung des schreitenden Körpers in Bewegung gesetzt werden.

Diese Schrittzähler geben, bei scharfem bestimmtem Schreiten, gute Resultate (unser Hannov. Versuchs-Exemplar zeigte im Mittel 1—2 % zu *viel*, gegen wirkliches Zählen).

Auch die *Zeit*, welche zum Begehen einer Linie erforderlich ist, kann als relatives Entfernungsmass benützt werden.

Die mittlere Geschwindigkeit eines Mannes ohne schweres Gepäck mag etwa 5,5^{km} in 1 Stunde sein. Verfasser fand für sich als „Tourist" im Mittel 5,7^{km} mit Schwankungen zwischen 5,3^{km} und 6,1^{km}. Die grösste uns bekannt gewordene Marschleistung (Sport) ist 18^{km} in 2 Stunden 5 Min., d. h. 8,65^{km} in 1 Stunde.

Zu geographischen Aufnahmen auf Reisen braucht man mehr die Geschwindigkeit von Tieren, z. B. von Reitpferden, von Kamelen u. s. w. Für letzteren Fall hat Verfasser im Winter 1873—74 auf der libyschen Expedition von *Rohlfs* folgende Zahlen gefunden:

Strecke	Marschzeit		Weg in 1 Stunde
	Tage	Stunden	Kilometer
Hamrah—Farafrah . . .	12½	91,0	3,85
Farafrah—Dachel . . .	5	44,1	4,14
Dachel—Regenfeld . . .	7½	51,6	3,61
Regenfeld—Siuah . . .	14	126,5	4,02
Siuah—Beharieh . . .	10	92,0	4,07
Beharieh—Farafrah . .	4	38,3	4,52
Farafrah—Dachel . . .	3½	42,6	4,29
Dachel—Chargeh . . .	6	53,0	4,03
Chargeh—Esneh . . .	6	58,8	3,79
Summen	68½	597,9	
		Gesamtmittel	4,005

Der Geograph hat hiernach das Recht, die Itinerare von Kamelkaravanen in Nordost-Afrika nach dem Massstab 1 Stunde = 4 Kilometer zu verwerten, und zwar wird man bei längeren Strecken mit diesem Massstab kaum um 5 Prozent fehlen.

§ 15. Coordinaten-Aufnahme mit Messlatten, Winkelspiegel u. s. w.

Durch Abstecken von Geraden, und von Senkrechten, und durch Längen-Messungen kann man ein mässiges Gebiet aufnehmen, indem man eine Gerade steckt, und von allen Punkten, die man haben will, Senkrechte auf diese Gerade fällt.

Die Aufzeichnung geschieht in einem „*Handriss*“, d. h. in einer Zeichnung, welche im Felde selbst mit fortschreitender Messung, nach nahezu richtigen Verhältnissen, gefertigt wird, zuweilen nur nach Augenmass, oder auch mit einem Anlege-Massstab oder dergl., das Wichtigste bei der Handriss-Führung sind die eingeschriebenen Masse

Das Einschreiben der Masse kann nach verschiedenen Systemen geschehen, deren einige in Fig. 1., Fig. 2. und Fig. 3. angedeutet sind.

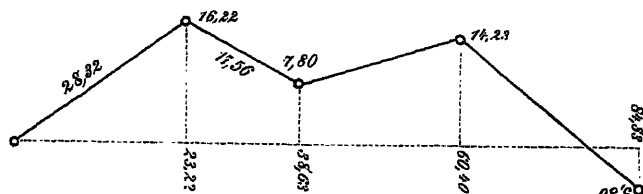
Fig. 1.
Handriss mit quergeschriebenen Abscissen- und Ordinaten-Massen (Württemberg).

In Fig. 1. sind alle Coordinatenmasse rechtwinklig quer zu der betreffenden Linie geschrieben. Die Abscissen 23,22 38,63 u. s. w. sind durchlaufend gemessen. Einzelne Masse schiefer Entfernungen sind parallel den betreffenden Linien geschrieben, z. B. 28,32 17,56. Diese Schreibweise, welche sich in Süddeutschland seit Jahrzehnten festgesetzt hat, ist nach unserer Ansicht sehr zu empfehlen.

Fig. 2.
Handriss mit quergeschriebenen Abscissen-Massen und parallelen Ordinaten-Massen (Preuss. Kataster).

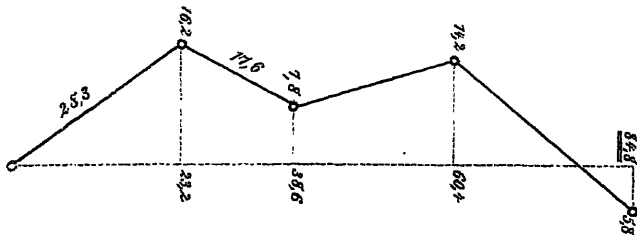



Fig. 2. unterscheidet sich von Fig. 1. wesentlich nur dadurch, dass die Ordinaten-Masse, z. B. 16,2 7,8 u. s. w. in demselben Sinn wie die zugehörigen Abscissen 23,2 38,6 u. s. w. geschrieben sind. Die Masse sind in Fig. 2. auf 0,1 abgerundet, was nach Umständen auch in Fig. 1. oder Fig. 3. geschehen kann; oder umgekehrt kann auch Fig. 2. mit Massen auf 0,01 genau geschrieben werden.

Fig. 3.
Handriss mit abgesetzten Abscissen-Massen (Baden).

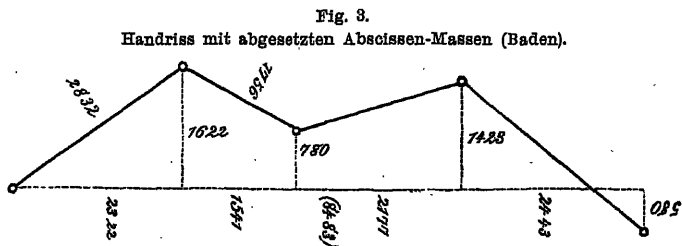



Fig. 3. hat abgesetzte Abscissen-Masse mit der Kontroll-Summe 84,83, und auch die schiefen Masse quer geschrieben.

In Fig. 4. S. 39 ist der Handriss einer grösseren Aufnahme mit konsequent quer geschriebenen Coordinaten-Massen gezeichnet. Die Hauptaufnahmslinie ist AB; die darauf errichteten Senkrechten dienen zum Teil selbst wieder als Abscissen-Linien.

Es sind auch zahlreiche schiefe Entfernungen gemessen, und in der Zeichnung durch kurze Linien, welche die Messungsrichtung andeuten, von den Coordinaten-Massen unterschieden. Wo keine Verwechslung zu fürchten ist, kann man diese kurzen Linien weglassen, und umgekehrt, wo die Deutlichkeit es verlangt, kann man die Bedeutung schiefer Masse noch durch beigesetzte Häckchen (wie in Maschinen- und Bauzeichnungen üblich) hervorheben. Z. B. ist die Wasserbreite 2,90 und die Brückenbreite 3,90 in Fig. 4. in dieser Weise hervorgehoben

Allgemeine Bemerkungen zur Handriss-Führung.

Das Führen eines guten Handrisses ist nicht so leicht, als es auf den ersten Blick scheint; es gehört viele Übung dazu. Der Handriss ist so deutlich und korrekt zu führen, dass darnach das Auftragen jederzeit und auch durch jeden *anderen* Sachverständigen bewirkt wzrden kann.

Kleinere Handrisse kann man von freier Hand in ein Feldschreibbuch zeichnen; für grössere Handrisse im Format $60^{cm} \times 40^{cm}$, wie es in der Kataster-Vermessung vorkommt, bedienen sich die Feldmesser eines leichten Messtisches, der auf einem in den Boden zu stossenden Stocke leicht befestigt ist, und das Auflegen von Schreib- und Zeichen-Geräten gestattet.

In Preussen werden die Kataster-Handrisse nicht mehr mit Blei, sondern im Felde selbst *mit Tinte* geschrieben. —

Die schiefen Entfernungen, welche man unter allen Umständen bei Eigentumsgrenzlinien, Hauskanten etc. misst, geben bei der Zeichnung die nötigen Proben. Die wichtigsten derartigen Proben kann man auch durch Rechnung mit der Quadrattafel verwerten. Z. B. sind in Fig. 4. S. 39 die Ordinaten der zwei äussersten Eckpunkte 39,34 und 29,68, es ist also der Ordinatenunterschied $= 9{,}66$; der Abscissen-Unterschied findet sich unmittelbar $= 84{,}00$ eingeschrieben.

Nach einer Quadrattafel berechnet man hiemit:

$$9{,}66^2 = \quad 93{,}32$$
$$84{,}00^2 = 7056{,}00$$
$$\text{Summe} \quad = 7149{,}32$$
$$\sqrt{7149{,}32} = 84{,}55^m$$
$$\text{Schiefe Entfernung gemessen} = 84{,}56^m$$
$$\text{Probe} \quad 0{,}01^m$$

Fig. 4.
Handriss einer Aufnahme mit Messlatten und Kreuzscheibe.

Ausser diesen Proben durch Hypotenusen sucht man sich noch auf andere Weise Versicherungen zu verschaffen.

Z. B. das abgesetzte Messen der Abscissen in Fig. 3. ist aus diesem Grunde gewählt (obgleich sonst durchlaufendes Messen besser wäre), indem die nachfolgende Rückmessung der Gesamt-Länge mit der Summe der Einzelmasse stimmen muss.

In der „Zeitschr. f. Verm. 1881“, S. 243—247, hat *Th. Müller* verschiedene zweckmässige Anordnungen von Probemessungen mitgeteilt, von denen wir die nachfolgende Fig. 5. entlehnen:

Fig. 5.
Versicherungs-Messungen 55,90 63,70 73,00.

§ 16. Ausdehnung des Vermessungs-Gebietes.

Für Kataster-Zwecke dürfen die Ordinaten mit der Kreuzscheibe, dem Winkelspiegel u. s. w. nicht über 40—50^{m} lang gemacht werden, während die Längenmessung in einer Geraden viel weiter ausgedehnt werden kann. Man kann also mit Messlatten und Kreuzscheiben u. s. w. einen Feld-Streifen von grosser Länge, aber nur mässiger Breite von 100^{m} unmittelbar aufnehmen.

Fig. 1.
Lange Senkrechte PA.

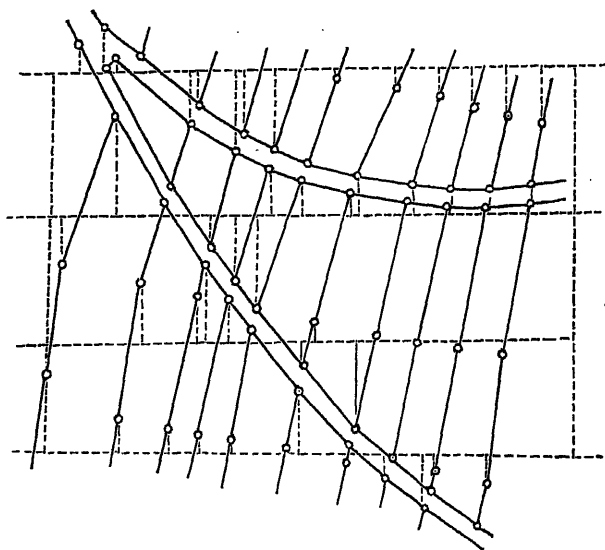
Um ausnahmsweise eine lange Senkrechte PA (Fig. 1.) von einem Punkt P auf eine Gerade AB zu fällen, kann man so verfahren, dass man zuerst A *ungefähr* mit der Kreuzscheibe aufsucht, dann nimmt man den Punkt B auf der Geraden beliebig an, misst PA und PB, worauf berechnet werden kann:

$$BA = \sqrt{PB^2 - PA^2}$$

Parallelen-Methode.

Man kann ein Netz von Parallelen, wie es in Fig. 2. S. 41 dargestellt ist, auf viel weitere Ausdehnung gut einmessen, als die Anlage einzelner langer Senkrechten zulässig wäre, denn man kann die Parallelen durch zahlreiche Proben, etwa nach Fig. 1. oder durch Kreuzmasse u. s. w. versichern.

Parallelen-Methode.

Fig. 2.
Parallelen-Netz der Württembergischen Landes-Vermessung.
(Massstab 1 : 2500.)

Nach Festlegung des Parallelen-Netzes ist dann die Einzelaufnahme sehr einfach, wie Fig. 2. von der Württembergischen Landes-Vermessung (1820—1840) andeutet.

Linien-Netz.

Da ein Dreieck durch seine drei Seiten bestimmt ist, und man jedes Vieleck in Dreiecke zerlegen kann, so kann man jedes Vieleck durch Längenmessung aufnehmen.

Ein solches Linien-Netz, das man durch zahlreiche eingebundene Kreuzungs-Linien, Diagonalen u. s. w. versichert, giebt auf weite Entfernung verhältnismässig grosse Genauigkeit.

Namentlich in Norddeutschland war dieses Verfahren bei den nur mit der Messkette und dem Winkelkreuz ausgerüsteten Feldmessern sehr verbreitet, und es wurden ganze Ortschaften und Feldmarken so umsponnen.

Trotz der Einfachheit und der verhältnismässig guten Resultate ist dieses Verfahren, ebenso wie auch die oben beschriebene süddeutsche Parallelen-Methode im Vergleich mit den neueren Theodolit-Aufnahmen, nicht mehr zweckmässig.

Das Abstecken und Messen mit Hindernissen.

Um beim Abstecken und Messen einer Geraden ein nicht zu ausgedehntes Hindernis zu umgehen, wendet man Parallel-Abweichen mit Benützung der Kreuzscheibe an, wie in Fig. 3. angedeutet ist.

Fig. 3.
Parallel-Ausweichen.

Fig. 4.
Seitwärts-Einmessen.

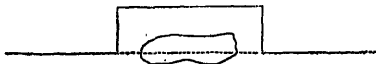
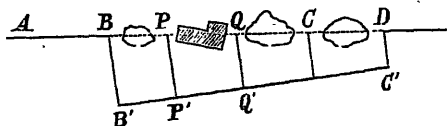
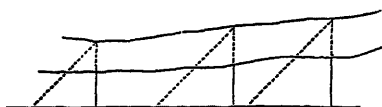
Liegt eine *teilweise* hindernde Fläche auf einer abzusteckenden Geraden $ABCD$ Fig. 4., so führt unter Umständen die Anlage einer seitlichen Hilfslinie $B'C'$ zum Ziel.

Aus BB', $B'C'$, $C'D$ lassen sich die Coordinaten der Punkte P, Q, C durch einfache Proportionen berechnen, und dann P, Q, C u. s. w. seitwärts einmessen.

Fig. 5.
Fluss-Aufnahme durch 45°-Schnitte.

Mit Hilfe einer mit Halbschnitt versehenen Kreuzscheibe, welche Winkel von 45° abzustecken gestattet, kann man das jenseitige Ufer eines Flusses in der durch Fig. 5. angedeuteten Weise aufnehmen.

Man wird im allgemeinen besser daran thun, durch Wahl der Aufnahmslinien u. s. w. Hindernisse zu vermeiden, als auf deren Überwindung besonderen Scharfsinn zu verwenden.

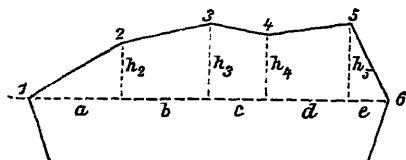
Kapitel II.

Berechnung und Teilung der Flächen.

§ 17. Flächenbestimmung durch rechtwinklige Coordinaten.

Wenn eine Figur mittelst Messlatten und Kreuzscheibe aufgenommen ist, so wird sie durch die Messungslinien in rechtwinklige Dreiecke und Trapeze zerlegt, wie Fig. 1. andeutet, deren Fläche F bestimmt wird durch die Formel:

$$2F = a h_2 + b(h_2 + h_3) + c(h_3 + h_4) + d(h_4 + h_5) + e h_5 \tag{1}$$

Fig. 1.
Rechtwinklige Dreiecke und Trapeze.

Hiebei können sogenannte verschränkte Trapeze, bei welchen die schiefe Seite von der Aufnahms-Axe geschnitten werden, nach derselben Formel wie gewöhnliche Trapeze behandelt werden, indem die zwei Parallelseiten mit verschiedenen Zeichen eingeführt werden.

Dass dieses zulässig ist, zeigt folgende elementare Betrachtung (Fig. 2. S. 43). Die Fläche $\ldots MABCN \ldots$ kann man so zusammensetzen:

$$\ldots \text{Trapez}\, MAA_0 + \triangle AA_0S - \triangle BB_0S + \text{Trapez}\, BCC_0B_0$$
$$+ \text{Trapez}\, NCC_0 + \ldots$$

Es handelt sich also jedenfalls um die Differenz zweier Dreiecke:

$$\triangle AA_0S - \triangle BB_0S$$

Hiebei ist:

$$2 \triangle A A_0 S = a y \ , \ 2 \triangle B B_0 S = b y'$$

also:

$$\triangle A A_0 S - \triangle B B_0 S = a y - b y' \quad (1)$$

Betrachtet man andererseits das verschränkte Trapez $A B B_0 A_0$, wobei $A_0 B_0 = a + b = x$ ist, so hat man:

$$x (y - y') = (a + b)(y - y') = a y - b y' + b y - a y'$$

Die zwei letzten Glieder heben sich auf, weil die Proportion besteht:

$$a : y = b : y'$$

Es ist also:

$$x (y - y') = a y - b y' \quad (2)$$

und durch Vergleichung von (1) und (2) hat man:

$$\triangle A A_0 S - \triangle B B_0 S = x (y - y') \quad (3)$$

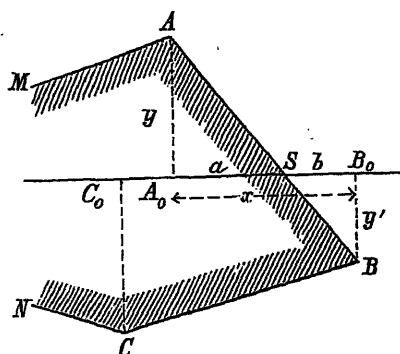
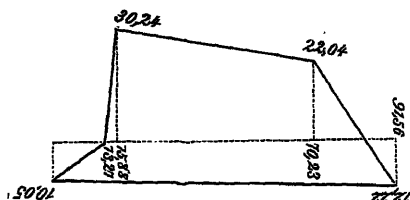
Fig. 2.
Verschränktes Trapez $A B B_0 A_0$.

Als Beispiel für diese Art der Flächen-Berechnung dient Fig. 3. und die dazu gehörige folgende Zahlenberechnung:

Fig. 3.
(Massstab 1 : 200)

$$\begin{array}{llll}
+ (15,88 - 13,27) \times 30,24 & = + \ 2,61 \times 30,24 = & + \ 78,9 & \\
+ (70,23 - 15,88) \times (30,24 + 22,04) & = + 54,35 \times 52,28 = & + 2841,4 & \\
+ (91,56 - 70,23) \times (22,04 - 12,22) & = + 21,33 \times \ 9,84 = & + \ 209,5 & \\
+ \ 91,56 \times (12,22 + 10,05) & = + 91,56 \times 22,27 = & + 2039,0 & \\
- \ 13,27 \times 10,05 & = - 13,27 \times 10,05 = & & - 133,4 \\
\hline
 & \text{Summen:} & + 5168,8 & - 133,4 \\
 & 2F = & 5035,4 & \\
 & F = & 2517,7^{qm} & (4) \\
 & \text{oder } F = & 25 \text{ Ar } 17,7^{qm} &
\end{array}$$

Ein zweites Beispiel (das zu Übungs-Rechnungen gebraucht werden kann), zeigt Fig. 4. S. 44., welche als Aufgabe aus dem württembergischen Geometer-Examen, 1882, in der „Zeitschr. f. Verm. 1883", S. 436 von *Schlebach* mitgeteilt wurde.

(Die Zahlen für die Punkte (4) und (10) sind in dem Holzschnitt Fig. 4. etwas ungeschickt ausgefallen; (4) hat die Abscisse 244,84, (10) hat die Abscisse 254,66 und die Ordinate 33,54.)

Man kann die Grundformel (1) auch in andere Gestalt bringen, nämlich:

$$2\,F = (a + b)\,h_2 + (b + c)\,h_3 + (c + d)\,h_4 + (d + e)\,h_5 \tag{5}$$

Dieses entspricht der nachher zu behandelnden allgemeinen Formel (8). Für einfache Formen wie Fig. 1. ist diese Formel (5) der früheren (1) vorzuziehen.

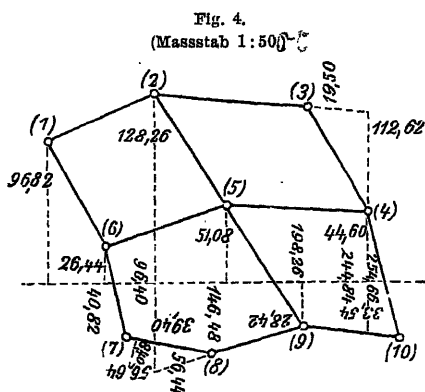



Fig. 4.
(Massstab 1:500)

Bei einer Flächen-Berechnung, wie die vorstehenden, zu Fig. 3. und Fig. 4., kann man immer durch den Anblick der Figur entscheiden, welche Teile positiv, und welche Teile negativ zu rechnen sind; man kann aber auch die Formeln für die Flächen-Berechnung rein algebraisch, im Sinne der analytischen Geometrie auffassen, und braucht dann zur Vorzeichen-Entscheidung keine Figur.

Man kann die Flächen-Berechnung nach *verschiedenen* Formeln machen, wie schon durch (1) und (5) gezeigt ist.

Wir wollen die verschiedenen Umformungen an dem Beispiel eines Fünfecks zeigen:

Denkt man die Zerlegung in Trapeze ausgeführt, mit Ordinaten y, so wird:

$$\begin{aligned} 2\,F = &(x_2 - x_1)(y_2 + y_1) \\ &+ (x_3 - x_2)(y_3 + y_2) \\ &+ (x_4 - x_3)(y_4 + y_3) \\ &+ (x_5 - x_4)(y_5 + y_4) \\ &+ (x_1 - x_5)(y_1 + y_5) \end{aligned} \qquad \left.\begin{aligned} &\text{Allgemein} \\ 2\,F &= \Sigma\Big((x_{n+1} - x_n)(y_{n+1} + y_n)\Big) \\ &= \Sigma\Big(\varDelta x\,(y_{n+1} + y_n)\Big) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Wenn man dieses ausmultipliziert und nach x ordnet, so erhält man:

$$\begin{aligned} -2\,F = &\,x_1(y_2 - y_5) \\ &+ x_2(y_3 - y_1) \\ &+ x_3(y_4 - y_2) \\ &+ x_4(y_5 - y_3) \\ &+ x_5(y_1 - y_4) \end{aligned} \qquad \left.\begin{aligned} &\text{Allgemein} \\ -2\,F &= \Sigma\Big(x_n\,(y_{n+1} - y_{n-1})\Big) \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Wenn man dagegen nach y ordnet, so findet man:

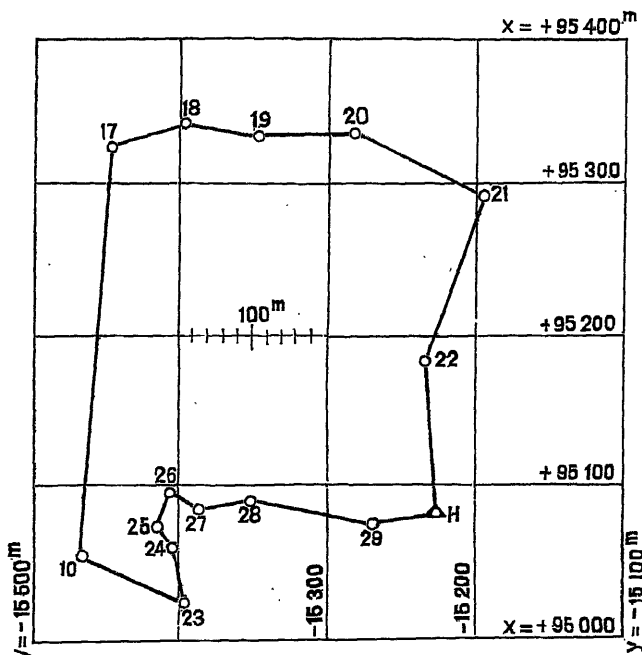
$$\begin{aligned} 2\,F = &\,y_1(x_2 - x_5) \\ &+ y_2(x_3 - x_1) \\ &+ y_3(x_4 - x_2) \\ &+ y_4(x_5 - x_3) \\ &+ y_5(x_1 - x_4) \end{aligned} \qquad \left.\begin{aligned} &\text{Allgemein} \\ 2\,F &= \Sigma\Big(y_n\,(x_{n+1} - x_{n-1})\Big) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Dieses kann man noch in eine vierte Form bringen:

$$
\left.\begin{aligned}
-2F &= (y_2-y_1)(x_1+x_2) \\
&+(y_3-y_2)(x_2+x_3) \\
&+(y_4-y_3)(x_3+x_4) \\
&+(y_5-y_4)(x_4+x_5) \\
&+(y_1-y_5)(x_5+x_1)
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&\text{Allgemein} \\
-2F = \; &\Sigma\Big((y_{n+1}-y_n)(x_n+x_{n+1})\Big) \\
= -\; &\Sigma\Big(\Delta y\,(x_n+x_{n+1})\Big)
\end{aligned}\right\} \quad (9)
$$

Diese vier Formeln (6) (7) (8) (9) geben die Fläche F positiv, wenn die Numerierung (1) (2) (3) . . . im Sinne von links nach rechts geht (z. B. im Sinn (17), (18), (19) in Fig. 5.), und wenn, wie bei Landesvermessungs-Coordinaten immer geschieht, die Drehung von $+x$ nach $+y$ ebenfalls positiv ist (z. B. $+x$ nach Norden, $+y$ nach Osten).

Alles, was sonst noch hiezu zu bemerken ist, erklärt sich am besten durch ein ausgerechnetes Zahlen-Beispiel (siehe S. 46 und S. 47), welches wir zu Fig. 5. geben.

Fig. 5.
Geschlossenes Polygon mit 15 Ecken zur Flächen-Berechnung.
(Massstab 1 : 5000.)

(Fig. 5. bezieht sich auf unsere polygonometrische Aufnahme des Welfengartens in Hannover, Vermessungs-Übung 1884.)

Tabellarische Flächen-Berechnung zu Fig. 5.

Punkt	y_n	Δy	$(y_{n+1} - y_{n-1})$	x_n	Δx	$x_{n+1} - x_{n-1}$	$y_n + y_{n+1}$	$x_n + x_{n+1}$
	m							
(17)	— 15 442,82			+ 95 329,61			—	+
		+ 51,26			+ 13,94		834,38	673,16
(18)	.. 391,56		+100,99	.. 343,55		— 8,65		
		+ 49,73			— 5,29		733,39	681,81
(19)	.. 341,83		+ 111,45	.. 338,26		— 6,11		
		+ 61,72			— 0,82		621,94	675,70
(20)	.. 280,11		+149,69	.. 337,44		— 40,96		
		+ 87,97			— 40,14		472,25	634,74
(21)	.. 192,14		+ 49,65	.. 297,30		—152,76		
		— 38,32			—112,62		422,60	481,98
(22)	.. 230,46		— 30,99	.. 184,68		—215,16		
		+ 7,33			—102,54		453,59	266,82
H	.. 223,13		— 38,84	.. 82,14		—101,65		
		— 46,17			+ 0,89		492,43	165,17
(29)	.. 269,30		—130,75	.. 83,03		+ 11,70		
		— 84,58			+ 10,81		623,18	176,87
(28)	.. 353,88		—115,95	.. 93,84		+ 4,70		
		— 31,37			— 6,11		739,13	181,57
(27)	.. 385,25		— 54,75	.. 87,73		+ 2,71		
		— 23,38			+ 8,82		793,88	184,28
(26)	.. 408,63		— 30,74	.. 96,55		— 13,62		
		— 7,36			— 22,44		824,62	170,66
(25)	.. 415,99		+ 2,93	.. 74,11		— 33,49		
		+ 10,29			— 11,05		821,69	137,17
(24)	.. 405,70		+ 17,83	.. 63,06		— 47,94		
		+ 7,54			— 36,89		803,86	89,23
(23)	.. 398,16		— 61,67	.. 26,17		— 4,51		
		— 69,21			+ 32,38		865,53	84,72
(10)	.. 467,37		— 44,66	.. 58,55		+303,44		
		+ 24,55			+271,06		910,19	388,16
(17)	.. 442,82		+ 75,81	.. 329,61		+285,00		
		(+ 51,26)			(+ 13,94)			
(18)	.. 391,56			.. 343,55				
	Summen	+300,39	+508,35	Summen	+337,90	+616,20		
		—300,39	—508,35		—337,90	—616,20		

Berechnung I. (Formel (7)).

$y_{n+1} - y_{n-1}$	x_n	Produkt $x_n(y_{n+1} - y_{n-1})$ +	Produkt $x_n(y_{n+1} - y_{n-1})$ −
	+	+	−
+ 100,99	343,55	34 695,1	
+ 111,45	338,26	37 699,1	
+ 149,69	337,44	50 511,4	
+ 49,65	297,30	14 760,9	
− 30,99	184,68		5 723,2
− 38,84	82,14		3 190,3
− 130,75	83,03		10 856,2
− 115,95	93,84		10 880,7
− 54,75	87,73		4 803,2
− 30,74	96,55		2 967,9
+ 2,93	74,11	217,1	
+ 17,83	63,06	1 124,4	
− 61,67	26,17		1 613,9
− 44,66	58,55		2 614,8
+ 75,81	329,61	24 987,7	
		+ 163 995,7	− 42 650,2
		$2F = +121\,345,5$	

Berechnung II. (Formel (8)).

$x_{n+1} - x_{n-1}$	y_n	Produkt $y_n(x_{n+1} - x_{n-1})$ +	Produkt $y_n(x_{n+1} - x_{n-1})$ −
	−	+	−
− 8,65	391,56		3 387,0
− 6,11	341,83	2 088,6	
− 40,96	280,11	11 473,3	
− 152,76	192,14	29 351,3	
− 215,16	230,46	49 585,8	
− 101,65	223,13	22 681,2	
+ 11,70	269,30		3 150,8
+ 4,70	353,88		1 663,2
+ 2,71	385,25		1 044,0
− 13,62	408,63	5 565,5	
− 33,49	415,99	13 931,5	
− 47,94	405,70	19 449,3	
− 4,51	398,16	1 795,7	
+ 303,44	467,37		141 818,8
+ 285,00	442,82		126 203,7
		+ 155 922,2	− 277 267,5
		$2F = -121\,345,3$	

Berechnung III. (Formel (9)).

Δy	$x_n + x_{n+1}$	Produkt $\Delta y(x_n + x_{n+1})$ +	Produkt $\Delta y(x_n + x_{n+1})$ −
	+	+	−
+ 51,26	673,16	34 506,2	
+ 49,73	681,81	33 906,3	
+ 61,72	675,70	41 704,2	
+ 87,97	634,74	55 838,1	
− 38,32	481,98		18 469,5
+ 7,33	266,82	1 955,8	
− 46,17	165,17		7 625,9
− 84,58	176,87		14 959,7
− 31,37	181,57		5 695,9
− 23,38	184,28		4 308,5
− 7,36	170,66		1 256,1
+ 10,29	137,17	1 411,5	
+ 7,54	89,23	672,8	
− 69,21	84,72		5 863,5
+ 24,55	388,16	9 529,3	
		+ 179 524,2	− 58 179,1
		$2F = +121\,345,1$	

Berechnung IV. (Formel (6)).

Δx	$y_n + y_{n+1}$	Produkt $\Delta x(y_n + y_{n+1})$ +	Produkt $\Delta x(y_n + y_{n+1})$ −
	−	+	−
+ 13,94	834,38		11 631,3
− 5,29	733,39	3 879,6	
− 0,82	621,94	510,0	
− 40,14	472,25	18 956,1	
− 112,62	422,60	47 593,2	
− 102,54	453,59	46 511,1	
+ 0,89	492,43		438,3
+ 10,81	623,18		6 736,6
− 6,11	739,13	4 516,1	
+ 8,82	793,88		7 002,0
− 22,44	824,62	18 504,5	
− 11,05	821,69	9 079,7	
− 36,89	803,86	29 654,4	
+ 32,38	865,53		28 025,9
+ 271,06	910,19		246 716,1
		+ 179 204,7	− 300 550,2
		$2F = -121\,345,5$	

Wir haben also nun in Übereinstimmung aus allen vier Formeln, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen + oder —, welches hier keine Bedeutung hat:

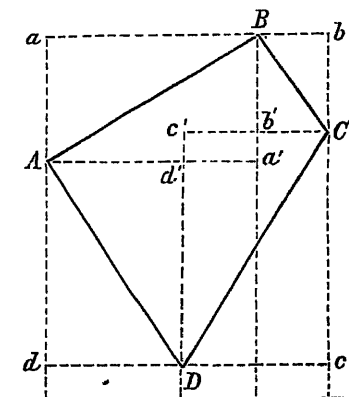
$$2F = 121345{,}4^{qm} \qquad F = 60673^{qm} \qquad \text{oder} \qquad F = 6^{ha}\, 6^{a}\, 73^{qm}$$

Nach allen *vier* Formeln wird man natürlich im allgemeinen nicht rechnen, das geschah in unserem Falle nur zur Vergleichung.

Die Doppelrechnung nach *zwei* verschiedenen Formeln bietet eine sehr gute Bürgschaft für die Richtigkeit des übereinstimmend erhaltenen Resultats, sie hat jedoch gegenüber zwei unabhängig geführten Rechnungen nach nur *einer* Formel den Nachteil, dass man im Falle der Nichtübereinstimmung der Resultate nicht sofort sieht, wo die Rechnungen auseinandergehen.

Die bei solchen Flächenrechnungen vorkommenden sehr mühsamen Zahlenrechnungen können teilweise ersetzt werden durch die Anwendung einer Produktentafel. (*Crelle*, Rechentafeln, Berlin 1880, enthält alle Produkte von je zwei 1-, 2- und 3-ziffrigen Zahlen.) Das beste Mittel ist aber die Rechenmaschine, welche wir in § 32. behandeln werden.

Anmerkung.

Fig. 6.
Geometrische Deutung der Coordinaten-Flächen-Formel des Vierecks.

Für ein *Viereck* gestaltet sich die Inhaltsformel besonders einfach, es wird nämlich:

$$2V = x_1(y_2 - y_4) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_4 - y_2) + x_4(y_1 - y_3)$$

$$2V = (x_1 - x_3)(y_2 - y_4) - (x_2 - x_4)(y_1 - y_3) \qquad (10)$$

Diese Formel lässt sich unmittelbar geometrisch deuten, sie entspricht in Fig. 6. der Differenz zweier Rechtecke:

$$a\,b\,c\,d - a'\,b'\,c'\,d'$$

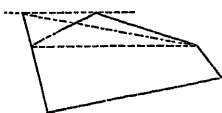
Indem man das grosse Rechteck $a\ b\ c\ d$ wieder in 4 Rechtecke mit den Diagonalen $AB\ \ BC\ \ CD\ \ DA$ zerlegt denkt, findet man:

$$2V = 2\,ABCD = a\,b\,c\,d - a'\,b'\,c'\,d'.$$

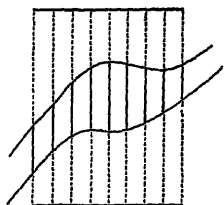
§ 18. Flächenberechnung nach einem Plan.

Misst man die Grundlinie und die Höhe eines auf einem Plan gezeichneten Dreiecks, so kann man daraus den Inhalt des Dreiecks berechnen.

Da jedes Vieleck durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt werden kann, so hat man damit auch die Möglichkeit, jede Vielecksfläche zu bestimmen. Dieses Verfahren ist sehr sicher, aber etwas mühsam.

Fig. 1.
Flächen-Verwandlung durch Parallel-Abschieben.

Rascher geht das *Verwandeln* eines Vielecks in ein Dreieck durch die in Fig. 1. angedeutete Methode des wiederholten Parallel-Abschiebens. Dieses Verfahren leistet bei gewisser Übung, wobei die verschiedenen Hilfslinien nicht ausgezogen werden, gute Dienste. (Ein Hilfsinstrument für das Parallel-Abschieben, welches in Baden im Gebrauch ist, findet sich in der „Zeitschrift für Vermessungswesen 1874“, S. 83—85 von Dr. *Doll* beschrieben.)

Ein Näherungsverfahren zur Flächen-Bestimmung, namentlich für unregelmässige Figuren ist in Fig. 2. angedeutet. Man legt ein Netz von Parallelen (Pauspapier, Fadennetz u. s. w.), deren Abstand eine runde Zahl, etwa 2^{mm} ist, auf die zu bestimmende Fläche, und ermittelt die Summe der „verglichen" gemessenen Längen der entstehenden Streifen durch Abgreifen und mechanisches Addieren mit dem Zirkel, so dass man durch Multiplikation dieser Summe mit dem Abstand der Parallelen die Fläche bekommt.

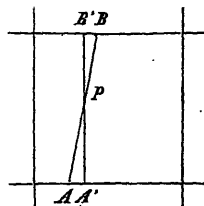
Fig. 2.
Zerlegen in Parallel-Streifen.

Änderung des Papiers.

Das Zeichenpapier ändert seine Grösse bei verschiedenen Feuchtigkeitsverhältnissen.

Namentlich gedruckte Pläne und Karten haben beim Gebrauch fast nie die Dimensionen der ursprünglichen Zeichnung. Auch sind die Änderungen nach verschiedenen Richtungen durchaus nicht immer gleich.

Ungleiches Eingehen ist die Regel bei feucht gedruckten lithographierten Karten, welche in der einen Richtung gewöhnlich $1\,\%$, in der andern $1{,}5\,\%$ Eingang zeigen. Dieser Unterschied rührt her von dem Durchziehen unter der Walzenpresse.

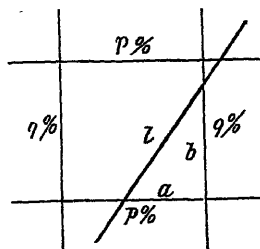
Wir betrachten zuerst die Papier-Änderung nur nach *einer* Richtung, z. B. nach der einen Richtung eines Quadrat-Netzes, wie in Fig. 3. angedeutet ist. Hier sei $A'\,B'$ eine unrichtige verkürzte Seite und $A\,B$ die ursprüngliche richtige Länge, welche schief angelegt ist, um Proportional-Abmessung des Stückes $A'\,P$ oder $B'\,P$ mit Hilfe eines hölzernen Anlege-Massstabes anzudeuten.

Fig. 3.
Proportional-Abmessung.

(In dieser Weise pflegte Verfasser Coordinaten aus den lithographierten Württembergischen Flurkarten abzumessen.)

Will man nicht bloss graphisch, sondern rechnerisch verfahren, so bestimmt man z. B. den Eingang nach jeder Richtung in $\%$ und schlägt für jede Abmessung die betreffenden Prozente zu.

Berechnung der Änderung nach einer schiefen Richtung.

Ein Quadrat (Fig. 4.) hat nach der horizontalen Richtung $p\,\%$ und nach der vertikalen Richtung $q\,\%$ Eingang, um wie viele Prozent $p'\,\%$ ist die schiefe Linie l eingegangen, welche die Katheten a und b abschneidet?

Fig. 4.
Änderung der schiefen Länge l.

Es seien $a\;b\;l$ die ursprünglichen (richtigen) Masse, und bzw. $a'\;b'\;l'$ die durch den Karteneingang veränderten Masse, dann bestehen die Gleichungen:

$$l = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad l' = \sqrt{a'^2 + b'^2}$$

Der Annahme zufolge ist:

$$a' = a\left(1 - \frac{p}{100}\right) \quad , \quad b' = b\left(1 - \frac{q}{100}\right) \quad , \quad l' = l\left(1 - \frac{p'}{100}\right) \qquad (1)$$

Es ist hinreichend genähert:

$$a'^2 = a^2\left(1 - \frac{2\,p}{100}\right) \qquad b'^2 = b^2\left(1 - \frac{2\,q}{100}\right)$$

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2 - \frac{2}{100}(a^2 p + b^2 q) = (a^2 + b^2)\left(1 - \frac{2}{100}\,\frac{a^2 p + b^2 q}{a^2 + b^2}\right)$$

$$l' = l\left(1 - \frac{1}{100}\,\frac{a^2 p + b^2 q}{a^2 + b^2}\right) \tag{2}$$

Die Vergleichung von l' nach (1) und (2) giebt den gesuchten prozentischen Eingang p' nach der schiefen Richtung von l:

$$p' = \frac{a^2 p + b^2 q}{a^2 + b^2} \tag{3}$$

Die Katheten a und b müssen nur als Verhältniszahlen, und nicht sehr genau, bekannt sein.

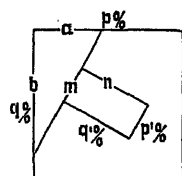
Die Formel (3) sagt in Worten: p' ist ein arithmetisches Mittel aus p und q, wobei diesen Werten die Gewichte a^2 und b^2 beigelegt werden.

Beispiel. Ein Quadrat eines Coordinatennetzes hatte ursprünglich die Seite 100^m. Nach einiger Zeit ergiebt sich, dass die horizontale Seite auf $99{,}3^m$ und die vertikale auf $99{,}8^m$ eingegangen ist, also $p = 0{,}7$, $q = 0{,}2$. Der prozentische Eingang einer Linie, welche die Stücke 3 und 5 von den Seiten abschneidet, ergiebt sich:

$$p' = \frac{9 \times 0{,}7 + 25 \times 0{,}2}{9 + 25} = 0{,}33$$

Diese Bestimmung des Eingangs nach anderen Richtungen als nach den Blatträndern oder nach den Coordinaten-Netzlinien ist nur dann nötig, wenn es sich um Flächen-Ermittlungen mit *einer* aus dem Plan abgenommenen Dimension handelt, wobei die andere Dimension etwa unmittelbar im Felde gemessen sein kann (vgl. Fig. 2. § 19. S. 51).

Bei Flächenbestimmungen aus *zwei rechtwinklig* zu einander stehenden Karten-Massen kommen immer nur die Eingänge der Ränder p und q in Betracht, wie folgende Betrachtung zeigt:

Fig. 5.
Reduktion der Fläche $m\,n$.

In Fig. 5. werde ein Rechteck $m \times n$ berechnet, wobei m den schiefen Eingang ebenso wie in Fig. 4. habe, also nach (3):

$$p' = \frac{a^2 p + b^2 q}{a^2 + b^2}$$

Für die hiezu rechtwinklige Richtung n hat man entsprechend:

$$q' = \frac{b^2 p + a^2 q}{a^2 + b^2}$$

also: $$p' + q' = \frac{(a^2 + b^2)\,p + (b^2 + a^2)\,q}{a^2 + b^2} = p + q \tag{4}$$

Statt $m\,n$ hat man also zu rechnen:

$$m\,n\left(1 + \frac{p'}{100}\right)\left(1 + \frac{q'}{100}\right) = m\,n\left(1 + \frac{p' + q'}{100}\right)$$

also wegen (4): $$= m\,n\left(1 + \frac{p + q}{100}\right)$$

Eine Flächenberechnung nach dem Plan bekommt also unter allen Umständen den Prozentsatz $p + q$ als Zuschlag, mag die Berechnung nach den Hauptrichtungen mit den Eingängen p und q selbst, oder nach irgend welchen anderen Richtungen, oder auch mit dem Planimeter gemacht sein.

§ 19. Genauigkeit der Flächenbestimmung.

Wenn ein Rechteck aus zwei Seiten a und b berechnet wird, so ist die Fläche:

$$F = a \times b \tag{1}$$

Wenn die Seiten a und b die Fehler $\pm \Delta a$ und $\pm \Delta b$ haben, so wird auch die Fläche F einen Fehler $\pm \Delta F$ erhalten, und zwar ist:

$$F \pm \Delta F = (a \pm \Delta a) \times (b \pm \Delta b)$$
$$= a\,b \pm a\,\Delta b \pm b\,\Delta a \pm \Delta a\,\Delta b$$

Vergleicht man dieses mit (1), und vernachlässigt dabei den kleinen Wert $\Delta a\,\Delta b$, so wird:

$$\pm \Delta F = \pm a\,\Delta b \pm b\,\Delta a \tag{2}$$

Die geometrische Bedeutung dieser Gleichung (2) ist durch Fig. 1. veranschaulicht.

Fig. 1.
Fehler einer Rechtecksfläche.

Wenn etwa $\Delta a = \Delta b$ ist, dagegen a erheblich grösser als b, so ist auch der Fehlerteil $a\,\Delta b$ viel grösser als $b\,\Delta a$.

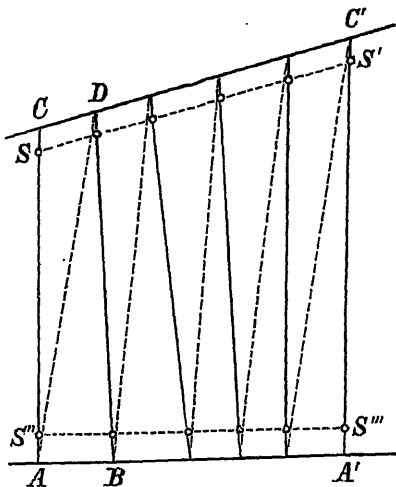
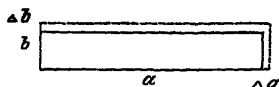
Daraus erklärt sich die jedem Landmesser geläufige Regel, dass man bei langgestreckten Grundstücken die *kurzen* Seiten verhältnismässig viel genauer messen soll, als die langen Seiten.

Daraus erklärt sich auch das durch Fig. 2. angedeutete Verfahren, dass man bei den lang gestreckten Eigentumsstücken, welche der Feldbearbeitung wegen die gewöhnlichen sind, die *Breiten* AB, CD u. s. w. unmittelbar im Felde auf 1^{cm} genau misst, die Längen AC, BD u. s. w. aber nur aus dem Plan, vielleicht auf $0{,}1^{m}$ genau abnimmt.

Fig. 2.
Langgestreckte Grundstücke.

Wir kehren nach diesem zu unserer theoretischen Fehlerformel (2) zurück, und machen jetzt die Annahme, dass Δa und Δb nicht bestimmte Fehler, sondern von jetzt ab *mittlere* Fehler vorstellen sollen, so wird der *mittlere* Fehler ΔF:

$$\Delta F = \sqrt{(a\,\Delta b)^2 + (b\,\Delta a)^2} \tag{3}$$

Um weitere Schlüsse hieraus zu ziehen, muss man Annahmen machen in Bezug auf die Fehler Δa und Δb. Wir werden im folgenden drei solche Annahmen weiter verfolgen:

I. $\Delta a = \Delta b = c$ (4)
oder die Längenfehler sind konstant, von den Längen selbst unabhängig, was etwa beim Abstechen aus Plänen stattfindet.

II. $\Delta a = C a \quad , \quad \Delta b = C b$ (5)
oder die Längenfehler sind den Längen selbst proportional.

III. $\Delta a = k\sqrt{a} \quad , \quad \Delta b = k\sqrt{b}$ (6)
oder die Längenfehler sind den Quadratwurzeln der Längen proportional, was bei unregelmässigen Fehlerursachen zutrifft.

Diese 3 Fälle einzeln weiter behandelnd, haben wir durch Einsetzen von (4) in (3):

$$\Delta F_I = c\sqrt{a^2+b^2} \tag{7}$$

Der Flächenfehler ist proportional der Diagonale des Rechtecks.

Wir wollen nun statt der beiden Seiten a und b, die Fläche F und das Seitenverhältnis $a:b$ einführen, d. h. wir setzen:

$$a b = F \qquad \text{und} \qquad \frac{a}{b} = n \tag{8}$$

Dadurch werden b und a in F und n ausgedrückt:

$$b = \sqrt{\frac{F}{n}} \qquad a = \sqrt{F n} \tag{9}$$

Damit wird (7):

$$\Delta F_I = c\sqrt{F}\sqrt{\frac{n^2+1}{n}} \tag{10}$$

$$\begin{array}{ll} n = 1 \text{ giebt} & n = 10 \text{ oder } = 0{,}1 \text{ giebt} \\ \Delta F_I = c\sqrt{F}\,\sqrt{2} & \Delta F_I = c\sqrt{F}\,\sqrt{10{,}1} \\ = 1{,}414\, c\sqrt{F} & = 3{,}178\, c\sqrt{F} \end{array} \tag{11}$$

Abgesehen von n haben wir hieraus den Satz, dass beim unmittelbaren Abmessen aus einem Plan der Flächenfehler ΔF proportional der Quadratwurzel der Fläche F ist. Wir machen die Annahme:

$$\text{Abmessfehler:} \quad c = \pm 0{,}1^{mm} \tag{12}$$

und berechnen darnach zur Übersicht folgende Tabelle:

Flächenfehler eines Rechtecks für unmittelbares Abmessen vom Plan (13)

Gemessene Fläche F	$\sqrt{F}$	Seiten-Verhältnis $\frac{a}{b} = n$: $n = 1$	$n = 2$	$n = 5$	$n = 10$
qcm	cm	qcm	qcm	qcm	qcm
1	1	$\Delta F = 0{,}01$	$\Delta F = 0{,}02$	$\Delta F = 0{,}02$	$\Delta F = 0{,}03$
25	5	0,07	0,08	0,11	0,16
100	10	0,14	0,16	0,23	0,32
225	15	0,21	0,24	0,34	0,46
400	20	0,28	0,32	0,46	0,64
900	30	0,42	0,47	0,68	0,95

Der zweite oben bei (5) betrachtete Fall, $\Delta a = C a$, $\Delta b = C b$ giebt durch Einsetzen in (3):

$$\Delta F = C\sqrt{(a b)^2 + (a b)^2} = C\sqrt{2}\,F \tag{14}$$

In diesem Falle ist also der Flächenfehler proportional der Fläche F selbst, und vom Seitenverhältnis n unabhängig.

Endlich der dritte Fall giebt durch Einsetzen von (6) in (3):

$$\varDelta F_{III} = k\sqrt{a^2 b + b^2 a} = k\sqrt{a\,b\,(a+b)}$$

Wenn man wieder nach (9) verfährt, so wird:

$$\varDelta F_{III} = k\sqrt[4]{F^3}\sqrt[4]{\frac{1}{n}}\sqrt{1+n} \quad \text{oder} \quad = k\sqrt[4]{F^3}\sqrt[4]{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}} \qquad (15)$$

Je nachdem n gewählt wird, hat man es mit einem mehr oder weniger gestreckten Rechteck zu thun.

$$n = 1 \text{ giebt:} \qquad\qquad n = 10 \text{ oder } n = 0{,}1 \text{ giebt}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \varDelta F_{III} = k\sqrt[4]{F^3}\sqrt{2} & \varDelta F_{III} = k\sqrt[4]{F^3}\sqrt[4]{12{,}1} \\ \quad = 1{,}414\,k\sqrt[4]{F^3} & \quad = 1{,}865\,k\sqrt[4]{F^3} \end{array}\right\} \qquad (16)$$

Den mittleren unregelmässigen Fehler der Latten- oder Band-Messung nehmen wir nach (8) § 11. S. 26. um zugleich kleine einseitige Fehlerteile mit zu berücksichtigen, $= 0{,}005^m$ pro 1^m, d. h.:

$$\varDelta a = 0{,}005\sqrt{a} \quad \text{oder} \quad k = 0{,}005^m \qquad (17)$$

Setzt man dieses in (16), so wird:

$$\text{für } n = 1 \qquad\qquad \text{für } n = 10$$

$$\varDelta F_{III} = 0{,}00707\sqrt[4]{F^3} \qquad \varDelta F_{III} = 0{,}00932\sqrt[4]{F^3} \qquad (18)$$

Hiernach ist folgendes berechnet:

Theoretischer Flächen-Fehler für Feldmessung. (19)

Fläche F		Quadrat	Rechteck 1×10
	qm	qm	qm
1 Q.-Meter =	1	$\varDelta F = 0{,}01$	$\varDelta F = 0{,}01$
10 „ =	10	0,04	0,05
1 Ar =	100	0,2	0,3
10 „ =	1000	1,3	1,7
1 Hektar =	10000	7,1	9,3
10 „ =	100000	39,8	52,4

Dieses sind rein theoretische Fehlerwerte; in der Praxis werden die Fehler immer grösser sein, weil ausser den von uns betrachteten Längenfehlern $\varDelta a$ und $\varDelta b$ immer noch andere Fehlerquellen vorhanden sind.

Für die Praxis kann unsere theoretische Betrachtung nicht viel mehr bieten, als die *Form* der Fehlerfunktion, welche jedenfalls nicht nach (14) gewählt werden darf; oder es sind die früher in manchen amtlichen Vermessungsvorschriften gegebenen Flächenfehler-Bestimmungen nach *Prozenten* (z. B. $^1/_2\,^0/_0$ Grenzfehler) jedenfalls zu verwerfen. Für Feldmessungen wird man wohl eine zwischen (10) und (15) vermittelnde Form anzunehmen haben.

Bei der neuen Preussischen Kataster-Vermessung sind für die Flächenberechnung Genauigkeitsbestimmungen getroffen worden, welche auf jahrelangen praktischen Vergleichungen guter Messungsergebnisse und auf vielfachen theoretischen Erwägungen beruhen. Es ist dabei die Form angenommen:

$$a = 0{,}01 \sqrt{60\,F + 0{,}02\,F^2}$$

(Anweisung VIII S. 74 und 175), wo F den Flächeninhalt in Aren, und a die höchstens zulässige Abweichung zweier Flächenberechnungen, ebenfalls in Aren bedeutet *). Aus der hiezu gehörigen Fehlertabelle (Anweisung VIII S. 176—180) bilden wir folgenden Auszug:

Fläche F	Zulässige Abweichung a	Fläche F	Zulässige Abweichung a
1 a	8 qm = 0,08 a	10 ha	2,8 a
2 „	11 „ = 0,11 „	20 „	4,5 „
4 „	16 „ = 0,16 „	40 „	7,5 „
6 „	19 „ = 0,19 „	60 „	10,4 „
8 „	22 „ = 0,22 „	80 „	13,3 „
10 „	25 „ = 0,25 „	100 „	16,1 „
20 a	35 qm = 0,35 a	200 ha	30,3 a
50 „	55 „ = 0,55 „	300 „	44,4 „
100 „ = 1 ha	79 „ = 0,79 „	400 „	58,5 „
200 „ = 2 „	113 „ = 1,13 „	500 „	73,0 „
500 „ = 5 „	187 „ = 1,87 „	600 „	87,0 „
1000 „ = 10 „	283 „ = 2,83 „	700 „	101,1 „

(20)

§ 20. Flächenberechnung von Dreiecken und Vierecken.

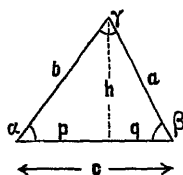
Als Vorbereitung der später folgenden Theorie der Flächenteilung behandeln wir die wichtigsten Flächenberechnungs-Formeln:

1) Gegeben ist die Grundlinie c und die Höhe h eines Dreiecks (Fig. 1.), dann ist die Dreiecksfläche:

$$\triangle = \frac{c\,h}{2} \tag{1}$$

2) Gegeben zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel, $b\;c\;\alpha$ (Fig. 1.), dann ist:

$$\triangle = \frac{1}{2}\,b\,c\,\sin\alpha \tag{2}$$

Fig. 1.

3) Gegeben eine Seite c und die beiden anliegenden Winkel α und β.

Nach (2) ist: $2\triangle = b\,c\,\sin\alpha$

nach dem Sinus-Satz ist:

$$b = \frac{c}{\sin\gamma}\,\sin\beta \quad , \text{ also:}$$

$$2\triangle = \frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

Wenn man $\sin(\alpha+\beta)$ entwickelt, so findet man:

$$2\triangle = \frac{c^2}{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta} \tag{3}$$

Diese Formel findet man auch, mehr geometrisch, durch Zuziehung von Fig. 1., mit Zerlegung $c = p + q$.

---

*) a als mathematisches Zeichen für Abweichung und a als Zeichen für Ar sind nicht zu verwechseln.

4) Wenn alle drei Seiten a, b, c eines Dreiecks gegeben sind, so berechnet man die Fläche $\triangle$ nach der Formel:

$$\left.\begin{aligned} \triangle &= \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)} \\ \text{wo}\qquad s &= \frac{a+b+c}{2} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

5) Man kann die Produktformel (2) auch allgemeiner auffassen. Wenn nach Fig. 2. die Seiten b und c sich schneiden, also die Diagonalen eines Vierecks bilden, so ist, wie leicht einzusehen, die Vierecksfläche V bestimmt durch:

$$2\,V = b\,c\,\sin\alpha \tag{5}$$

Fig. 2.

6) Eine weitere Verallgemeinerung der Produktformel (2) bekommt man durch Betrachtung zweier Seiten b und c, welche sich gar nicht treffen.

Fig. 3. giebt:

$$\begin{aligned} b\,c\,\sin\alpha &= ((b+b')-b')\,((c+c')-c')\,\sin\alpha \\ &= (b+b')\,(c+c')\,\sin\alpha \\ &\quad -(b+b')\,c'\,\sin\alpha \\ &\quad -(c+c')\,b'\,\sin\alpha \\ &\quad +b'\,c'\,\sin\alpha \end{aligned}$$

d. h.: $$\begin{aligned} \frac{1}{2}\,b\,c\,\sin\alpha &= I + II + III + IV + V \\ &\quad -(I + III + V) \\ &\quad -(I + IV + V) \\ &\quad + V \end{aligned}$$

hieraus:

$$b\,c\,\sin\alpha = 2\,(II - I) \tag{6}$$

Fig. 3.

7) Die Fläche V eines Trapezes, dessen Parallelseiten a und b sind, mit dem Abstand h, wird berechnet:

$$2\,V = (a+b)\,h \tag{7}$$

8) Ein beliebiges Viereck $ABCD$, Fig. 4., wird aus drei Seiten c, a, b und den beiden davon eingeschlossenen Winkeln A und B berechnet durch die Formel:

$$2\,V = c\,a\,\sin A + a\,b\,\sin B - c\,b\,\sin(A+B) \tag{8}$$

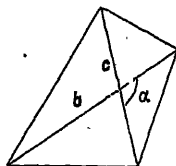
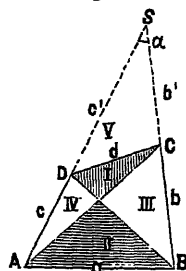
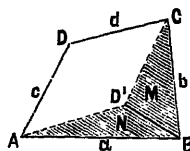
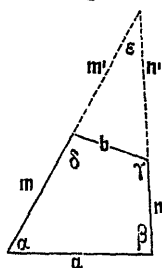
Fig. 4.

Diese Formel kann mit den Hilfslinien von Fig. 3. begründet werden:

$$\begin{aligned} c\,a\,\sin A &= 2\,\triangle\,DAB = 2\,(IV + II) \\ c\,b\,\sin B &= 2\,\triangle\,ABC = 2\,(III + II) \\ -c\,b\,\sin(A+B) &\qquad -2\,(II - I)\quad,\ \text{wegen (6)} \\ \text{Summe} &= 2(IV + III + II + I) = 2\,V \end{aligned}$$

Das letzte Glied in (8), nämlich $c\,b\,\sin(A+B)$, hat ausser der soeben benützten Bedeutung $2\,(II - I)$ nach (6), auch die Bedeutung des doppelten Dreiecks $CBD' = M$, Fig. 4. Wir nennen dieses Dreieck M das Konvergenz-Dreieck für die Seiten c und b, und entsprechend $ABD' = N$ das Konvergenz-Dreieck für die Seiten a und d.

Die Formel (8), angewendet auf das nachfolgende Viereck, Fig. 5. S. 56, lautet:

$$2\,V = a\,m\,\sin\alpha + a\,n\,\sin\beta - m\,n\,\sin(\alpha+\beta) \tag{8a}$$

9) Wenn zwei Gegenseiten a b gegeben sind (Fig. 5.), und alle Winkel α β γ δ (nämlich drei Winkel unabhängig, und der vierte durch die Summe $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$), so kann man das Viereck als Differenz zweier Dreiecke nach (3) auffassen, und hat:

$$2\,V = \frac{a^2}{cotg\,\alpha + cotg\,\beta} - \frac{b^2}{cotg\,(180° - \gamma) + cotg\,(180° - \delta)}$$

$$2\,V = \frac{a^2}{cotg\,\alpha + cotg\,\beta} + \frac{b^2}{cotg\,\gamma + cotg\,\delta} \tag{9}$$

10) Im Anschluss an diese Flächenformeln nehmen wir noch zwei Seitenformeln, zunächst für ein Dreieck, Fig. 1.:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha \tag{10}$$

11) Eine ähnliche Formel kann man auch für das Viereck bilden. Nach Fig. 5. ist:

$$a^2 = (m + m')^2 + (n + n')^2 - 2\,(m + m')\,(n + n')\cos\varepsilon$$
$$b^2 = m'^2 + n'^2 - 2\,m'\,n'\cos\varepsilon$$
$$a^2 - b^2 = m^2 + 2\,m\,m' + n^2 + 2\,n\,n' - 2\,(m\,n + m\,n' + m'\,n)\cos\varepsilon$$
$$a^2 - b^2 = m^2 + n^2 - 2\,m\,n\cos\varepsilon$$
$$+ 2\,m\,(m' - n'\cos\varepsilon) + 2\,n\,(n' - m'\cos\varepsilon)$$

Es ist aber:

$$m' - n'\cos\varepsilon = b\cos(180° - \delta) = -\,b\cos\delta$$
$$n' - m'\cos\varepsilon = b\cos(180° - \gamma) = -\,b\cos\gamma$$

und im ersten Glied: $\varepsilon = \gamma + \delta - 180°$, also:

$$a^2 = b^2 + m^2 + n^2 + 2\,m\,n\cos(\gamma + \delta) - 2\,b\,m\cos\delta - 2\,b\,n\cos\gamma \tag{11}$$

Wendet man dieselbe Formel auf α und β an, so ist:

$$b^2 = a^2 + m^2 + n^2 + 2\,m\,n\cos(\alpha + \beta) - 2\,a\,m\cos\alpha - 2\,a\,n\cos\beta \tag{12}$$

§ 21. Teilung eines Dreiecks.

I. Es ist ein Dreieck ABC Fig. 1. gegeben, und auf einer Dreiecksseite ein Punkt M. Es soll durch M eine Teilungslinie MN gelegt werden, welche den Inhalt $MAN = F$ abschneidet.

Die einfachste Auflösung dieser Aufgabe besteht darin, dass man von M die Höhe ME auf die Seite AN fällt, und dann die Seite $AN = m$ berechnet nach der Bedingung:

$$m\,(ME) = 2\,F \quad , \quad m = \frac{2\,F}{ME} \tag{1}$$

Wenn man nicht unmittelbar im Felde die Höhe ME fällen und messen kann, und wenn dagegen die Seite AM und der Winkel A gegeben sind, so berechnet man:

$$ME = AM\sin A \quad , \text{ also:}$$

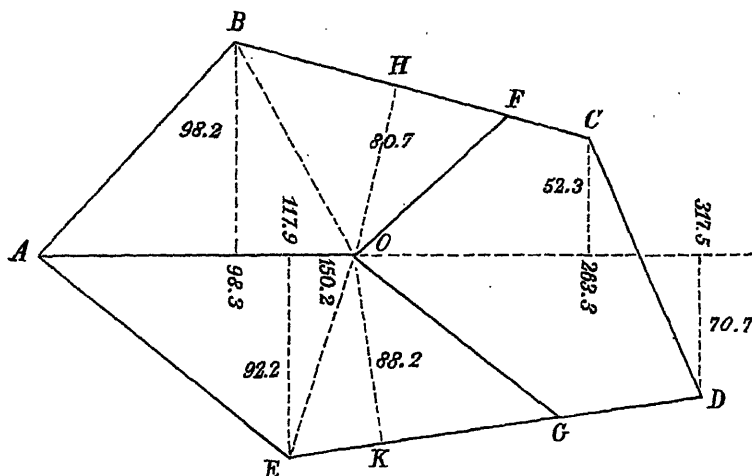
$$m = \frac{2\,F}{AM\sin A} \tag{2}$$

Man kann diese einfache Aufgabe auch dadurch lösen, dass man die Länge der Senkrechten DN berechnet:

$$DN = \frac{2\,F}{AM} \tag{3}$$

Dann steckt man eine Parallele zu AM im Abstand DN, und bestimmt den Punkt N als Schnitt dieser Parallelen mit der Geraden AB.

Eine mehrfache Anwendung dieser einfachen Aufgabe ist in der folgenden Fünfecks-Teilung enthalten:

Fig. 2.
Teilung eines Fünfecks von einem Innenpunkt O aus.

Das in Fig. 2. gezeichnete Fünfeck $ABCDE$ soll in drei gleiche Teile geteilt werden mittelst Linien, die durch den im Innern gegebenen Punkt O gehen; die Richtung der ersten Teillinie sei OA.

OA wird zur Aufnahmslinie genommen, und das Fünfeck wird durch die in Fig. 2. eingeschriebenen Masse aufgenommen.

Wir haben hiebei überall auf $0{,}1^m$ abgerundet, während nach Umständen auch auf $0{,}01^m$ genau zu messen und aufzuschreiben wäre. Für die Veranschaulichung des Teilungs-Verfahrens ist dieses gleichgültig. (Die Zahlen waren ursprünglich badische Fuss.)

Die Gesamtfläche F des Fünfecks findet sich aus den eingeschriebenen Massen:

$$\begin{array}{rl} 98{,}3 \times 98{,}2 = & +\ 9653{,}1 \\ 165{,}0 \times 150{,}5 = & +24832{,}5 \\ -\ 54{,}2 \times 18{,}4 = & \qquad\qquad -\ 997{,}3 \\ 199{,}6 \times 162{,}9 = & +\ 32514{,}8 \\ 117{,}9 \times 92{,}2 = & +\ 10870{,}4 \\ \hline & +\ 77870{,}8 - 997{,}3 \\ & 2F = 76873{,}5 \end{array}$$

$$F = 38436{,}7^{qm} \qquad \frac{F}{3} = 12812{,}2^{qm} \qquad (4)$$

Zur Auffindung der Teillinie OF hat man:

$$OAB = \frac{1}{2}(150{,}2 \times 98{,}2) = 7374{,}8.$$

Vergleicht man dieses mit $\frac{F}{3}$ in (4), so findet man die Differenz $\frac{F}{3} - OAB$ $= 12812{,}2 - 7374{,}8 = 5437{,}4$, also ist der Punkt F auf der Geraden BC nach er früheren Aufgabe von Fig. 1. S. 56, zu bestimmen.

Hiezu wurde $OH = 80{,}7$ auf dem Felde gemessen (genauer berechnet $= 80{,}698$), dieses giebt:

$$BF = \frac{2 \times 5437{,}4}{80{,}7} = 134{,}76$$

womit der Punkt F auf der Geraden BC eingemessen werden kann.

In gleicher Weise hat man auf der anderen Seite:

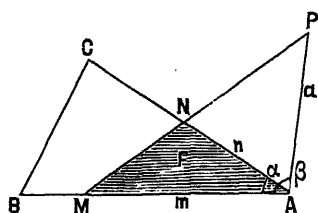
$$OAE = \frac{1}{2}(150{,}2 \times 92{,}2) = 6924{,}2, \quad OEG = \frac{F}{3} - OAE = 5888{,}0.$$

OK wurde auf dem Felde gemessen $= 88{,}2$ (genauer berechnet $= 88{,}21$); dieses giebt:

$$EG = \frac{2 \times 5888{,}0}{88{,}2} = 133{,}51.$$

Damit lässt sich auch der Punkt G abstecken, und die Teilungs-Aufgabe ist damit gelöst.

Man schliesst aber eine solche Teilung nicht ohne durchgreifende Probe ab; und eine solche Probe wird in diesem Falle dadurch erhalten, dass man das übrigbleibende Fünfeck $OFCDG$ nun nochmals unabhängig misst und berechnet, wobei seine Fläche wieder $= \frac{F}{3}$ nach (4) werden muss.

Fig. 3.

II. Von einem Dreieck BAC, Fig. 3., oder was hier dasselbe ist, von einem offenen Winkelraum $BAC = \alpha$, soll eine Fläche F abgeschnitten werden durch eine Teillinie PNM, welche durch einen gegebenen Punkt P geht; und zwar sei P gegeben durch den Winkel $BAP = \beta$, und durch die Entfernung $AP = a$.

Wir setzen die Abschnitte $AN = n$ und $AM = m$, und haben dann zwei Gleichungen:

$$m\,n \sin \alpha = 2F \text{ (Fläche)} \tag{5}$$

$$m\,n \sin \alpha + n\,a \sin(\beta - \alpha) = a\,m \sin \beta \text{ (Gerade } MNP) \tag{6}$$

Bestimmt man n aus (6), und setzt es in (5), so wird:

$$m \sin \alpha \frac{a\,m \sin \beta}{m \sin \alpha + a \sin(\beta - \alpha)} = 2F$$

$$a\,m^2 \sin \alpha \sin \beta = 2\,m\,F \sin \alpha + 2\,a\,F \sin(\beta - \alpha)$$

$$m = \frac{F \sin \alpha \pm \sqrt{F^2 \sin^2 \alpha + 2\,F\,a^2 \sin \alpha \sin \beta \sin(\beta - \alpha)}}{a \sin \alpha \sin \beta}$$

oder:

$$m = \frac{F}{a \sin \beta} \pm \frac{F}{a \sin \beta} \sqrt{1 + 2 \frac{a \sin \beta}{F} \frac{a \sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha}} \tag{7}$$

Das zugehörige n wird nach (5):

$$n = \frac{2F}{m \sin \alpha} \tag{8}$$

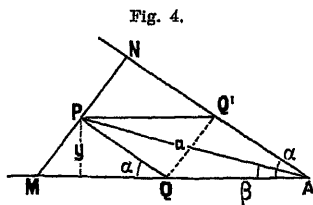
Es ist nicht uninteressant, vom rein algebraischen Standpunkt, die verschiedenen Lösungen zu betrachten, welche diese quadratische Gleichung (7) darbietet.

Lassen wir α und β kleiner als 180° bleiben, so ist die Wurzel immer reell, wenn $\beta - \alpha$ positiv, oder β grösser als α ist, d. h. nach Fig. 3., wenn der Punkt P ausserhalb des Winkelraums α liegt. Man bekommt dann zwei reelle Werte m, von denen aber der eine *negativ* ist, und einem Abschneiden auf der Rückverlängerung von AB entspräche, was keine praktisch brauchbare Lösung giebt.

Wird $\beta = \alpha$, so liegt der Punkt P auf der Geraden AC selbst, und wir haben den früheren einfachen Fall von Fig. 1. S. 56, was sich auch daran zeigt, dass dann (7) mit dem oberen Zeichen in (2) übergeht. Das untere Zeichen giebt mit $\beta = \alpha$ in (7) $m = 0$, was mit $n = \infty$ als unendlich langer und schmaler Streifen zu deuten wäre, und praktisch bedeutungslos ist.

Fig. 4.

Wird β kleiner als α, so liegt der Punkt P im Inneren des Winkelraums α, und dann hat man nochmals zwei Fälle zu unterscheiden, ob nämlich die Wurzel in (7) reell oder imaginär wird; im ersten Fall hat man zwei Werte m, im zweiten Falle keinen. Nach Fig. 4. erklärt sich das geometrisch so:

Das Parallelogramm mit der Diagonale AP hat die Fläche:

$$A\,Q\,P\,Q' = A\,Q \times y = a^2 \sin\beta \, \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin\alpha}$$

Man hat also in (7):

$$\left.\begin{matrix}\text{zwei reelle Werte von } m \\ \text{keinen reellen Wert von } m\end{matrix}\right\} \text{ wenn } F \left\{\begin{matrix}\text{grösser} \\ \text{kleiner}\end{matrix}\right\} \text{ als } 2\,A\,Q\,P\,Q'.$$

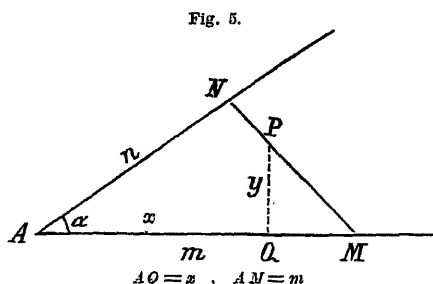
Wird die abzuschneidende Fläche F *gleich* der Fläche des Parallelogramms $A\,Q\,P\,Q'$, so bekommt man *eine* reelle Lösung, wobei die Teilungslinie MN nach Fig. 4. parallel der Diagonale $Q\,Q'$ des Parallelogramms wird.

In der Formel (7) kann man statt α und β die rechtwinkligen Coordinaten x und y des Punktes P einführen; es ist nämlich nach Fig. 4.:

$$a \sin\beta = y \quad , \quad \frac{a}{\sin\alpha} \sin(\alpha - \beta) = A\,Q = x - y \cot g\,\alpha \tag{9}$$

$AQ = x$, $AM = m$

wenn die auf AM gezählte Abscisse des Punktes P mit x bezeichnet wird.

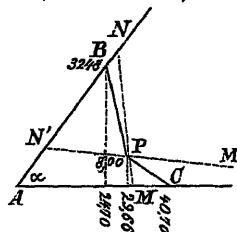
Wir haben hiezu eine besondere Figur, Fig. 5., in welcher AM nach rechts (statt AM nach links in Fig. 3.) gerichtet ist. $A\,Q = x$ ist nach rechts positiv, und $Q\,P = y$ nach oben positiv gezählt. Die Beziehung (9) gilt damit also auch für Fig. 5. und damit geben die Gleichungen (7) und (8):

$$m = \frac{F}{y} \pm \frac{F}{y} \sqrt{1 - 2\,\frac{y}{F}(x - y \cot g\,\alpha)} \tag{10}$$

$$n = \frac{2\,F}{m \sin\alpha} \tag{11}$$

Wir nehmen hiezu ein Zahlen-Beispiel mit Fig. 6 Die gebrochene Grenze BPC soll in eine geradlinige Grenze NM verwandelt werden, jedoch so, dass sie nach wie vor durch den Punkt P geht.

Fig. 6.
Viereck $ABPC = \Delta\,ANM$.
(Massstab 1 : 200.)

Aus den gemessenen, in Fig. 6. eingeschriebenen Massen berechnet man die Fläche $ABPC$, nämlich:

$$\begin{aligned} 24{,}70 \times 32{,}48 &= 802{,}3 \\ 4{,}96 \times 40{,}48 &= 200{,}8 \\ 11{,}04 \times 8{,}00 &= 88{,}3 \\ \hline 2\,F &= 1091{,}4 \\ F &= 545{,}7 \end{aligned}$$

Die Coordinaten von B geben:

$$tang\,\alpha = \frac{32{,}48}{24{,}70} \quad , \quad \alpha = 52^\circ\,45'$$

Die Coordinaten von P sind:

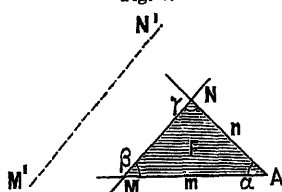
$$x = 29{,}66 \quad \text{und} \quad y = 8{,}00$$

Damit geben die Formeln (9) und (10):

$$m = 68{,}21 \pm 37{,}90 = 106{,}11 \quad \text{oder} \quad 30{,}31$$
$$n = \qquad\qquad 12{,}92 \quad \text{oder} \quad 45{,}24$$

Von den beiden Lösungen, welche beide den Bedingungen der Aufgabe entsprechen, wird man in diesem Fall die zweite auswählen, nämlich:

$$AM = m = 30{,}31 \qquad AN = n = 45{,}24.$$

Fig. 7.

III. Von einem Winkelraum $MAN = \alpha$ (Fig. 7.) soll eine Fläche $MAN = F$ abgeschnitten werden durch eine Teillinie MN, welche einer gegebenen Geraden $M'N'$ parallel werde. Damit sind die Winkel β und γ des Dreiecks MAN bestimmt, und damit auch das Seitenverhältnis:

$$\frac{n}{m} = \frac{sin\,\beta}{sin\,\gamma} \tag{12}$$

Hiezu hat man noch die Flächengleichung:

$$m\,n\,sin\,\alpha = 2\,F \tag{13}$$

Damit hat man zwei Gleichungen, welche sich leicht nach m und n auflösen lassen, nämlich:

$$m = \sqrt{2\,F\frac{sin\,\gamma}{sin\,\alpha\;sin\,\beta}} \qquad n = \sqrt{2\,F\frac{sin\,\beta}{sin\,\alpha\;sin\,\gamma}} \tag{14}$$

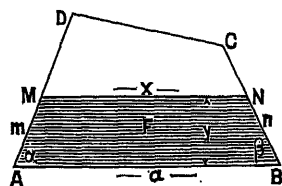
Wegen $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, kann man dieses auch so schreiben:

$$m = \sqrt{2\,F\,(cotg\,\alpha + cotg\,\beta)} \qquad n = \sqrt{2\,F\,(cotg\,\alpha + cotg\,\gamma)} \tag{15}$$

was auch unmittelbar aus (3) § 20. S. 54 folgt.

§ 22. Parallel-Teilung von Vierecken und Polygonen.*)

I. Von dem Viereck $ABDC$ (Fig. 1.) soll ein Stück F abgeschnitten werden durch eine Parallele MN zur Seite AB.

Fig. 1.
Parallel-Teilung MN.

Denkt man sich die Seiten AD und BC bis zu ihrem Schnitt verlängert, so erscheint das Trapez F als Differenz zweier ähnlicher Dreiecke, es ist also nach (3) § 20. S. 54:

$$2\,F = \frac{a^2}{cotg\,\alpha + cotg\,\beta} - \frac{x^2}{cotg\,\alpha + cotg\,\beta}$$

Löst man diese Gleichung nach x auf, so erhält man:

$$x = \sqrt{a^2 - 2\,F\,(cotg\,\alpha + cotg\,\beta)} \tag{1}$$

*) Wir benützen bei dieser und den folgenden Aufgaben dieses Kapitels zum Teil schon die allgemeinen Formeln der Coordinaten- und Azimut-Rechnung, welche wir erst in Kapitel VII, eingehender behandeln werden.

und sodann: $$y = \frac{2F}{a+x} \qquad (2)$$

Die Winkel α und β brauchen nicht in Gradmass angegeben zu sein; häufig kann man $cotg\,\alpha$ und $cotg\,\beta$ unmittelbar bestimmen, wie folgendes Beispiel mit Fig. 2. zeigt:

Das Viereck $ABCD$ soll durch eine Parallele MN zu AB halbiert werden.

Fig. 2.
Parallel-Halbierung MN.

Man nimmt das Viereck durch Coordinaten in Beziehung auf AB als Aufnahmslinie auf, und berechnet die Fläche desselben aus den Aufnahmsmassen, nämlich:

$$\begin{array}{rr} -5{,}10 \times 37{,}10 = & -189{,}2 \\ 59{,}22 \times 67{,}12 = 3974{,}8 & \\ 26{,}08 \times 30{,}02 = 782{,}9 & \\ \hline +4757{,}7 & -189{,}2 \\ 2V \quad 4568{,}5 & \end{array}$$

Fläche des Vierecks $V = 2284{,}3$

Wenn das Viereck halbiert werden soll, so ist das von unten abzuschneidende Flächenstück F gleich der halben Vierecksfläche, also $2F = V = 2284{,}3$

$$cotg\,\alpha = \frac{-5{,}10}{37{,}10} = -0{,}1375 \qquad cotg\,\beta = \frac{26{,}08}{30{,}02} = +0{,}8688 \qquad (3)$$

$$cotg\,\alpha + cotg\,\beta = +0{,}7313$$

$$x = \sqrt{80{,}20^2 - 2284{,}3 \times 0{,}7313} = 69{,}00$$

$$y = \frac{2284{,}3}{80{,}20 + 69{,}00} = 15{,}31$$

Damit lässt sich die Parallele MN abstecken, worauf man die Probe hat, dass ihre Länge $MN = x = 69{,}00$ sich ergeben muss.

Zur weiteren durchgreifenden Flächenprobe kann man die Fläche des Rest-Vierecks $MNCB$ nochmals unabhängig aufnehmen, etwa durch eine Diagonale BN mit ihren zwei Senkrechten, wobei diese Restfläche auf wenige Quadratmeter genau wieder $= F = 1142^{qm}$ werden muss.

Statt, wie hier zunächst angenommen wurde, die Parallele MN unmittelbar mit Hilfe ihres Abstandes $y = 15{,}31^m$ abzustecken, und die Punkte M und N als Schnitte dieser Parallelen mit den Seiten AD und BC (Fig. 2.) im Felde aufzusuchen, kann man natürlich auch die schiefen Entfernungen AM und BN berechnen:

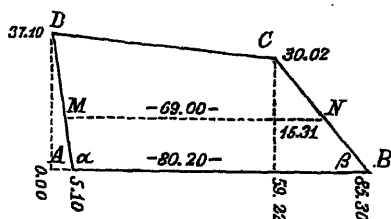
$$AM = \frac{y}{\sin\alpha} \qquad BN = \frac{y}{\sin\beta}$$

wo α und β nach (3) durch ihre Cotangenten gegeben sind. Man findet:

$$\alpha = 97^\circ\,50' \qquad \beta = 49^\circ\,1'$$

$$AM = 15{,}45^m \qquad BN = 20{,}28^m$$

womit die Punkte M und N in aller Bequemlichkeit und Schärfe abgesteckt werden können.

Diese Aufgabe giebt Gelegenheit zur Mitteilung eines kleinen Beitrags zur Flächengenauigkeits-Bestimmung. Wir haben diese Aufgabe sehr oft als Übungs-Aufgabe mit Studierenden behandelt, und aus den vorhandenen Messungsbüchern folgende Zahlen zusammengestellt: Es bedeutet dabei V die Fläche des ganzen Vierecks, x die berechnete Länge, x' die gemessene Länge der Parallelen, $\frac{V}{2} = F$ das halbe Viereck nach der Teilungs-Berechnung, und R die unmittelbare Kontroll-Messung des Rest-Vierecks $MNCD$ (Fig. 2.):

Zeit	V	x	x'	Δx	$\frac{V'}{2} = F$	R	ΔR
	qm	m	m	m	qm	qm	qm
1878	1468,1	42,66	42,70	+ 0,04	734,0	738,5	+ 4,5
„	1677,5	50,31	50,36	+ 0,05	838,7	837,7	— 1,0
1879	2019,9	58,21	58,21	0,00	1010,0	1011,9	+ 1,9
„	1709,9	48,60	48,57	— 0,03	854,9	853,7	— 1,2
1880	1409,9	42,50	42,60	+ 0,10	705,0	709,4	+ 4,4
1881	2090,8	62,53	62,59	+ 0,06	1045,4	1055,6	+10,2
„	1600,5	50,67	50,67	0,00	800,2	802,9	+ 2,7
1883	1423,4	48,76	48,75	— 0,01	711,7	711,7	0,0
1884	2231,6	55,35	55,40	+ 0,05	1115,8	1118,1	+ 2,3
1885	2018,6	59,46	59,47	+ 0,01	1009,3	1010,9	+ 1,6
„	2236,7	59,72	59,82	+ 0,10	1118,4	1122,9	+ 4,5
1886	1901,6	55,09	55,12	+ 0,03	950,8	950,6	— 0,2
Summe (12)	21788,5	633,86	634,26	+ 0,44	10894,2	10923,9	+32,1
				— 0,04			— 2,4
Mittel	1815,7	52,84	52,88	± 0,04	907,85	910,32	± 2,88 (4)

(vgl. hiezu (19) und (20) § 20. S. 53—54.)

Man kann die Formel (1), welche wir oben unmittelbar geometrisch begründet haben, auch aus der allgemeinen Viereeksformel (8a) § 20. S. 55 herleiten, was noch zu einer Nebenbemerkung Veranlassung geben wird. Jene Formel (8a) § 20. S. 55 lautet nämlich, auf Fig. 1. angewendet:

$$2\,F = a\,m\,\sin\alpha + a\,n\,\sin\beta - m\,n\,\sin(\alpha+\beta) \tag{5}$$

oder:

$$2\,F = a\,m\,\sin\alpha + a\,n\,\sin\beta - m\,n\,\sin\alpha\cos\beta - m\,n\cos\alpha\sin\beta$$

Wenn MN parallel AB ist, so ist $m\sin\alpha = n\sin\beta = y$, also:

$$2\,F = a\,y + a\,y - y^2\,\mathrm{cotg}\,\beta - y^2\,\mathrm{cotg}\,\alpha$$

Löst man diese Gleichung nach y auf, so erhält man:

$$y = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 2\,F\,(\mathrm{cotg}\,\alpha + \mathrm{cotg}\,\beta)}}{\mathrm{cotg}\,\alpha + \mathrm{cotg}\,\beta} \tag{6}$$

Die Wurzel ist dieselbe wie in (1), also:

$$y = \frac{a - x}{\mathrm{cotg}\,\alpha + \mathrm{cotg}\,\beta} \tag{7}$$

Dabei ist zugleich von den zwei Zeichen $\pm$ das untere genommen, weil nur dieses unserem praktischen Fall entspricht (das obere Zeichen würde eine Teillinie im Scheitelwinkel von $\alpha + \beta$ geben).

Die Formel (7) für y könnte etwa als Kontrolle neben (2), oder als Ersatz von (2), gelten, aber nur dann, wenn $\alpha + \beta$ genügend weit von 180° entfernt ist, d. h. wenn die Geraden AD und BC (Fig. 1.) nicht nahe parallel sind. Ist dieses der Fall, so wird y nach (7) unbestimmt, während die Formel (2) immer eine gute Bestimmung giebt.

Aber auch ganz allgemein, wenn AD und BC (Fig. 1.) *nicht* nahezu parallel sind, ist es praktisch viel richtiger, das wichtige Mass y in letzter Bestimmung nicht auf die Nebenbedingung der Parallelität zwischen MN und AB nach (7) zu gründen, sondern auf die Hauptbedingung der richtigen *Flächen*-Abteilung vermöge (2).

II. *Vierecks-Teilung parallel einer beliebigen Geraden $M'N'$.*

In Fig. 3. S. 63 soll die Fläche $ABNM = F$ werden, wobei die Teilungslinie MN parallel $M'N'$ sei.

Fig. 3.
Teilungslinie MN parallel $M'N'$

Man kann diesen Fall auf den vorhergehenden Fall von Fig. 1. zurückführen, indem man durch A die Parallele AB' zu $M'N'$ legt, das Dreieck ABB' berechnet und dann die Teilung auf $AB'NM$ bezieht.

Bei kleinen Verhältnissen könnte man etwa geradezu im Felde die Parallele AB' stecken.

In der reinen Berechnung hat man folgendes:

Gegeben $AB=a$, Winkel bei $A=\alpha$, Winkel bei $B=\beta$. Die Parallelen-Richtung sei durch den Winkel φ gegeben, dann ist auch bekannt:

$$\text{Winkel } \alpha - \varphi \text{ bei } A \quad \text{und} \quad \text{Winkel } \psi = \beta + \varphi$$

$$AB' = a' = \frac{a}{\sin\psi}\sin\beta \quad , \quad BB' = \frac{a}{\sin\psi}\sin\varphi \tag{8}$$

$$2\triangle ABB' = a\,a'\sin\varphi \quad \text{oder} \quad = a\,BB'\sin\beta \tag{9}$$

Statt $ABNM=F$ von AB aus abzuschneiden, schneidet man nun $F-\triangle ABB'$ von AB' aus ab, nach den Formeln (1) und (2) S. 60—61.

Statt dieser Zurückführung auf die vorhergehende Aufgabe kann man die Vierecks-Teilung parallel einer beliebigen Geraden auch unmittelbar so behandeln:

In Fig. 4. sei a , α , β gegeben, und es handelt sich um die Teillinie MN, deren Richtung ebenfalls vorgeschrieben ist. Durch diese Richtung sind auch die Winkel γ und δ gegeben, und dann hat man nach (9) § 20. S. 56:

$$2F = \frac{a^2}{\cotg\alpha + \cotg\beta} + \frac{b^2}{\cotg\gamma + \cotg\delta}$$

oder:

$$2F = \frac{a^2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} + \frac{b^2\sin\gamma\sin\delta}{\sin(\gamma+\delta)} = \frac{a^2\sin\alpha\sin\beta - b^2\sin\gamma\sin\delta}{\sin\varphi}$$

das kann man nach b auflösen:

$$b^2 = \frac{-2F\sin\varphi + a^2\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma\sin\delta} \tag{10}$$

Fig. 4.
Teilungslinie MN parallel $M'N'$

Nachdem somit b gefunden ist, kann man die Seiten nach dem Sinus-Satz berechnen:

$$m = \frac{a}{\sin\varphi}\sin\beta - \frac{b}{\sin\varphi}\sin\gamma \tag{11}$$

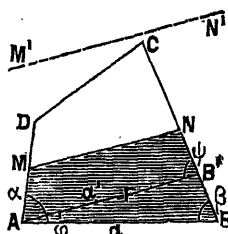
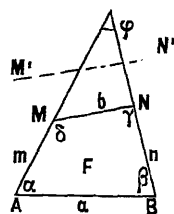
$$n = \frac{a}{\sin\varphi}\sin\alpha - \frac{b}{\sin\varphi}\sin\delta \tag{12}$$

Wenn jedoch der Winkel φ sehr klein ist, so wird die Berechnung von m und n nach diesen Formeln ungenau; in diesem Falle rechnet man besser so:

$$2F = m\,b\sin\delta + m\,a\sin\alpha - a\,b\sin(\alpha+\delta)$$

$$2F = n\,b\sin\gamma + n\,a\sin\beta - a\,b\sin(\beta+\gamma)$$

$$m = \frac{2F + a\,b\sin(\alpha+\delta)}{a\sin\alpha + b\sin\delta} \quad , \quad n = \frac{2F + a\,b\sin(\beta+\gamma)}{a\sin\beta + b\sin\gamma} \tag{13}$$

Ein Zahlen-Beispiel hiezu können wir im Anschluss an Fig. 3. des folgenden § 23. S. 67 dadurch bilden, dass die Teillinien AC und BD so gezogen werden, dass die Konvergenzen der Langseiten in den drei Stücken gleich werden, d. h. dass die Azimut-*Differenzen* der vier Strahlen (4)(1) , AC , BD , (3)(2) einander gleich

werden. Die vier Strahlen schneiden sich also dann *nicht* mehr in *einem* Punkte (n), die Durchführung der Rechnung nach den vorstehenden Formeln giebt:

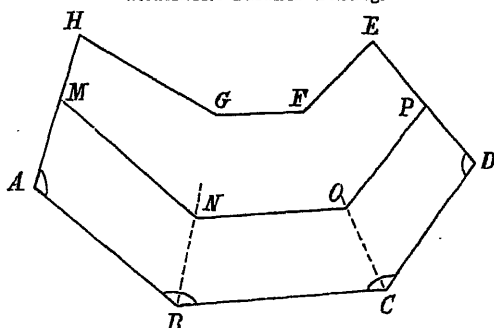
$$\left.\begin{array}{llll} A & m = 24{,}33 & B & m' = 43{,}77 \\ C & n = 36{,}87 & D & n' = 71{,}10 \end{array}\right\} \qquad (13a)$$

Wiederholte Parallel-Teilung.

In Fig. 5. soll der Zwischenzug $MNOP$ so gelegt werden, dass

MN parallel AB , NO parallel BC , OP parallel CD

und dass die Summe der Flächen-Abschnitte nach $ABCD$ hin $= F$ werde.

Fig. 5.
Wiederholte Parallel-Teilung.

Es handelt sich um wiederholte Anwendung der Teilung von Fig. 1. S. 60. Wir setzen daher in Fig. 5.:

$$MN = x_1 \qquad NO = x_2 \qquad OP = x_3$$
$$AB = a_1 \qquad BC = a_2 \qquad CD = a_3$$

Die Winkel seien mit $A\ B\ C\ D$ bezeichnet, und y sei der Parallel-Abstand, dann bestehen die Gleichungen:

$$a_1 = x_1 + y \cot g\, A + y \cot g \frac{B}{2}$$

$$a_2 = x_2 + y \cot g \frac{B}{2} + y \cot g \frac{C}{2}$$

$$a_3 = x_3 + y \cot g \frac{C}{2} + y \cot g\, D$$

$$\text{Summe:} \quad [a] = [x] + y \left(\cot g\, A + 2 \cot g \frac{B}{2} + 2 \cot g \frac{C}{2} + \cot g\, D\right) \qquad (14)$$

$$[a] - [x] = y\, S \qquad (15)$$

wo S die aus der Vergleichung von (14) mit (15) ersichtliche Summe ist.

Ferner hat man für die Flächen:

$$([a] + [x])\, y = 2\, F \qquad (16)$$

Die Gleichungen (15) und (16) geben durch Multiplikation:

$$[a]^2 - [x]^2 = 2\, F\, S$$

$$[x] = \sqrt{[a]^2 - 2\, F\, S} \qquad (17)$$

und nachdem $[x]$ berechnet ist:

$$y = \frac{2\, F}{[a] + [x]} \qquad (18)$$

Wir behandeln hiernach ein Zahlen-Beispiel mit Fig. 6:

Fig. 6.
Wiederholte Parallel-Teilung.
(Massstab 1 : 1500.)

Die Flächenberechnung nach den in Fig. 6. eingeschriebenen Massen giebt:

[AB]	40,93 × 17,05 =	697,9	[FG]	20,73 × 55,23 =	1144,9
[BC]	46,51 × 36,27 =	1686,9	[GH]	26,80 × 39,65 =	1062,6
[CD]	35,90 × 33,55 =	1204,4	[HJ]	31,86 × 36,48 =	1162,3
[DE]	27,03 × 14,33 =	387,3	[JK]	29,80 × 51,71 =	1541,0
[EF]	19,41 × 32,79 =	636,5	[KA]	21,77 × 32,44 =	706,2
		4613,0			5617,0

2 Gesamtfläche = 10 230,0
Gesamtfläche = 5 115,0 qm
Halbierung F = 2 557,5 qm

Auch die Winkel und die Seiten wurden aus den Coordinaten berechnet:

Winkel		Seite		
A =	78° 45′	AB =	44,34	
B =	160° 3′	BC	46,56	157,72 = [a]
C =	169° 34′	CD	36,23	
D =	159° 50′	DE	30,59	
E =	87° 18′	EF	38,10	
F =	94° 6′	FG	23,17	
G =	195° 29′	GH	27,31	114,99
H =	194° 45′	HJ	31,93	
J =	200° 9′	JK	32,58	
K =	100° 1′	KA	39,07	
Summe	1440° 0′			

$$S = cotg\, A + 2\left(cotg \frac{B}{2} + cotg \frac{C}{2} + cotg \frac{D}{2}\right) + cotg\, E$$

$$S = 0{,}1989 + 2\,(0{,}1760 + 0{,}0913 + 0{,}1778) + 0{,}0472 = 1{,}1363$$

Die weitere Rechnung nach (17) und (18) giebt:

$$[x] = 138{,}07 \quad , \quad y = 17{,}29$$

Dieses bezieht sich auf eine Grenze parallel dem nördlichen Zug $ABCDE$.

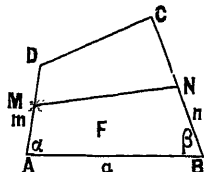
Macht man die entsprechende Berechnung für eine Grenze parallel dem südlichen Zug, so erhält man:

$$[x] = 137{,}92 \qquad y = 20{,}22$$

Wir werden eine andere, ähnlich aussehende, aber bessere, Längsteilung desselben Vierecks in § 24. S. 72—73 behandeln.

§ 23. Vierecks-Teilung durch gegebene Punkte.

I. Von dem Viereck $ABCD$ (Fig. 1.) soll ein Stück $ABNM = F$ abgeschnitten werden durch eine Gerade MN, welche durch einen auf AD gelegenen Punkt M geht.

Fig. 1.
Teilungslinie MN.

Es sind also die zwei Seiten a, m, die zwei Winkel α, β und der Inhalt F gegeben, und man hat nach (8a) § 20. S. 55 die Gleichung:

$$2\,F = a\,m \sin\alpha + a\,n \sin\beta - m\,n \sin(\alpha + \beta)$$

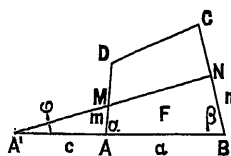
Diese Gleichung kann man nach n auflösen:

$$n = \frac{2\,F - a\,m \sin\alpha}{a \sin\beta - m \sin(\alpha + \beta)} \tag{1}$$

Diese Aufgabe kann in folgender Weise sehr praktisch verwertet werden:

Man habe auf irgend eine Weise, z. B. durch Konstruktion, auf einem Plane eine Teillinie MN gefunden, welche die Flächenteilung *nahezu* liefert, welche ausserdem nach irgend welchen anderen Rücksichten, z. B. mit Richtung nach einem entfernten Punkte oder parallel einer gegebenen Geraden, gelegt wurde.

Da nun solche Nebenbedingungen gewöhnlich nur beiläufig so genau erfüllt werden müssen, als die Planzeichnung zeigt, während die *Flächen*teilung so genau richtig werden soll, als man auf dem Felde messen kann, ist es völlig genügend, den einen Abstand m nach dem Plan anzunehmen, und den anderen dazu gehörigen Abstand n nach der Formel (1) scharf zu berechnen.

Fig. 2.
Teilungslinie $A'MN$.

II. Von dem Viereck $ABCD$ (Fig. 2.) soll ein Stück $ABNM = F$ abgeschnitten werden durch eine Gerade $A'MN$, deren Festpunkt A' auf der Verlängerung von BA liegt.

Nach (3) § 20. S. 54 hat man durch Betrachtung der zwei Dreiecke $A'BN$ und $A'AM$:

$$2\,F = \frac{(a + c)^2}{\operatorname{cotg}\varphi + \operatorname{cotg}\beta} - \frac{c^2}{\operatorname{cotg}\varphi - \operatorname{cotg}\alpha}$$

Diese Gleichung kann nach $\operatorname{cotg}\varphi$ aufgelöst werden:

$$2\,F\,(\operatorname{cotg}^2\varphi + \operatorname{cotg}\varphi\,(\operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\alpha) - \operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\beta)$$
$$= \operatorname{cotg}\varphi\,((a + c)^2 - c^2) - (a + c)^2 \operatorname{cotg}\alpha - c^2 \operatorname{cotg}\beta$$

Dieses ist eine quadratische Gleichung von der Form:

$$A \operatorname{cotg}^2\varphi - B \operatorname{cotg}\varphi + C = 0 \tag{2}$$

wo

$$A = 2\,F \tag{2a}$$
$$B = 2\,F\,(\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}\beta) + (a + c)^2 - c^2 \tag{2b}$$
$$C = -\,2\,F \operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\beta + (a + c)^2 \operatorname{cotg}\alpha + c^2 \operatorname{cotg}\beta \tag{2c}$$

damit ist:

$$\operatorname{cotg}\varphi = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4\,A\,C}}{2\,A} \tag{3}$$

Die Entscheidung über das Doppelzeichen der Wurzel, und über den Quadranten von φ wird praktisch keine Schwierigkeiten machen.

Nachdem der Winkel φ bestimmt ist, kann man auch die Strecken m und n aus den Dreiecken $A'AM$ und $A'BN$ berechnen, nämlich:

$$m = \frac{c \sin \varphi}{\sin(\alpha - \varphi)} \qquad n = \frac{(a+c) \sin \varphi}{\sin(\beta + \varphi)}$$

Zur Probe kann man dann noch berechnen:

$$2F = a m \sin\alpha + a n \sin\beta - m n \sin(\alpha + \beta)$$

III. Wir betrachten nach Fig. 3. den besonderen Fall der vorstehenden Aufgabe, dass der Punkt (n), durch welchen die Teillinien gehen sollen, auf dem Schnitt der verlängerten (1)(4) und (2)(3) liegt, und wir stellen die Aufgabe, das Viereck (1)(2)(3)(4) so in drei gleiche Teile zu teilen, dass die Teilungslinien AC und BD verlängert durch (n) gehen.

Fig. 3.
Teilungslinien durch den Punkt (n).
(Massstab 1:2000.)

Alles sei in Coordinaten zu behandeln. Die Coordinaten der vier Eckpunkte sind:

$$\left.\begin{array}{llll} (1) & y_1 = 0{,}00 & & x_1 = 0{,}00 \\ (2) & y_2 = +97{,}86 & & x_2 = +35{,}62 \\ (3) & y_3 = +52{,}46 & & x_3 = +104{,}70 \\ (4) & y_4 = +5{,}71 & & x_4 = +68{,}10 \end{array}\right\} (4)$$

Der Inhalt des Vierecks wird aus diesen Coordinaten berechnet nach (10) § 17. S. 48:

$$\text{Inhalt des Vierecks (1)(2)(3)(4)} \quad V = 5676{,}0^{qm} \qquad (5)$$

$$\frac{1}{3} V = F = 1892{,}0 \qquad \frac{2}{3} V = F' = 3784{,}0 \qquad (5a)$$

Auch die Azimute, Winkel und Seiten werden aus den Coordinaten berechnet:

Azimute	*Winkel*	*Seiten*	
((4)(1)) = 184° 48′		(4)(1) = 68,34ᵐ = a	
((1)(2)) = 70° 0′	(1) = 65° 12′	(1)(2) = 104,14	
((2)(3)) = 326° 41′	(2) = 76° 41′	(2)(3) = 82,67	(6)
((3)(4)) = 231° 57′	(3) = 85° 16′	(3)(4) = 59,37	
((4)(1)) = 184° 48′	(4) = 132° 51′		
	360° 0′		
((2)(3)) = 326° 41′			
((4)(1)) = 184° 48′	(n) = 38° 7′		(7)

Dann findet man auch die Lage von (n) gegen (4) und (1):

$$c = \frac{(4)\,(3)}{sin\,(n)}\,sin\,(3) = 95{,}84 \qquad (a+c) = \frac{(1)\,(2)}{sin\,(n)}\,sin\,(2) = 164{,}18 \qquad (8)$$

und die Coordinaten des Schnittpunktes (n):

$$(n) \quad y_n = +13{,}73 \qquad x_n = +163{,}62 \qquad (8a)$$

Um nun die Formeln (2a) (2b) (2c) anzuwenden, hat man für die erste Teillinie AC in Fig. 3.:

$$2F = 3784{,}0\ , \quad \alpha = (4) = 132^\circ\,51' \qquad \beta = (1) = 65^\circ\,12' \qquad (9)$$

$$a = 68{,}34 \qquad (a+c) = 164{,}18\ , \quad c = 95{,}84 \qquad (10)$$

Setzt man dieses in (2a) (2b) (2c), so wird:

$$A = 3784{,}0 \qquad B = 12511 \qquad C = -19138$$

Dieses in (3) gesetzt giebt:

$$\varphi = 12^\circ\,41' \qquad (11)$$

Damit berechnet man auch:

$$m = \frac{c\,sin\,\varphi}{sin\,120^\circ\,10'} = 24{,}339 \qquad n = \frac{(a+c)\,sin\,\varphi}{sin\,102^\circ\,7'} = 36{,}869 \qquad (12)$$

Die zweite Teilungslinie BD Fig. 3. wird ebenso behandelt, sie giebt mit $F' = 2F = 3784{,}0$:

$$\varphi' = 25^\circ\,44' \qquad m' = 43{,}54 \qquad n' = 71{,}30 \qquad (13)$$

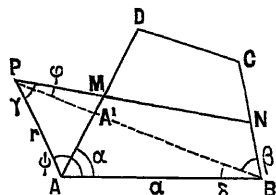
Die Azimute der Linien (4) (3) und (1) (2), auf welchen die $m\ n\ m'\ n'$ abzutragen sind, haben wir auch schon oben bei (6) angegeben, nämlich:

$$\text{Azimut}\ ((4)\,(3)) = 51^\circ\,57' \qquad \text{Azimut}\ ((1)\,(2)) = 70^\circ\,0'$$

Damit kann man auch die Coordinaten der Teilpunkte $A\,B\,C\,D$ berechnen, nämlich:

$$\left.\begin{array}{llllll} A & y_A = +24{,}87 & x_A = +83{,}10 & B & y_B = +40{,}00 & x_B = +94{,}94 \\ C & y_C = +34{,}65 & x_C = +12{,}61 & D & y_D = +67{,}00 & x_D = +24{,}39 \end{array}\right\} (14)$$

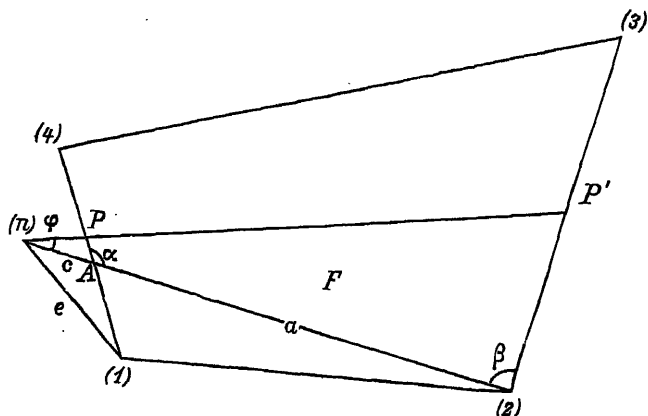
(Wir haben dieselbe Aufgabe früher in der „Zeitschr. f. Verm. 1882", S. 426—427 in anderer Weise behandelt, indem die Entfernungen m und n unmittelbar als Unbekannte von quadratischen Gleichungen bestimmt wurden.)

Fig. 4.
Teilungslinie PMN.

IV. Wenn das Viereck (Fig. 4.) von einem beliebig gegebenen Punkt P aus geteilt werden soll, so kann man diese Aufgabe immer auf die vorhergehende zurückführen, indem man die Gerade $PA'B$ zieht.

P selbst sei gegen das Viereck festgelegt durch r und ψ, dann kann man jedenfalls das Dreieck PAB aus zwei Seiten a und r und dem eingeschlossenen Winkel ψ auflösen, und man hat damit die Seite PB, sowie die zwei Winkel $(\gamma - \varphi)$ bei P und δ bei B, worauf auch der Winkel bei A', dann die Entfernungen $A'A$, AP, $A'B$ und die Dreiecksfläche ABA' leicht gefunden werden.

Sei nun $ABNM = F$ die ursprünglich abzuschneidende Fläche, so nimmt man jetzt die Differenz $F = \triangle\,ABA' = F'$, und schneidet diese Differenz F' von der Linie $PA'B$ aus, gegen MN hin, nach der vorigen Aufgabe mit den Formeln (2) und (3) ab.

Wir nehmen hiezu ein Zahlen-Beispiel mit Fig. 5., dasselbe, welches wir früher in der „Zeitschr. f. Verm. 1882“, S. 422—425 in anderer Weise behandelt haben.

Fig. 5.
Teilungslinie $(n)PP'$.
(Massstab 1 : 2000.)

Es ist ein Viereck durch die Coordinaten seiner Eckpunkte gegeben:

$$\left.\begin{array}{lll}(1) & y_1 = + \ 32{,}70^m & x_1 = + \ 15{,}04^m \\ (2) & y_2 = + 138{,}78 & x_2 = + \ 19{,}04 \\ (3) & y_3 = + 154{,}08 & x_3 = + 115{,}46 \\ (4) & y_4 = + \ \ 9{,}12 & x_4 = + \ 71{,}04\end{array}\right\} \quad (15)$$

Ein weiterer Punkt ist:

$$(n) \quad y_n = + \ 3{,}00 \qquad x_n = + \ 44{,}00$$

Von diesem Punkt (n) aus soll eine Gerade $(n)PP'$ gezogen werden, welche die Fläche des Vierecks halbiert.

Zuerst berechnet man die Viereckfläche selbst aus den Coordinaten, nach (10) § 18. S. 48:

$$2\,V = (-52{,}00)(-121{,}38) - (+129{,}66)(-100{,}42) = 19332{,}22$$

$$\left.\begin{array}{r}2\,F = V = 9666{,}1 \\ F_1 = 4833{,}0\end{array}\right\} \quad (16)$$

F_1 ist das abzuschneidende Stück.

Aus den gegebenen Coordinaten berechnet man die Azimute und die Entfernungen:

Azimute	*Differenzen*	*Entfernungen*	
$((1)(n)) = 314°\,17'$		$(1)(n) = e =$ 41,49	
	$22°\,53'$		
$((1)(4)) = 337°\,10'$		$(1)(4) =$ 60,76	
	$(1) = 110°\,40'$		
$((1)(2)) = 87°\,50'$		$(1)(2) =$ 106,15	(17)
	$(2) = 101°\,11'$		
$((2)(3)) = 9°\,1'$		$(2)(3) =$ 97,63	
	$\beta = 88°\,36'$		
$((n)(2)) = 100°\,25'$		$(n)(2) = c + a =$ 138,06	
	$\alpha = 123°\,15'$		
$((1)(4)) = 337°\,10'$			

Nun kann man die zwei Dreiecke $(n)(1)A$ und $(1)A(2)$ ganz berechnen, sie geben:

$$(1)A = 27{,}65 \quad , \quad c = 19{,}29 \quad , \quad a = 118{,}76 \quad , \quad (\text{Probe: } c + a = 138{,}06) \qquad (18)$$

$$\begin{array}{lrl} & \triangle(1)A(2) = & 1373{,}1 \\ \text{hiezu} & F_1 = & 4833{,}0 \\ \hline \text{also} & F = & 3459{,}9 \end{array} \qquad 2F = 6919{,}8 \qquad (19)$$

Dieses F ist die Fläche $PA(2)P'$, welche nun von der Basis $A(2)$ aus abgeschnitten werden soll.

Nun kommt die Anwendung der Formeln (2) und (3), mit den unter (17) (18) (19) vorbereiteten Werten:

$$2F = 6919{,}8 \qquad a + c = 138{,}06 \qquad c = 19{,}29$$
$$\alpha = 123°15' \qquad \beta = 88°\,36'$$

Man findet die Coëfficienten $A = 6919{,}8 \quad B = 13983 \quad C = -12377$

dann nach (3) S. 66: $\varphi = 20°\,25'$ (20)

Damit sind die zwei Dreiecke $(n)AP$ und $(n)(2)P'$ bestimmt, sie geben:

$$\left.\begin{array}{lrl} & AP = & 6{,}90 \\ \text{hiezu} & (1)A = & 27{,}65 \end{array}\right\} (1)P = 34{,}55 \qquad (2)P' = 50{,}94$$

Die Azimute hiezu sind schon unter (19) angegeben, nämlich:

$$((1)A) = ((1)(4)) = 337°\,10' \qquad ((2)P') = ((2)(3)) = 9°\,1'$$

Man kann also auch die Coordinaten der Punkte P und P' von (1) und von (2) aus berechnen; man findet:

Punkt P $\quad y = +19{,}29 \;,\; x = +46{,}88 \qquad$ Punkt P' $\quad y' = +146{,}76 \;,\; x' = +69{,}35$ (21)

§ 24. Vierecks-Teilung und Polygon-Teilung nach Seiten-Verhältnissen.

I. Wenn man die Vierecksformel (8a) § 20. S. 55 auf das Viereck Fig. 1. zweifach anwendet, so erhält man:

$$2J = am \sin A + am' \sin D - mm' \sin(A + D) \qquad (1)$$

$$2F = an \sin A + an' \sin D - nn' \sin(A + D) \qquad (2)$$

Fig. 1.

Dabei ist J die Fläche des ganzen Vierecks $ABCD$, und F die Fläche eines abzuschneidenden Stücks.

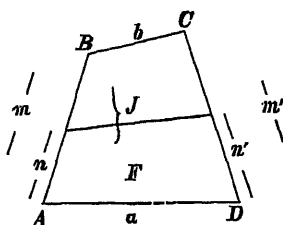
Das Produkt $mm' \sin(A + D)$ wollen wir besonders bezeichnen:

$$mm' \sin(A + D) = 2M \qquad (3)$$

d. h. es ist M die Fläche eines Dreiecks mit den Seiten m und m' und dem eingeschlossenen Winkel $180° - (A + D)$ vgl. Fig. 4. § 20. S. 55). Damit kann man die Gleichung (1) so schreiben:

$$2J = a(m \sin A + m' \sin D) - 2M \qquad (4)$$

Nun wird festgesetzt, dass eine Teilungslinie die beiden Seiten AB und DC nach gleichen Verhältnissen teile, d. h.:

$$\frac{n}{m} = \frac{n'}{m'} = v \qquad (5)$$

Damit wird (2):

$$2\,F = v\,a\,(m \sin A + m' \sin D) - v^2\,m\,m' \sin(A + D)$$

Berücksichtigt man hier die durch (3) und (4) eingeführten einfacheren Zeichen M und J, so wird:

$$2\,F = 2\,v\,(J + M) - 2\,v^2\,M$$

$$v^2\,M - v\,(J + M) + F = 0 \tag{6}$$

Die Auflösung dieser quadratischen Gleichung giebt:

$$v = \frac{J+M}{2\,M} \pm \sqrt{\left(\frac{J+M}{2\,M}\right)^2 - \frac{F}{M}} \tag{7}$$

Die Formel (7) wird unbrauchbar in dem oft eintretenden Fall, dass die Seiten $A\,B$ und $D\,C$ nahezu parallel werden, denn dann wird $A + D$ nahezu $= 180°$, folglich nach (3): $M = 0$, und (8) giebt hiermit:

$$v = \infty \pm \sqrt{\infty^2 - \infty} \tag{8}$$

Um diesem Übelstand auszuweichen, bestimmt man besser $\frac{1}{v}$ statt v, d. h. man rechnet nach (6):

$$M - (J + M)\frac{1}{v} + F\left(\frac{1}{v}\right)^2 = 0 \tag{9}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{J+M}{2\,F} \pm \sqrt{\left(\frac{J+M}{2\,F}\right)^2 - \frac{M}{F}} \tag{10}$$

$$\text{oder } \frac{1}{v} = \frac{J+M}{2\,F} \pm \frac{J+M}{2\,F}\sqrt{1 - \frac{4\,M\,F}{(J+M)^2}} \tag{11}$$

(Diese Umkehrung entspricht der Formel, welche *Vogler* auf S. 620 seines Lehrbuchs der praktischen Geometrie „nach einer Bemerkung *Helmerts*" angiebt.)

Wenn in Fig. 1. die Abschneidung nicht von der Seite $A\,D$ her, sondern von $B\,C$ her vorgenommen werden soll, so ändert M sein Vorzeichen, denn in (3) tritt dann $\sin(B + C)$ an die Stelle von $\sin(A + D)$, und an Stelle von F muss $J - F$ treten, ebenso auch $1 - v$ an Stelle von v, weil auch die Strecken auf $A\,B$ und $D\,C$ dann von B und von C her abgetragen werden sollen. Dieses bestätigen auch die Formeln, denn nach (7) hat man:

$$1 - v = \frac{M - J \mp \sqrt{\ldots}}{2\,M} = \frac{J - M \pm \sqrt{\ldots}}{-2\,M} \tag{12}$$

Der Ausdruck unter der Wurzel in (12) kann aber an und für sich so umgeformt werden:

$$(J + M)^2 - 4\,M\,F = (J - M)^2 + 4\,M\,(J - F)$$

also:

$$1 - v = \frac{-(J - M) \mp \sqrt{(J - M)^2 + 4\,M\,(J - F)}}{2\,M} \tag{13}$$

Was das Doppelzeichen der Wurzel betrifft, so ist immer nur *ein* Zeichen praktisch brauchbar, was stets leicht zu entscheiden ist. In (7), (10) und (11) gilt nur das Zeichen $+$.

Wir schreiben mit dieser Beschränkung die Hauptformel (10) noch einmal:

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{v} = \frac{J+M}{2\,F} + \sqrt{\left(\frac{J+M}{2\,F}\right)^2 - \frac{M}{F}} \tag{14}$$

Für den besonderen Fall der Flächen*halbierung* hat man $J = 2F$, und damit wird:

$$\left[\frac{1}{v}\right]_{1/2} = 1 + \frac{M}{J} + \sqrt{1 + \left(\frac{M}{J}\right)^2} \tag{15}$$

Wenn M klein ist, so kann man (11) oder (14) in eine Reihe entwickeln, deren Anfang ist:

$$\frac{1}{v} = \frac{J+M}{2F} + \frac{J+M}{2F}\left(1 - \frac{2MF}{(J+M)^2}\right)$$

$$\frac{1}{v} = \frac{J+M}{F} - \frac{M}{J+M}$$

$$= \frac{J}{F}\left(1 + \frac{M}{J}\right) - \frac{M}{J + \cdots}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{J}{F}\left\{1 + \frac{M}{J}\left(1 - \frac{F}{J}\right)\right\} \text{ (genähert)} \tag{16}$$

und umgekehrt:

$$v = \frac{F}{J}\left\{1 - \frac{M}{J}\left(1 - \frac{F}{J}\right)\right\} \text{ (genähert)} \tag{17}$$

für die Halbierung der Fläche J hat man $J = 2F$, folglich:

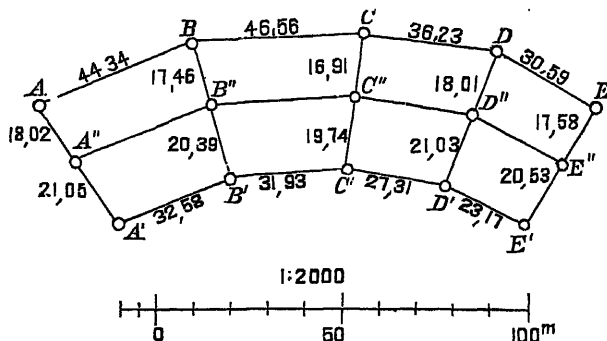
$$[v]_{1/2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\frac{M}{J} \text{ (genähert)} \tag{18}$$

Nun ist die im bisherigen behandelte *Vierecks*-Teilung auch einer Ausdehnung auf *Polygone* fähig, wie zuerst *Vogler* in der „Zeitschr. für Verm. 1884“, S. 277 gezeigt hat.

Wenn man nämlich mehrere Vierecke aneinander reiht, wie in der nachfolgenden Fig. 2. zu sehen ist, und wenn man für alle Teillinien $A'' B'' C'' D'' E''$ *dasselbe* Verhältnis festsetzt:

$$\frac{1}{v} = \frac{AA''}{A''A'} = \frac{BB''}{B''B'} = \frac{CC''}{C''C'} = \frac{DD''}{D''D'} = \frac{EE''}{E''E'} \tag{19}$$

so kann man die frühere Betrachtung von Fig. 1. wiederholt anwenden, und man bekommt *dieselben* Gleichungen (7), (10) u. ff., wenn man nun unter J die *Summe* aller ganzen Vierecke und unter F die *Summe* der abzuschneidenden Vierecke versteht, oder kurz, wenn J und F nun die entsprechenden langgestreckten Polygone sind.

Fig. 2.
Teilung mit konstantem Seiten-Verhältnis $\frac{AA''}{A''A'} = \frac{BB''}{B''B'} = \frac{CC''}{C''C'} = \cdots$

Zu einem Zahlen-Beispiel nehmen wir nochmals das langestreckte Polygon, Fig. 6. § 22. S. 65, welches wir in obenstehender Fig. 2. in anderem Massstab neu aufgezeichnet haben.

Die Coordinaten der Eckpunkte sind:

	y	x		y	x
A	0,00	0,00	A'	+ 21,77	−32,44
B	+ 40,93	+ 17,05	B'	+ 51,57	−19,27
C	+ 87,44	+ 19,22	C'	+ 83,43	−17,21
D	+ 123,34	+ 14,33	D'	+ 110,23	−22,44
E	+ 150,37	0,00	E'	+ 130,96	−32,79

(20)

Man berechnet aus den Coordinaten zunächst den Inhalt (vgl. S. 65):

$$J = 5115{,}0^{qm} \tag{20a}$$

Aus den Coordinaten kann man auch die Seiten und Azimute berechnen, soweit man dieselben braucht. Ausser den in Fig. 2. eingeschriebenen Massen haben wir:

Seiten	*Azimute*	*Differenzen*
$A'A = 39{,}067^m$	$(A'A) = 326°\ 8'$	
		17° 32′
$B'B = 37{,}846$	$(B'B) = 343°\ 40'$	
		22° 37′
$C'C = 36{,}650$	$(C'C) = 6°\ 17'$	
		13° 20′
$D'D = 39{,}037$	$(D'D) = 19°\ 37'$	
		11° 0′
$E'E = 38{,}104$	$(E'E) = 30°\ 37'$	

(21)

Das Ganze soll halbiert werden, weshalb die Formel (15) zur Anwendung kommt. Da J nach (20a) bekannt ist, handelt es sich nur noch um M, und dieses berechnet sich mit den Angaben (21) so:

$$\begin{aligned}
39{,}067 \times 37{,}846 \sin 17°\,32' &= 445{,}42 \\
37{,}846 \times 36{,}650 \sin 22°\,37' &= 533{,}41 \\
36{,}650 \times 39{,}037 \sin 13°\,20' &= 329{,}94 \\
39{,}037 \times 38{,}104 \sin 11°\ \ 0' &= 283{,}82 \\
\hline
2\,M = -1592{,}59 \qquad M &= -\,796{,}3
\end{aligned} \tag{22}$$

Nach der Bezeichnungsweise von Fig. 1. ist dieser Wert M, welcher zu Fig. 2. gehört, *negativ*, weil die Linien $A'A$, $B'B$ u. s. w. von Fig. 2. von Süden nach Norden divergieren.

Übrigens braucht man in unserem Fall gar keine Furcht wegen etwaigen Irrtums im Zeichen von M zu haben, denn wenn M sein Zeichen wechselt, so geht einfach v in $1-v$ über, wie wir bei (12) und (13) schon allgemein bemerkt haben; auf welche Seite aber v und $1-v$ gehört, das zeigt der blosse Anblick der Figur, in unserem Fall Fig. 2. muss offenbar der schmälere Teil nördlich sein. Nur wenn etwa das Polygon $ABCDE$ einen Wendepunkt hätte, oder nahe gerade wäre, könnte der unmittelbare Anblick einen Zweifel bestehen lassen.

Wir haben nun nach (20a) und (22):

$$J = 5115{,}0 \qquad M = -\,796{,}3 \qquad \frac{M}{J} = -\,0{,}15568 \tag{23}$$

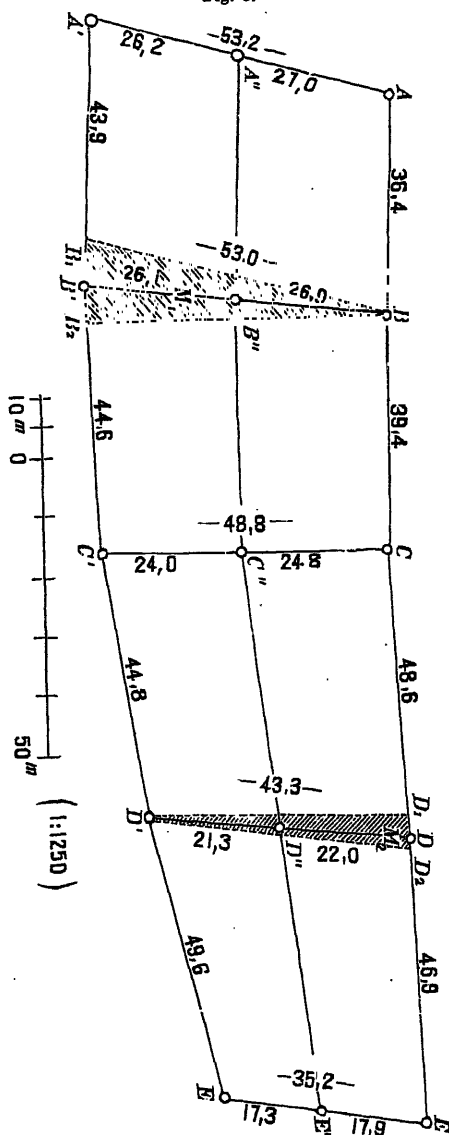
und die übrige Einsetzung in (15) giebt:

$$\frac{1}{v} = 1{,}85636 \qquad v = 0{,}53869 \qquad 1-v = 0{,}46131 \tag{24}$$

Wenn man mit $1-v$ und mit v die unter (21) gegebenen Entfernungen $A'A$ $B'B$ u. s. w. multipliziert, so bekommt man die folgenden Teilwerte:

	A	B	C	D	E	
nördlicher Teil	18,022	17,459	16,907	18,008	17,578	
südlicher Teil	21,045	20,387	19,743	21,029	20,526	
Summe	39,067	37,846	36,650	39,037	38,104	(25)

Diese Strecken sind, auf 1^{cm} abgerundet, in Fig. 2. eingeschrieben.

Fig. 3.

Bisher wurde Alles streng aus Coordinaten berechnet; die nächste Vereinfachung besteht darin, dass man die Konvergenzflächen M in dem Plane konstruiert und planimetrisch bestimmt.

Wir nehmen hiezu in Fig. 3. ein langgestrecktes Zehn-Eck, welches als Teil des Stückvermessungsrisses Kartenblatt Nr. 2, Riss Nr. 1, von den lithographierten Anlagen der Anweisung VIII vom 25. Oktober 1881 herausgezeichnet wurde, und wir stellen uns die Aufgabe, dieses Grundstück („Pfarre zu Langenburg") der Länge nach zu halbieren.

Die in den Steinlinien liegenden Grundstücks*breiten* setzen wir als direkt gemessen voraus, nämlich:

$$\left.\begin{array}{lll} A A' & B B' & C C' \\ = 53{,}20^m & = 53{,}00^m & = 48{,}80^m \\ D D' & E E' & \\ = 43{,}30^m & = 35{,}20^m & \end{array}\right\} \quad (26)$$

Der Gesamtinhalt ist in solchen Fällen wohl schon bekannt; nötigenfalls müsste er besonders berechnet werden. Wir fanden planimetrisch:

$$\left.\begin{array}{c} \text{Gesamtinhalt von Fig. 3.:} \\ J = 82{,}02 \text{ Ar} \end{array}\right\} \quad (27)$$

Nun konstruiert man durch Parallelabschieben die vier Konvergenzflächen M, oder indem man je zwei zusammen nimmt, die in Fig. 3. schraffierten Teile, welche planimetrisch bestimmt wurden, und gaben:

$$M_1 = +21{,}6 \qquad M_2 = -5{,}4 \qquad M_1 + M_2 = M = +16{,}2 \text{ Ar} \qquad (28)$$

Setzt man J von (27) und M von (28) in die Formel (15), so erhält man:

$$\frac{1}{v} = 2{,}031196 \qquad v = 0{,}49232 \qquad 1 - v = 0{,}50768 \tag{29}$$

und wenn man mit $1 - v$ und mit v die Breiten (26) multipliziert, so erhält man folgende Teilstrecken:

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
$(1 - v)$	27,01	26,91	24,78	21,98	17,87
(v)	26,19	26,09	24,02	21,32	17,33
	53,20	53,00	48,80	43,30	35,20

(30)

Diese Breiten sind, auf Decimeter abgerundet, in Fig. 3. eingeschrieben.

Wir wollen nun zu *Näherungsberechnungen* übergehen, welche bereits in (16), (17) und (18) vorbereitet sind.

Indessen handelt es sich hier weniger um Ersatz der strengen Ausrechnung der Formel (14), welche bei gegebenen J, F und M keinerlei Schwierigkeit hat, als vielmehr um Beschaffung einer Näherung für die Konvergenzgrösse M. Nach (3) ist:

$$2\,M = m\,m' \sin (A + D) \tag{31}$$

und wenn das Viereck ein Trapez, Fig. 4., wird, so geht dieses über in:

$$2\,M = (a - b)\,h \tag{32}$$

In diesem Falle ist der Gesamtinhalt des Vierecks:

Fig. 4.

$$2\,J = (a + b)\,h \tag{33}$$

also:

$$\frac{M}{J} = \frac{a - b}{a + b} \tag{34}$$

In (18) eingesetzt, giebt die Näherung (34):

$$[v]_{1/2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\,\frac{a - b}{a + b} \text{ genähert.} \tag{35}$$

Wir wenden diese Näherungsformel auf Fig. 2. S. 72 an und haben:

nördlich	südlich
44,34	32,58
46,56	31,93
36,23	27,31
30,59	53,17
$b = 157{,}72$	$a = 114{,}99$

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{-42{,}73}{272{,}71} = -0{,}15669$$

$$v = 0{,}5000 + 0{,}0392 = 0{,}5392 \quad , \quad 1 - v = 0{,}4608$$

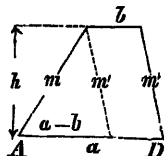
während die genaue Berechnung nach (24) gab: $v = 0{,}5387$, $1 - v = 0{,}4613$. Rechnet man mit dem genäherten v die zwei Teilstrecken der ersten Seite $A'A$ aus, so findet man:

$$18{,}00 + 21{,}07 = 39{,}07$$

also im Vergleich mit den genauen Entfernungen, welche bei (25) angegeben wurden, nur eine Differenz von 2^{cm}.

Auch die Anwendung der Näherungsformel (35) auf unser zweites Polygon Fig. 3. (welche wir hier nicht im einzelnen vorführen), giebt Übereinstimmung auf 2—3^{cm} mit den genauen Resultaten (30).

Die Formel (35) gilt für Halbierung der Fläche. Die allgemeine Näherungsformel dieser Art erhält man durch Einsetzen von (34) in (17):

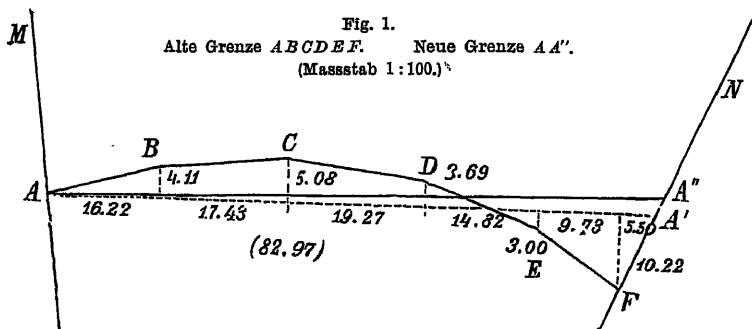
$$v = \frac{F}{J} - \frac{a - b}{a + b}\,\frac{F}{J}\left(1 - \frac{F}{J}\right) \tag{36}$$

Diese Formel, und die entsprechende Halbierungsformel (35) werden namentlich dann von Wert sein, wenn man nur zunächst eine gute *Näherung* haben will und nach Umständen nachher nochmals verbessert.

(Einiges Weitere hierüber haben wir in der „Zeitschr. f. Verm. 1886", S. 471 bis 473 mitgeteilt.)

§ 25. Grenzregulierung.

Die im bisherigen behandelten Teilungs-Aufgaben finden oft Anwendung in der Form von Grenzregulierung.

Es handelt sich dabei darum, unter Bewahrung der Flächenverhältnisse, statt unregelmässiger Grundstücksformen regelmässige Figuren, welche durch möglichst wenig Marksteine bestimmt werden, zu erhalten. Innerhalb einer Flurabteilung, eines „Gewannes", hat man es hiebei gewöhnlich nicht mit der „Gewannengrenze", sondern nur mit Eigentumsgrenzen innerhalb der Gewanne zu thun. Wir behandeln einige Beispiele:

Fig. 1.
Alte Grenze $ABCDEF$. Neue Grenze AA''.
(Massstab 1 : 100.)

(Fig. 1.) Eine Eigentumsgrenze $ABCDEF$ zwischen zwei Gewannengrenzen AM und FN soll in eine gerade Grenze AA'' verwandelt werden, welche durch A geht.

Es wird die Gerade AA' als ungefähr richtige Lage der neuen Grenze gesteckt, und die Fläche zwischen ihr und der alten Grenze aufgenommen, wie Fig. 2. andeutet. Die Flächenberechnung nach der Formel (5) § 17. S. 44 giebt:

$$
\begin{array}{llll}
+\ 4{,}11\,(16{,}22 + 17{,}43) = +\,(\ 4{,}11 \times 33{,}65) = & +\ 138{,}30 & \\
+\ 5{,}08\,(17{,}43 + 19{,}27) = +\,(\ 5{,}08 \times 36{,}70) = & +\ 186{,}44 & \\
+\ 3{,}69\,(19{,}27 + 14{,}82) = +\,(\ 3{,}69 \times 34{,}09) = & +\ 125{,}79 & \\
-\ 3{,}00\,(14{,}82 + \ 9{,}73) = -\,(\ 3{,}00 \times 24{,}55) = & & -\ 73{,}65 \\
-10{,}22\,(\ 9{,}73 + \ 5{,}50) = -\,(10{,}22 \times 15{,}23) = & & -155{,}65 \\
\hline
 & +\ 450{,}53 & -229{,}30 \\
 & 2F = +\,221{,}23 & \\
 & F = \quad 110{,}6^{qm} &
\end{array}
$$

Die vorläufig angenommene Linie AA' teilt also so, dass nördlich um 110,6^{qm} zu viel, und südlich um 110,6^{qm} zu wenig Fläche ist. Man muss daher AA' nördlich nach AA'' so verschieben, dass das Dreieck $AA'A''$ die *Hälfte* von 110,6^{qm}, d. h. = 55,8^{qm} wird, denn die Abnahme um $\frac{F}{2}$ nördlich und die Zunahme um $\frac{F}{2}$ südlich,

geben zusammen eine Differenz $= F$. Oder die neue Grenze AA'' ist so abzustecken, dass die Fläche des Dreiecks $AA'A'' = 55{,}8^{qm}$ wird. Der Punkt A'' ist dadurch bestimmt, dass sein Abstand y von der Geraden AA' werden muss:

$$y = 2\,\frac{55{,}3}{82{,}97} = 1{,}33^m$$

oder die schiefe Entfernung AA'' selbst:

$$AA' = \frac{\sqrt{10{,}22^2 + 5{,}50^2}}{10{,}22}\,1{,}33 = \frac{11{,}61}{10{,}22}\,1{,}33 = 1{,}51^m$$

damit lässt sich der Punkt A'' bequem abstecken.

(In dem Holzschnitt Fig. 1. ist $A'A''$ zu gross gezeichnet.)

(Fig. 2.) Eine zwischen zwei parallelen Gewannengrenzen AM und DN liegende gebrochene Eigentumsgrenze $ABCD$ soll in eine geradlinige auf AM rechtwinklig stehende Grenze PQ verwandelt werden.

Fig. 2.
Alte Grenze $ABCD$. Neue Grenze PQ.
(Massstab 1 : 200.)

Man nimmt AE rechtwinklig zu den Gewannengrenzen als Aufnahmslinie, misst die in der Figur eingeschriebenen Masse, und berechnet die Fläche:

$$\begin{aligned}
&20{,}26 \times 7{,}28 && = 147{,}49\\
&(59{,}84 - 20{,}26)(7{,}28 + 8{,}34) = 39{,}58 \times 15{,}62 && = 618{,}24\\
&(90{,}04 - 59{,}84)(8{,}34 + 6{,}24) = 30{,}20 \times 14{,}58 && = 440{,}32\\
\hline
& & 2F &= 1206{,}05\\
& & F &= 603{,}0^{qm}
\end{aligned}$$

Hieraus berechnet man den Abstand y der Parallelen PQ von der Aufnahmslinie AE:

$$y = \frac{603{,}0}{90{,}04} = 6{,}70^m$$

Damit kann die Parallele PQ abgesteckt werden.

(Fig. 3.) Die Grenze $ABCD$ soll in eine geradlinige Grenze AE verwandelt werden, welche durch A geht.

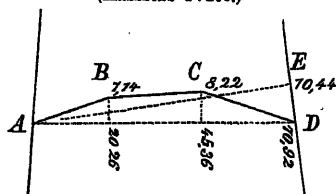
Man nimmt die alte Grenze $ABCD$ durch Coordinaten in Beziehung auf irgend eine durch A gehende Aufnahmslinie, z. B. AD auf, und berechnet die Fläche:

$$2\,ABCD = 740{,}3^{qm}$$

Dann ist der Punkt E so zu bestimmen, dass seine Ordinate y wird:

$$y = \frac{740{,}3}{70{,}92} = 10{,}44$$

Fig. 3.
Alte Grenze $ABCD$. Neue Grenze AE.
(Massstab 1 : 200.)

Wenn bei nicht parallelen Gewannengrenzen, wie in Fig. 2. und Fig. 3., die neue Grenze einer gegebenen Richtung parallel werden soll, so kann man die Parallelteilungsaufgabe von Fig. 1. § 22. S. 60 anwenden. Wenn z. B. bei Fig. 3. die neue

Grenzlinie parallel AD werden soll, so berechnet man die Länge x der neuen Grenze, und den Abstand y derselben von AD, nach den Formeln:

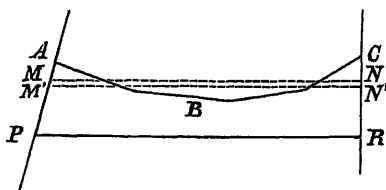
$$x = \sqrt{70{,}92^2 - 740{,}3\,(cotg\,A + cotg\,D)}$$

$$y = \frac{740{,}3}{70{,}92 + x}$$

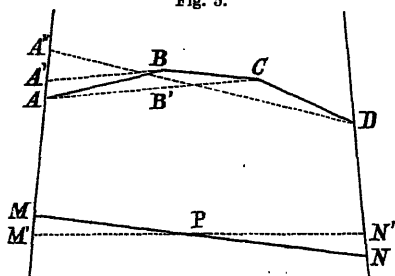
die Werte $cotg\,A$ und $cotg\,D$ ergeben sich aus Coordinatenmassen.

Fig. 4.
Parallelteilung durch Probieren.

Wenn die Gewannengrenzen *nahezu* parallel sind, so kommt man vielleicht durch Probieren rascher zum Ziel, wie in Fig. 4. angedeutet ist:

Die Grenze ABC soll parallel PR gemacht werden, wobei PA und RC nicht parallel sind.

Man steckt schätzungsweise $M'N'$ parallell PR ab, und sieht zu, ob die Fläche $PM'N'R = PABCR$ wird; sollte z. B. $M'N'$ zu wenig geben, so verschiebt man parallel nach MN, so dass der schmale, als Rechteck zu behandelnde Streifen $MNN'M'$ den Fehler deckt, d. h. wenn dieser Streifen $= F - F'$ ist, so berechnet man seine Breite y aus der Gleichung:

$$y = \frac{F - F'}{MN}$$

Fig. 5.

Weitere Näherungs-Methoden zeigt Fig. 5. Wenn die Grenze $ABCD$, welche nicht viel von der Geraden AD abweicht, und nahezu rechtwinklig zu AM (oder DN) ist, gerade gemacht werden soll, so wird AA' gleich dem Abstand BB' gemacht, und dadurch $DCBA$ in DCA' verwandelt, und ebenso wird DCA' in DA'' verwandelt.

Um die Grenze MN ihrer Richtung nach wenig zu verändern, kann man sie um ihren Halbierungspunkt P in die Lage $M'N'$ drehen. (Streng richtig, wenn AM parallel DN).

Bei Grenzverlegungen sind zuweilen auch verschiedene *Bonitäts*-Verhältnisse zu berücksichtigen.

Ein hübsches Beispiel dieser Art wurde in der „Zeitschr. f. Verm. 1886", S. 20—22 von Landmesser *Voigt* mitgeteilt, woraus wir die nebenstehende Fig. 6. S. 79 und folgende Mitteilung entlehnen:

Das Grundstück *S.* (Fig. 6. S. 79) liegt in der Stadt Königswinter a. Rh. und wird, wie die Figur andeutet, nördlich von einer Strasse und südlich von der Eisenbahn begrenzt, zudem ist der der Strasse zugekehrte Teil der fruchtbarere. Ein zweites Grundstück *K.* grenzt nur an die Strasse. So erklärt sich, sowohl aus der Lage, als auch aus der Güte des Bodens, der grössere Wert des *K.*'schen Besitzes. Sollte also bei einer Grenzverlegung ein wirklicher Ausgleich der Werte stattfinden, so blieb nichts übrig, als jedem Grundstücksteile einen bestimmten relativen Wert beizulegen, oder

wenn F und G die gegenseitig auszutauschenden Teile sind, zu setzen allgemein:

$$\frac{F}{G} = \frac{m}{n}$$

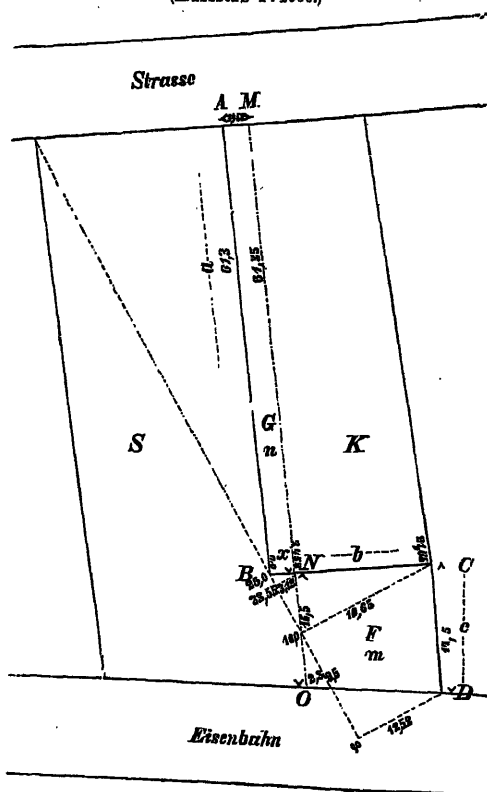
In unserem Falle haben sich die Besitzer geeinigt, dieses Verhältnis $\frac{m}{n}$ rund $= \frac{3}{2}$ anzunehmen.

Dass diese Annahme selbst ursprünglich eine unsichere war, ist für die Arbeit des Landmessers gleichgültig; für ihn kommt es nur darauf an, die einmal gegebenen Bedingungen geometrisch gut durchzuführen.

Es liegt also folgende Aufgabe vor:

„Die Besitzer *S.* und *K.* wollen ihre gebrochene Grenze *ABCD* so in eine geradlinige Grenze *MNO* umändern, dass *S.* vom benachbarten Grundstücke des *K.* 2 Teile und *K.* dafür von *S.* 3 Teile erhält.“

Die von *Voigt* gegebene Auflösung, welche in der „Zeitschr. f. Verm. 1886“, S. 22 zu finden ist, drucken wir hier nicht ab, indem wir das Vorstehende als eine Übungs-Aufgabe auffassen.

Fig. 6.
Grenzverlegung nach Bonitäts-Verhältnissen.
(Massstab 1:1000.)

§ 26. Allgemeines über Flächen-Teilung.

Flächenteilungs-Aufgaben kommen in der Feldmesserpraxis hauptsächlich in zweifacher Art vor, nämlich: 1) unmittelbar als Teilung, z. B. bei Erbschaften oder bei Ausscheidung statt gemeinsamer Benützung, 2) als Grenzregulierungs-Aufgaben, wie im vorigen § 25. an einzelnen Beispielen gezeigt wurde.

Kleinere Grenzverlegungen, etwa wie die in § 25. Fig. 1 bis Fig. 5. S. 76—78 behandelten, kommen oft *vor* der Neuvermessung einer Gemarkung, und *vor* der Versteinung der Grenzen vor, und haben dann namentlich den Zweck, die Versteinung möglichst einfach zu machen. (Baden.)

Zur Schlussprobe jeder Grenzverlegung kann man immer aus der alten und aus der neuen Grenze ein geschlossenes Polygon bilden, dessen Fläche algebraisch gleich Null sein muss.

Die durch reine Rechnung zu lösenden Teilungs-Aufgaben müssen immer verhältnismässig einfach sein.

Wenn die Teilungsaufgaben zusammengesetzt und verwickelt werden, so gelangt man durch einige wiederholte Versuche rascher zum Ziel, als durch strenge Rechnung. Dieses ist namentlich der Fall, wenn, wie fast immer, die Nebenbedingungen (z. B. die Teillinien durch gegebene Punkte oder nach gegebenen Richtungen zu legen,) weniger genau erfüllt sein müssen, als die Hauptbedingung der richtigen Flächen-Teilung. In solchen Fällen macht man eine erste Teilung auf einem genügend grossen Plan und verbessert nötigenfalls nach der Übertragung auf das Feld nach Massgabe unmittelbarer Flächen-Aufnahme.

Grosse Güterzusammenlegungen und Verteilungen (Verkoppelungen, Feldbereinigungen) werden oft lediglich auf dem Plan, etwa 1 : 500, durchgeführt.

Trotzdem behalten die *Berechnungen* der Flächen-Teilungen, wie z. B. unsere grösseren Beispiele zu Fig. 3. § 23. S. 67, Fig. 5. § 23. S. 69 oder Fig. 2. und Fig. 3. § 25. S. 72 und S. 74 immer ihren eigentümlichen Wert; zum mindesten enthalten sie einen guten Übungsstoff für landmesserische Berechnungen; und wer sich mit solchen Teilungsberechnungen vertraut gemacht hat, wird wohl auch in der Praxis Anwendungen dafür finden, welche dem Nicht-Geübten entgehen.

Man hat solche Teilungsberechnungen mit Coordinaten auch zum Teil noch viel theoretischer und in abstrakteren Formeln behandelt, namentlich geschieht dieses in der „Anleitung zur Berechnung und Teilung der Polygone, von *H. Hölscher*, Berlin und Charlottenburg 1864“, einem ganz originalen, lesenswerten, kleinen Buche. Wir haben uns jedoch durch verschiedene Vergleichungen überzeugt, dass die abstrakten *Hölscher*schen Coordinatenformeln keinen Vorteil im Vergleich mit einer mehr geometrisch anschaulichen Behandlung mit Seiten, Azimuten und Winkeln bieten, und dass in diesen abstrakten Formeln manche Zweifel über Ausnahmsfälle mit Null und Unendlich (z. B. bei (7) § 24. S. 71 oder auch bei (7) § 22. S. 62) unerledigt bleiben.

Kapitel III.

Mechanische Hilfsmittel für Berechnungen.

§ 27. Planimeter. Allgemeines.

Unter Planimeter versteht man ein Instrument, mittelst dessen der Flächen-Inhalt einer ebenen Figur mechanisch bestimmt wird.

Über die Geschichte der Planimeter-Erfindung citieren wir aus *Bauernfeind*, „Elemente der Vermessungskunde, 6. Aufl. 1879“ II. Band, S. 222: Das Princip, worauf die allein brauchbare Klasse der die Figur umschreibenden Planimeter beruht, wurde, wie *Bauernfeind* in *Dinglers* „Polytechnischem Journal“ Band 137 (1855) S. 82 mitgeteilt hat, von dem bayerischen Trigonometer *Hermann* 1814 erfunden und 1817 angewendet; diese Erfindung ist aber, da *Hermann* sie nicht veröffentlichte, sondern bloss seiner vorgesetzten Stelle vorlegte, wieder in Vergessenheit gerathen. *Gonella* in Florenz und *Oppikofer* in Untereppikon in der Schweiz konstruierten 1824 und 1827

auf gleicher Grundlage zwei von dem *Hermann*schen Instrument wenig abweichende Planimeter, deren letzterer von *Ernst* in Paris teilweise verbessert wurde. Wesentlich verbessert wurden diese Instrumente durch *Wetli* in Zürich, und kleinere Abänderungen sind von *Hansen* in Gotha und von *Starke* in Wien angebracht.

Im Jahr 1856 erfand Professor *Amsler* in Schaffhausen das zierliche und leistungsfähige Polar-Planimeter, welches sich seit dieser Zeit allgemein eingebürgert hat.

In den letzten Jahren sind zahlreiche neue Erfindungen ähnlicher Art gemacht worden, von denen *Coradis* Roll-Planimeter hauptsächlich zu erwähnen ist.

Wir werden uns auf die Beschreibung des *Amsler*schen Polar-Planimeters und des *Coradi*schen Roll-Planimeters beschränken, und stellen einige neuere Litteratur-Angaben hier zusammen, welche sich teils auf die Konstruktion und die Geschichte der Planimeter, teils auf Genauigkeits-Untersuchungen beziehen, auf welche wir in § 30. wieder zurückkommen werden.

Favaro, Beiträge zur Geschichte des Planimeters. *Försters* Bauzeitung, 1873, mit zahlreichen Litteratur-Angaben.

Cherest, Über *Amslers* Polar-Planimeter. Civil-Ingenieur, 1866, S. 47—62.

Junge, Eine Versuchsreihe mit dem *Amsler*schen Polar-Planimeter. Civil-Ingenieur, 1866, S. 63—75.

Schell, Allgemeine Theorie des Polar-Planimeters, Sitzungsberichte der K. Akademie der Wissenschaften. Wien 1868.

Tinter, Ein Beitrag zur Kenntnis der Leistungsfähigkeit der in der Praxis hauptsächlich verwendeten Planimeter. Wien 1877, bei R. v. Waldheim.

Reitz, Korrektur des *Amsler*schen Planimeters und Konstruktion zweier neuer Varietäten desselben. Zeitschr. f. Verm. 1878, S. 249—266.

Coradi, Neues Polar-Planimeter. Zeitschr. f. Verm. 1880, S. 25—28.

Doll, Untersuchung der Genauigkeit eines Planimeters von *Ott* und *Coradi*. Zeitschr. f. Verm. 1880, S. 28—37.

Tinter, *Hohmanns* Präcisions-Polar-Planimeter, Theorie, Genauigkeit u. s. w. Wien 1882. Selbstverlag des Verfassers.

G. Coradi, Praktische Anleitung zum Gebrauch und zur gründlichen Prüfung des Planimeters. Preis 50 Pfg. Karlsruhe. Kommissions-Verlag von Malsch & Vogel. 1882.

Hohmann, Beschreibung, Theorie und Gebrauch des Präcisions-Polar-Planimeters. Im Selbstverlag des Verfassers. Karlsruhe, 1882.

Lorber, Über das Präcisions-Polar-Planimeter, Theorie und Genauigkeit. Zeitschr. f. Instrumentenkunde; Septbr., Oktbr. und Dezbr. 1882.

Lorber, Über die Genauigkeit der Planimeter. Österr. Zeitschr. für Berg- und Hüttenwesen, 1883.

Günther, Versuche über die Genauigkeit des Äquidistanz-Planimeters. Zeitschr. f. Verm. 1883, S. 37—43.

Lorber, Über das freischwebende Präcisions-Polar-Planimeter von *Hohmann* und *Coradi*. Zeitschr. f. Verm. 1884, S. 1—19.

Lorber, Über das Roll-Planimeter von *Coradi*. Zeitschr. des österr. Ingen.- u. Arch.-Vereins IV. und V. 1884.

Reitz, Das Roll-Planimeter, Patent *Hohmann-Coradi*. Zeitschr. f. Verm. 1884, S. 479—482.

Fenner, Beitrag zur Theorie des Roll-Planimeters. Zeitschr. f. Verm. 1886, S. 216 und S. 242, mit einer Berichtigung S. 560.

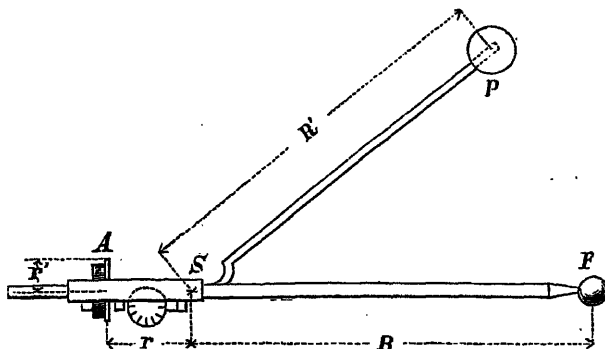
§ 28. Das *Amsler*sche Polar-Planimeter.

Die nachstehende Fig. 1, S. 82 zeigt das Instrument im Grundriss, mit den eingeschriebenen Massbezeichnungen R', R, r, r', welche wir auch in der nachfolgenden Theorie beibehalten werden. P ist der Pol, welcher auf der Zeichnung befestigt wird. Um diesen Pol dreht sich der Arm $PS = R'$, welcher *Pol-Arm* heisst.

Der andere Endpunkt S des Pol-Arms PS kann also einen Kreis vom Halbmesser R' um den Pol P beschreiben.

Ein zweiter Arm SF, welcher *Fahr-Arm* heisst, ist in S scharnierartig mit dem Pol-Arm verbunden, und auf diese Weise kann der Fahrstift F seinerseits wieder einen Kreis vom Halbmesser R um den Punkt S beschreiben.

Fig. 1.

Das *Amsler*sche Polar-Planimeter. $\left(\frac{1}{2}\right.$ natürliche Grösse.$\left.\right)$

Unter dem Fahr-Arm FS befindet sich ein Laufrad A, dessen Umdrehungen durch ein Zählwerk gezählt werden. Aus den Umdrehungen dieses Rades A wird auf die umfahrene Fläche geschlossen.

Der Abstand des Rades A vom Scharnierpunkt S ist $= r$, und zwar in Fig. 1. auf der Rückverlängerung von R gemessen. Es giebt auch Instrumente, bei welchen das Rad A auf der Strecke SF selbst sich befindet. In diesem Fall gilt unsere Theorie mit den nachfolgenden Formeln ebenfalls, nur ist dann r negativ zu setzen.

Befahrung eines schiefen Weges x. (Fig. 2.)

Fig. 2.
Schiefer Weg x.

1) Wenn das Laufrad in seiner eigenen Richtung einen Weg b befährt, so wird auch ein Bogen b am Radumfang abgewickelt.

2) Wenn das Rad in der Richtung seiner Axe irgend einen beliebigen Weg befährt, so wird *kein* Bogen am Radumfang abgewickelt.

3) Wenn der Radmittelpunkt die geradlinige Bewegung x macht, in einer Richtung, welche den Winkel α mit der Radebene (oder den Winkel $(90° - \alpha)$ mit der Radaxe) bildet, so wird ein Bogen b am Radumfang abgewickelt, entsprechend der Gleichung:

$$b = x \cos \alpha \tag{1}$$

Diese Gleichung gilt auch, wenn das Rad A sich auf einem Kreise um P bewegt, wobei x ein Bogen dieses Kreises und α der Winkel zwischen der Radaxe und dem Kreishalbmesser ist. Dieser Fall ist in Fig. 3. S. 83 angenommen, und damit gehen wir zur Theorie des Polar-Planimeters über:

Wenn der Fahrstift F (Fig. 3.) einen Kreisbogen FF' vom Halbmesser f und dem Centriwinkel $FPF' = \varphi$ beschreibt, so beschreibt der Radmittelpunkt A jedenfalls auch einen Kreisbogen um P mit demselben Centriwinkel φ.

Fig. 3.
Theorie des Polar-Planimeters.

Ist f' der Halbmesser dieses Kreisbogen-Weges von A, so ist die Länge dieses Kreisbogens (der nicht in der Figur dargestellt ist):

$$x = f' \varphi$$

wobei φ in analytischem Masse verstanden wird.

Dieser Bogen x entspricht dem Wege x des Rades in der vorbereitenden Fig. 2.; man hat also nach der Grundgleichung (1):

$$b = x \cos \alpha = f' \varphi \cos \alpha \tag{2}$$

Es handelt sich nun um Bestimmung von $f' \cos \alpha$ aus den Dimensionen des Werkzeuges und aus dem Halbmesser f der Bahn des Fahrstiftes F.

Wenn man die Projektionen von f' und von R' auf den Fahr-Arm FA ins Auge fasst, und den Winkel β einführt, so giebt Fig. 3.:

$$f' \cos \alpha = R' \cos \beta - r$$

Ferner giebt das Dreieck PFS:

$$f^2 = R^2 + R'^2 + 2 R R' \cos \beta$$

Es ist also nach (2):

$$b = \varphi (R' \cos \beta - r) = \varphi \left(\frac{f^2 - R^2 - R'^2}{2R} - r \right)$$

$$R b = \frac{\varphi}{2} (f^2 - R^2 - R'^2 - 2 R r) \tag{3}$$

Um alle konstanten Teile zusammenzufassen, setzt man:

$$R^2 + R'^2 + 2Rr = C^2 \tag{4}$$

Damit wird die Gleichung (3) in folgende Form gebracht:

$$Rb = \frac{1}{2}\varphi(f^2 - C^2) \tag{5}$$

Die in (4) eingeführte Grösse C hat eine einfache geometrische Bedeutung, es ist nämlich C derjenige Wert der Fahrweite f, für welchen die Richtung des Halbmessers f' rechtwinklig zum Fahr-Arm FA ist, d. h. es ist in dem unteren Teile von Fig. 3., $PF_0 = C$, wobei PA_0 rechtwinklig zu A_0F_0 ist.

Dieses erhellt sowohl aus der Gleichung (4) unmittelbar, weil hiebei r die Projektion von R' ist, als auch aus der Gleichung (5) in Verbindung mit Fig. 2., denn im unteren Teile von Fig. 3. ist der Winkel $\alpha = 90°$, und das giebt nach der Grundgleichung (1) mit Fig. 2. auch $b = 0$, was in der Gleichung (5) erfüllt ist mit $f = C$.

Der Kreis, dessen Halbmesser C ist, soll der *Grundkreis* heissen; und wir wissen nun, dass, wenn der Fahrstift sich auf dem Grundkreis bewegt, *keine* Raddrehung stattfindet.

Nunmehr zeigen auch die Werte $\frac{1}{2}f^2\varphi$ und $\frac{1}{2}C^2\varphi$ in (5) geometrische Bedeutungen; es sind dieses nämlich Sectorflächen von Kreisen mit den Halbmessern f und C, und die Differenz derselben, welche in (5) vorkommt, und welche dem Produkt Rb gleich ist, bedeutet die Fläche des in der Figur stark schraffierten Kreisringstücks $FF'F''F'''$. Damit hat man den Satz:

Wenn ein um den Pol P gezogener Kreisbogen FF' (also nicht eine *geschlossene Kurve*) befahren wird, so wird an dem Rade ein Bogen b abgewickelt, welcher mit R multipliziert, den Flächeninhalt eines Kreisringstücks giebt, welches begrenzt ist durch den befahrenen Kreisbogen FF' selbst, durch den Grundkreis $F''F'''$ und durch die den Bogen-Enden zugehörigen radialen Linien $F'F''$ und $F'''F$.

Hiebei ist es nötig, einen bestimmten Drehsinn und bestimmte Vorzeichen der Raddrehungen und der Flächen einzuführen. Fährt man mit rechts drehendem Winkel φ und ausserhalb des Grundkreises, so soll das Kreisringstück $FF'F''F'''$ positiv genommen werden, und das Rad soll in diesem Fall wachsende Ablesung geben. Wir nehmen auch an, dass das Rad vom Pol aus gesehen immer rechts sei, oder dass das Rad niemals den Pol-Arm R' überschreitet.

Betrachtet man nun das Durchfahren des staffelförmigen Linienzuges NLM oder $M'L'N'$, so lässt sich zuerst einsehen, dass die beim Durchfahren der radialen Strecken abgewickelten Bögen sich gegenseitig aufheben müssen; und wenn man irgend einem Linienzug zwischen M und N oder M' und N' eine enganschliessende staffelförmige Linie mit unendlich kleinen Absätzen substituiert, und die zu umfahrende Fläche entsprechend in radiale oder bogenförmige Elementarstreifen zerlegt denkt (wobei die Grenzlinien zwischen den Streifen hin und her, also unwirksam, zu befahren wären), so führt der vorige Satz in einfachen Schlussfolgen zu den Resultaten:

1) Wenn ein geschlossener Linienzug durchfahren wird, *welcher den Pol nicht in sich schliesst,* so wird am Rad ein Bogen b abgewickelt, welcher mit R multipliziert, den Inhalt der umfahrenen Fläche giebt. Die umfahrene Fläche F wird also bestimmt durch die Gleichung:

$$F = bR \quad \text{(Pol ausserhalb)} \tag{6}$$

2) Wenn ein geschlossener Linienzug durchfahren wird, *welcher den Pol einschliesst*, so liefert das Produkt Rb die Fläche zwischen dem umfahrenen Linienzug und dem Grundkreise, d. h. nicht die von dem Linienzug selbst umschlossene Fläche F. Um diese Fläche F zu erhalten, muss man zu Rb noch die Fläche des Grundkreises selbst, d. h. $C^2\pi$ addieren, und man hat damit:

$$F = b\,R + C^2\pi \quad \text{(Pol innerhalb)} \tag{7}$$

Statt des abgewickelten Bogens b wollen wir nun die Umdrehungszahl n einführen. Da der Radhalbmesser $= r'$ ist, so giebt eine Umdrehung den Bogen $2r'\pi$, also geben n Umdrehungen:

$$2r'\pi n = b \tag{8}$$

damit geben (6) und (7):

$$F = 2Rr'\pi n \quad \text{(Pol ausserhalb)} \tag{9}$$

$$F = 2Rr'\pi n + C^2\pi \quad \text{(Pol innerhalb)} \tag{10}$$

Es empfiehlt sich noch, für $2Rr'\pi$ ein besonderes Zeichen einzuführen:

$$2Rr'\pi = (f) \tag{11}$$

also:

$$F = (f)\,n \quad \text{(Pol ausserhalb)} \tag{12}$$

$$F = (f)\,n + C^2\pi \quad \text{(Pol innerhalb)} \tag{13}$$

(f) hat die Bedeutung des Flächenwertes für *eine* Radumdrehung $n = 1$.

Es ist nun offenbar erwünscht, $(f) = 1$ oder $= 10$ oder $= 100$ oder gleich irgend einer Potenz von 10 zu machen, damit die Multiplikation mit (f) möglichst bequem wird. Um dieses zu erreichen, kann man den Arm R durch Verschieben in seiner Hülse ändern, und man kann berechnen, wie gross R sein muss, damit $(f) = 1$ wird, nämlich nach (11):

$$R = \frac{1}{2r'\pi}$$

Bei unserem Instrument ist ungefähr $r' = 1^{cm}$, also:

$$R = \frac{1}{2\pi} = 0{,}159^{cm}$$

Dieses wäre ungeschickt; wir nehmen lieber $(f) = 100$, und haben damit $R = 15{,}9^{cm}$.

Eine solche Bestimmung von R ist noch sehr ungenau, sie dient aber als Ausgang für die genauere Bestimmung durch Umfahren von Probeflächen.

Hiezu misst man $R = 15{,}9^{cm}$ beiläufig ab, und macht eine Marke an dem Fahr-Arm. Dann umfahre man eine Probefläche, etwa $F = 100^{qcm}$, und wir wollen annehmen, die Umfahrung gebe $97{,}6^{cm}$, d. h. zu wenig.

Nach Gleichung (9) bestehen für zwei auf einander folgende Versuche mit den Armlängen R_1 R_2 und den entsprechenden Ablesungen n_1 n_2 die Gleichungen:

$$F = 2R_1 r'\pi n_1 = 2R_2 r'\pi n_2$$

also:

$$R_2 : R_1 = n_1 : n_2$$

Hieraus folgt, dass R in demselben Verhältnis zu verkleinern ist, in welchem n grösser werden soll oder umgekehrt, d. h. im Fall des obigen Beispiels muss $R = 15{,}9$ übergehen in $15{,}9\,\frac{97{,}6}{100}$, oder man braucht eine Verkürzung:

$$\Delta R = 15{,}9\,\frac{97{,}6}{100} - 15{,}9 = -15{,}9\left(\frac{100 - 97{,}6}{100}\right)$$

$$\Delta R = -\frac{2{,}4}{100}\,15{,}9^{cm} = -0{,}38^{cm}$$

Man verkürzt den Arm R um $3{,}8^{mm}$ und dann wird ein neuer Versuch gemacht, und ihm entsprechend R abermals verändert, wobei nach Obigem der Arm R zu vergrössern ist, wenn die Flächenangabe n zu gross erhalten wurde und umgekehrt. In dieser Weise kann man durch wenige gut angeordnete Versuche die Stellung des Arms R für jedes Mass scharf erhalten.

Um eine solche Armstellung dauernd zu bezeichnen, macht man eine Strich-Marke, wenn nicht etwa bereits von dem Mechaniker eine Marke angebracht ist.

In neuerer Zeit werden die Planimeter-Arme mit durchlaufenden Teilungen versehen, welche zu Versuchen der vorstehenden Art und zum Einstellen auf bestimmte Werte sehr nützlich sind.

Dieses gilt zunächst nur für Aussen-Pol. Für Innen-Pol hat man noch die Konstante $C^2\pi$ zu bestimmen.

Diesen Wert kann man ebenfalls zuerst berechnen nach der Gleichung (4): $C^2 = R^2 + R'^2 + 2Rr$. Unser Instrument hat: $R' = 15{,}9^{cm}$ $R = 15{,}7^{cm}$ $r = 3{,}4^{cm}$, womit $C^2\pi = 1908^{qcm}$.

Wenn man sich auf unmittelbares Abmessen einlassen will, so kann man C auch noch viel einfacher finden: Man stellt das Instrument so auf ein Reissbrett, wie der untere Teil von Fig. 3. S. 83 andeutet, nämlich mit PA_0 rechtwinklig zu A_0F_0, dann ist PF_0 geradezu $= C$.

Eine Verbesserung der so erhaltenen Konstanten $C^2\pi$ erhält man durch Umfahren einer Figur von bekanntem Inhalt mit innseitigem Pol und Vergleichung des Resultats mit dem bekannten Flächenmass. Z. B. gab das Umfahren eines Quadrats von 1600^{qcm}: $n = -295{,}0$, und da $1600 = n + C^2\pi$, so ist $C^2\pi = 1895{,}0$.

Auch die aufeinander folgenden Befahrungen einer Figur, zuerst mit Aussen-Pol und dann mit Innen-Pol, führen zur Kenntnis der Konstanten $C^2\pi$.

Eine ungefähre Kenntnis der Konstanten $C^2\pi$ *vor* der genauen Bestimmung ist immer zu empfehlen, weil das Zählwerk mehr als 100 Radumdrehungen, d. h. in unserem Falle mehr als 1000^{qcm} nicht mehr angiebt. Wenn nun die Konstante grösser ist, als die umfahrene Fläche, so wird n negativ, was ebenfalls beim Ablesen wohl zu beachten ist. Im obigen Falle wurde z. B. zu Anfang 149,1 und am Ende $854{,}1^{qcm}$ abgelesen, woraus mit Rücksicht auf den bereits ungefähr bekannten Wert $C^2\pi$ gebildet wurde: $n = 854{,}1 - 1149{,}1 = -295{,}0$, also $F = -295 + 1895 = +1600$, wie es sein soll.

Die Anwendung des Planimeters mit Innen-Pol vermeidet man thunlichst, indem grosse Flächen zerlegt, und in Teilen mit Aussen-Pol umfährt.

Auch kann man in solchen Fällen der Figur ein möglichst grosses Rechteck oder sonst eine unmittelbar messbare Figur einbeschreiben und nur die Differenz mit dem Polar-Planimeter messen.

§ 29. Das Roll-Planimeter von *Coradi.*

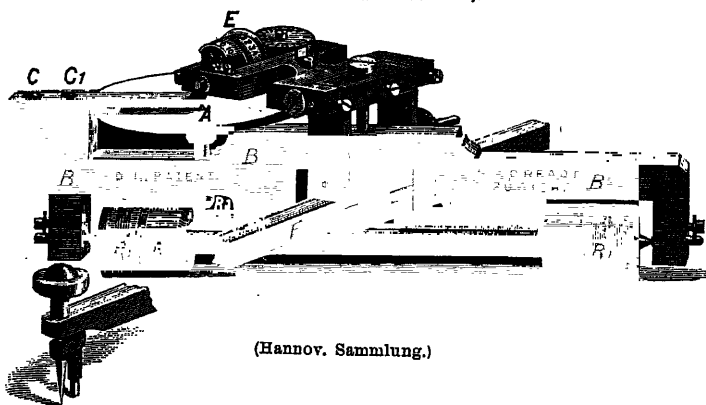
Von allen den verschiedenen neueren Planimeter-Erfindungen zeichnet sich das Roll-Planimeter (das wir schon in § 27. erwähnt haben) dadurch aus, dass es nach einer Richtung ins Unendliche geführt werden kann. Das Instrument wird nämlich mit keinem Punkte auf der Zeichnungsebene festgemacht, wie die Polar-Planimeter, sondern liegt nur mit Rollen auf.

Man kann daher eine Fläche von 34^{cm} Breite und von *unbegrenzter* Länge damit umfahren.

Nach unserem im Jahr 1886 angeschafften Hannover'schen Exemplar, mit Benützung der vom Erfinder veröffentlichten Ansichts-Zeichnung Fig. 1. und der dazu gezeichneten theoretischen Fig. 2., erhalten wir folgende Beschreibung und Theorie dieses Instruments:

Fig. 1.

Ansicht des Roll-Planimeters, etwa $\frac{1}{2}$ natürlicher Grösse.

Abstand der Rollen R_1 = 16 cm
Durchmesser der Scheibe = 5,5 cm

(Hannov. Sammlung.)

Ein langer Rahmen BB dient allen übrigen Teilen als Stütze. Zunächst ist unter diesem Rahmen BB eine lange Rollen-Axe angebracht, welche an ihren Enden zwei Laufrollen $R_1 R_1$ trägt. Diese Rollen, mit rauhem Rande, laufen auf der Zeichnungsebene, und übertragen ihre Drehung auf die horizontale Scheibe A, mittelst konischer Räderübersetzung R_2, R_3. Wird ein Weg dx rechtwinklig zu BB durchlaufen, so giebt dieses einen Rollwinkel dw an der Rolle vom Halbmesser R_1:

$$dw = \frac{dx}{R_1}$$

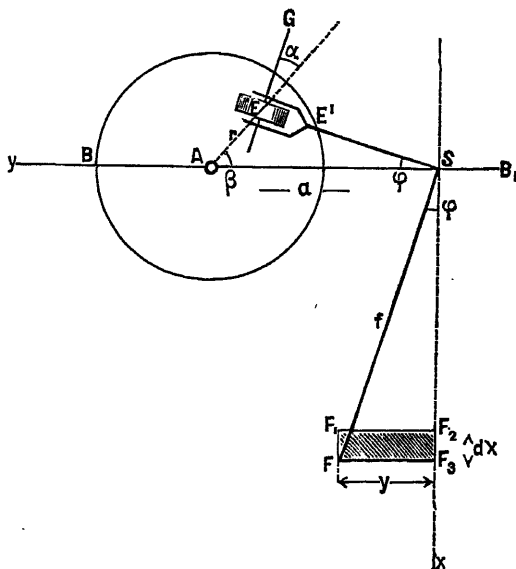
und wegen der eingeschalteten konischen Räder, deren Halbmesser R_2 und R_3 sind, giebt das eine Drehung $d\beta$ an der Scheibe A:

$$d\beta = \frac{R_2}{R_3}\frac{dx}{R_1} = k\,dx \qquad (1)$$

Indem hier k als konstant eingeführt wird, haben wir zunächst eingesehen, dass die Scheibendrehung $d\beta$ dem Rollenweg dx proportional ist.

Um die übrige Einrichtung zu verstehen, betrachten wir den

Fig. 2.

Theorie des Roll-Planimeters.

Fahr-Arm SF und den damit rechtwinklig verbundenen Rad-Arm SE (Fig. 2. S. 87). Dabei ist S ein auf dem Rahmen BB angebrachter Scharnierpunkt, um welchen die beiden Arme SF und SE sich drehen können; diese beiden Arme machen in Fig. 2. den Winkel φ mit der Richtung SX bzw. mit SY, welches in BB liegt.

Der Arm SE' gabelt sich bei E', und giebt dadurch dem Rade E ein Axenlager in der Richtung EG. Das Rad E (mit welchem ein Zählwerk verbunden ist) liegt auf der Scheibe A lose auf, und übernimmt daher die Drehung $d\beta$ der Scheibe A, nach dem Masse der Gleichung:

$$b = r\,d\beta \cos\alpha. \tag{2}$$

Dabei ist b der Bogen, welcher am Umfang des Rades E abgewickelt wird, wenn das Rad den Abstand r von der Scheibenmitte hat, und der Winkel α hat dieselbe Bedeutung wie in der früheren Fig. 2. § 28. S. 82.

Die Gleichungen (1) und (2) führen vollends zur Theorie des Planimeters, es ist hiernach:

$$b = k\,r\,dx \cos\alpha \tag{3}$$

Nach Fig. 2. ist:

$$\alpha + \varphi + \beta = 90^\circ \quad \text{und} \quad \frac{r}{\sin\varphi} = \frac{a}{\sin(\varphi + \beta)} = \frac{a}{\cos\alpha}$$

also:

$$b = k\,a \sin\varphi\, dx = \frac{k\,a}{f}\, y\, dx \tag{4}$$

Hier sind k und a konstant, der Arm f ist nur zur Massstabs-Regulierung verschiebbar, für die Gleichung (4) also auch konstant; es ist also gezeigt, dass eine Fahrung von F nach F_1 (Fig. 2.) eine Radabwicklung b giebt, welche der Rechtecksfläche $y\,dx$ proportional ist.

Eine Umfahrung $F F_1 F_2 F_3 F$ würde dasselbe geben, denn $F_1 F_2$ und $F_3 F$ heben sich auf, und die Fahrung $F_2 F_3$ in der X-Axe giebt keine Abwicklung b, weil dabei $\alpha = 90^\circ$ ist.

Dass vollends die Umfahrung irgend einer Fläche der Integration der Gleichung (4) entspricht, wird ebenso eingesehen, wie beim Polar-Planimeter, und braucht hier nicht weiter erörtert zu werden.

Der in einer Hülse verschiebbare Arm SF in Fig. 2., oder F in Fig. 1., ist mit einer Teilung versehen, und kann durch Versuche so gestellt werden, dass in (4) die Konstante $\frac{k\,a}{f} = 1$ oder $= 100$ u. s. w. wird, dass man also die Flächen unmittelbar aus den Rad-Ablesungen bekommt.

§ 30. Prüfung des Planimeters und Genauigkeit der Planimeter-Messungen.

Nachdem man sich durch einige Probe-Umfahrungen überzeugt hat, dass ein Planimeter im ganzen richtig arbeitet, geht man dazu über, eine und dieselbe Figur bei verschiedenen Stellungen des Instrumentes, namentlich verschiedenen Pol-Stellungen beim Polar-Planimeter, zu umfahren.

Folgendes zeigt einen solchen Versuch mit unveränderter Armlänge, aber geänderter Pol-Stellung:

Pol-Stellung I.		Pol-Stellung II.		
Ablesungen	*Differenzen*	*Ablesungen*	*Differenzen*	
6968		1622		
	196,9 qcm		198,0 qcm	
8937		3602		
	196,7		197,9	
0904		5581		(1)
	197,1		198,4	
2875		7565		
	197,0		198,4	
4845		9549		
Mittel	196,92 qcm		198,18 qcm	

Die Differenz beider Resultate beträgt 1,26 qcm oder 0,6 %.

Kommen so starke Abweichungen vor, so wird man sich kaum befriedigt er-
klären. Die bei verschiedenen Pol-Stellungen erhaltenen Flächen-Bestimmungen sollten
venigstens innerhalb 0,5 % unter sich stimmen.

Der Grund solcher Abweichungen liegt hauptsächlich in einer Schiefe der Rollen-
Axe gegen die Axe des Fahr-Armes R beim Polar-Planimeter.

In der „Zeitschr. f. Verm. 1878", S. 264—266, hat *Reitz* die Theorie der
Rollenschiefe behandelt, und durch vier Figuren (Fig. 11.—14.) gezeigt, in welchem
Sinn die Rollenaxe schief liegt, bzw. verschoben werden muss, wenn die Differenz ge-
wisser Umfahrungen positiv oder negativ ist.

C. Coradi teilt in der „Zeitschr. f. Verm. 1880", S. 27 mit, dass bei einem
gut justierten Planimeter der mathematische Fahr-Arm um einen kleinen Winkel von
der zur Rollenaxe parallelen Lage nach der vom Pol-Arm abgewendeten Seite hin ab-
weicht. Diesen kleinen Winkel erklärt *Coradi* als Folge der Reibung, was sehr wahr-
scheinlich ist.

Weiter bemerkt *Coradi*: „Die Fehler im Spiel
der Rolle treten am deutlichsten in der durch Fig. 1.
angedeuteten Stellung hervor (oder mehr noch, wenn
die Rolle sich gar nicht dreht, d. h. in dem Falle A_0
mit $\alpha = 90°$, Fig. 3. § 28. S. 83). Die Gleichheit der
Ablesungen hängt grösstenteils von der Beschaffenheit
des Rollen-Randes ab. Bei einer sonst fehlerlos und
zentrisch gearbeiteten und geteilten Rolle, deren Rand
noch nicht die richtige Beschaffenheit besitzt, betragen
die Abweichungen der einzelnen Ablesungen unter ein-
ander 2—3 Trommelteile. Diese Fehler lassen sich nur dadurch beseitigen, dass der
Rollen-Rand in der Richtung der Rollen-Axe gestreift wird, d. h. der Rollen-Rand soll
mit zahllosen feinen Strichen, welche parallel zur Rollen-Axe sind, vollkommen gleich-
mässig bedeckt sein. Diese Arbeit kann nur ein mit der Justierung der Laufrolle
vollkommen vertrauter Mechaniker ausführen."

Fig. 1.
Planimeter-Stellung zur Prüfung der Rolle.

Weiteres in diesem Sinn giebt die schon in § 27. erwähnte Broschüre von
Coradi: „Praktische Anleitung" u. s. w.

Daselbst wird auch das *Kontroll-Lineal* besprochen, d. h. ein Lineal mit Pol-
stift und Einsatz-Löchern für den Fahrstift des Planimeters, um Kreise von genau be-
kanntem Halbmesser zu umfahren. *Coradi* glaubt, dass Umfahrungsfehler dadurch
nicht ohne Weiteres ausgeschlossen seien, obwohl diese Flächen-Umfahrungs-Kontrolle
ihre Vorzüge hat.

Gehen wir nun zu den unregelmässigen Fehlern der Planimeter-Messungen über, so wird es sich zuerst fragen, welche Funktion für das Fehlergesetz anzunehmen ist. Den Fehler der Fläche selbst proportional zu setzen, ist jedenfalls verfehlt, denn der sogenannte relative Fehler, d. h. das Verhältnis eines Flächenfehlers $\varDelta F$ zur gemessenen Fläche F, ist jedenfalls bei kleinen Flächen viel grösser als bei grossen Flächen.

Ein allgemeines Fehlergesetz kann sich an die unmittelbare Abmessung eines Rechtecks anschliessen, wofür wir in (10) § 19. S. 52 die Form gefunden haben:

$$\varDelta F = k\sqrt{F} \tag{2}$$

Professor *Lorber* nahm eine zusammengesetzte Fehlerfunktion (s. Zeitschr. f. Verm. 1884", S. 17) von dieser Form:

$$\varDelta F = c\,(f) + k\sqrt{F\,(f)} \tag{3}$$

wo (f) nach unserer Gleichung (11) § 28. S. 85 der Flächenwert für eine Rad-Umdrehung $(n = 1)$ ist. Für ein Polar-Planimeter fand *Lorber*:

$$\varDelta F = 0{,}00126\,(f) + 0{,}00022\sqrt{F\,(f)} \tag{4}$$

wobei alles in Quadrat-Centimeter gerechnet ist.

Die Annahme eines konstanten Gliedes $c\,(f)$ in (3) ist wohl gerechtfertigt, allein da es sehr schwer ist, dessen Betrag im einzelnen Falle zu bestimmen, und *Lorber* selbst in (4) einen sehr kleinen Wert hiefür fand, wollen wir nun die einfache Fehlerform (2) unseren weiteren Betrachtungen zu Grunde legen, zumal dieses Quadratwurzelgesetz (2) sich auch aus vielen anderen formellen Gründen sehr empfiehlt.

Dabei verstehen wir unter $\varDelta F$ zunächst nur den rein unregelmässigen Messungsfehler, welcher durch wiederholtes Befahren derselben Figur mit derselben Pol-Stellung lediglich aus den Abweichungen aufeinander folgender Bestimmungen berechnet werden kann, welcher also etwaige Instrumentenfehler, falsche Armlänge, Rollenschiefe u. s. w. *nicht* mitenthält.

Dieser unregelmässige Fehler ist sehr klein, man kann etwa annehmen:

$$\varDelta F_1 = 0{,}003\sqrt{F} \qquad (\varDelta F_1 \text{ und } F \text{ in } qcm) \tag{5}$$

Wenn man dagegen den mittleren Flächenfehler mit Rücksicht auf diese Instrumentenfehler, Armlängen-Unsicherheit, Rollen-Schiefe u. s. w. kennen will, so reicht die Formel (5) bei weitem nicht aus. Es ist wahrscheinlich, dass dann eine Fehlerfunktion mit einem Gliede von der Ordnung F anzunehmen wäre, d. h.

$$\varDelta F = k_1\,F \pm k_2\sqrt{F} \quad \text{oder} \quad \varDelta F = \sqrt{k_1^2\,F^2 + k_2^2\,F} \tag{6}$$

Da uns kein genügendes Material zur Bestimmung einer Funktion (6) zu Gebot steht, behalten wir auch für den Gesamtfehler der Planimeter-Messung die einfache Form (3) bei, und setzen auf Grund eigener Versuche *) und der schon oben in § 27. S. 81 erwähnten Vergleichungen verschiedener Autoren:

---

*) Z. B. gaben einige Versuche mit Studierenden Folgendes, wobei F die durch Zerlegen in Dreiecke, Abmessen und Berechnen erhaltene Fläche, und F' die durch das Polar-Planimeter erhaltene Fläche bedeutet:

	F	F'	$F'-F$		F	F'	$F'-F$
1.	196,90 qcm	196,92 qcm	+ 0,02 qcm	8.	254,74 qcm	254,70 qcm	— 0,04 qcm
2.	197,15	198,18	+ 1,03	9.	255,08	255,02	— 0,06
3.	196,92	198,00	+ 1,08				
4.	196,50	197,05	+ 0,55	10.	267,15	267,00	— 0,15
5.	196,48	197,00	+ 0,52	11.	239,20	239,60	+ 0,40
6.	196,79	197,50	+ 0,71				
7.	197,04	196,50	— 0,54	12.	239,27	239,45	+ 0,18

$$\varDelta F_2 = 0{,}03\sqrt{F} \qquad (\varDelta F_2 \text{ und } F \text{ in } qcm) \tag{6}$$

Hiernach ist folgende Tabelle berechnet:

Umfahrene Fläche F	$\sqrt{F}$	Mittlerer Fehler einer Planimeter-Umfahrung *ohne* Rücksicht auf Instrumentenfehler $\varDelta F_1 = 0{,}003\sqrt{F}$ I.	*mit* Rücksicht auf Instrumentenfehler $\varDelta F_2 = 0{,}03\sqrt{F}$ II.
1qcm	1,00cm	$\varDelta F_1 = \pm 0{,}003$qcm	$\varDelta F_2 = \pm 0{,}03$qcm
10	3,16	0,009	0,09
25	5,00	0,015	0,15
100	10,00	0,030	0,30
225	15,00	0,045	0,45
400	20,00	0,060	0,60
1000	31,62	0,095	0,95

Für eine Menge von Fällen reicht die Genauigkeit II. unbedingt aus, z. B. für Querprofile bei Erdmassen-Berechnungen u. s. w.

Die Genauigkeit I. ist grösser als die Genauigkeit, mit welcher man eine Figur überhaupt auf dem Papier zeichnen kann.

Obgleich man die Instrumentenfehler nie ganz wegschaffen kann, und somit der rein unregelmässige Umfahrungsfehler I. nur theoretische Bedeutung hat, kann man der dadurch angedeuteten grossen Genauigkeit I. doch sehr nahe kommen, indem man zu jeder Figur auch eine nahezu mit gleicher Pol-Stellung umfahrbare Kontroll-Figur umfährt. Dieses kann man z. B bei Katasterplänen, indem man immer das nächstliegende Coordinaten-Netzquadrat *mit* umfährt, und alle Flächen durch ihre Verhältnisse zu den Netzquadraten bestimmt (wodurch zugleich auch der Eingang des Papiers berücksichtigt wird).

§ 31. Der Rechenschieber.

Der logarithmische Rechenschieber (Fig. 1. S. 92) ist ein mechanisches Hilfsmittel zur Ausführung kleiner Multiplikationen, Divisionen und ähnlicher Rechnungen, mit einer Genauigkeit von ungefähr $^1/_3\,^0/_0$. Derselbe ist für solche kleinere Rechnungen ein *ungemein nützliches Hilfsmittel*, jedoch nur dann, wenn der damit Rechnende infolge genügender Übung die einzelnen Operationen rasch ohne Besinnen, gewissermassen mechanisch auszuführen im Stande ist, wenn er die ganze Handhabung »*im Griff*« hat.

Auf S. 92 haben wir das Instrument selbst, und die zu seiner Erklärung nötigen Zeichnungen in Fig. 1., Fig. 2., Fig. 3. und Fig. 4. gegeben.

Der Rechenschieber besteht in der Regel aus drei gegenseitig beweglichen Teilen, nämlich (vgl. Fig. 2.):

1. dem Hauptteil, *Lineal*,
2. dem *Schieber*, welcher sich mittelst Nuten in dem Lineal verschieben lässt,
3. dem *Läufer*.

Das Lineal und der Schieber sind meist 25cm lang. Das Lineal und der Schieber tragen auf ihrer Vorderfläche die Hauptteilungen für Multiplikation, Division und

Der logarithmische Rechenschieber.

Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4.
Theorie des Rechenschiebers.

Fig. 1. Ansicht des Rechenschiebers in natürlicher Grösse (ohne Läufer).
(Bei den neueren Rechenschiebern ist die untere Teilung *B* mit *C* identisch.)

Fig. 2. Lineal und Schieber mit den Haupt-Teilstrichen, in $^1/_2$ natürlicher Grösse.

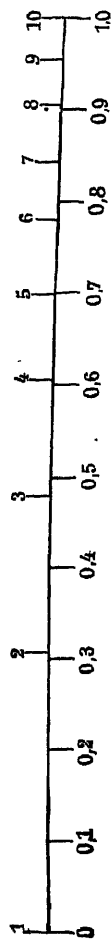
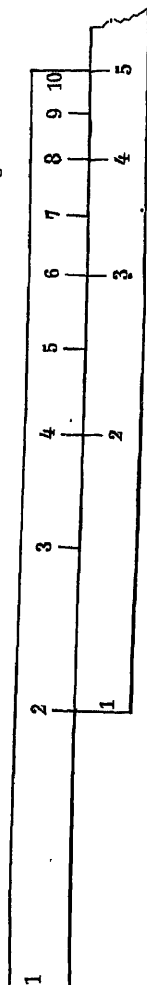



Fig. 3. Logarithmische Haupt-Teilung, im Massstab von Fig. 1.

Fig. 4. Addition zweier Logarithmen, durch Aneinanderschieben zweier Teilungen.

Quadrierung, häufig ist die Rückseite des Schiebers auch noch zu Teilungen für *sin, cos, tang* etc. verwertet.

Der Läufer hat den Zweck, einzelne Stellen der Scalen zu markieren, wozu die beiden abgeschrägten Endflächen der nach links vom Läufer ausgehenden Zeiger dienen.

Die Teilung und die Anwendung des Rechenschiebers gründet sich auf die algebraischen Sätze über die Logarithmen, insbesondere:

$$\log(ab) = \log a + \log b \qquad (1)$$

Um den Gebrauch des Instrumentes zunächst für Multiplikation zu erklären, machen wir die Annahme, man wolle sich selbst einen Rechenschieber für Multiplikation konstruieren. Man entnimmt hiezu aus einer beliebigen Logarithmentafel die Werte:

$$\left.\begin{array}{ll} \log 1 = 0{,}0000 & \\ \log 2 = 0{,}3010 & \log 1{,}1 = 0{,}0414 \\ \log 3 = 0{,}4771 & \log 1{,}2 = 0{,}0792 \\ \log 4 = 0{,}6021 & \text{u. s. w.} \\ \text{u. s. w.} & \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Diese Werte sind in Fig. 3. S. 92 dargestellt, wobei die untere Teilung gleichförmig ist. Es ist z. B. der Teilstrich für 2 aufgetragen bei 0,301 der unteren Teilung, der Teilstrich für 3 bei 0,477 der unteren Teilung u. s. f.

Man könnte nun bereits unsere obere Teilung von Fig. 3. zum Multiplizieren verwenden, etwa unter Zuziehung eines Zirkels. Um z. B. 2×3 zu multiplizieren, nehme man den Abstand 1 - 2 von jener Oberabteilung (Fig. 3.) in den Zirkel, sodann den Abstand 1 - 3, und man wird finden, dass diese beiden Strecken, mit dem Zirkel an einander gesetzt, und dann wieder von 1 an nach rechts abgetragen, genau bis zum oberen Teilstrich 6 reichen, weil nach dem algebraischen Satze (1):

$$\log 2 + \log 3 = \log 6$$

Statt dieser Benützung *einer* Scale mittelst eines *Zirkels* kann man nun aber die Aneinanderfügung zweier Scalenwerte viel besser dadurch bewerkstelligen, dass man *zwei Scalen* neben einander verschiebt.

Dieses wird durch Fig. 4. veranschaulicht: Die obere und die untere Scale sind beide gleich der oberen Teilung von Fig. 3. Will man 2×3 multiplizieren, so stellt man 1 der unteren Teilung auf 2 der oberen Teilung, geht auf der unteren Scale bis 3 vor und liest, von da wieder zur oberen Scale hinaufweisend, oben das Produkt 6 ab, und bei derselben Schieberstellung kann man ebenso die Produkte $2 \times 4 = 8$ und $2 \times 5 = 10$ u. s. w. bilden.

Ganz nach derselben Methode verfährt man mit dem hölzernen Instrument (Fig. 1.), indem man den Schieber in dem Lineal bewegt, und dadurch die untere Teilung neben der oberen Teilung hin und her schiebt.

Wenn man ein Produkt bilden will, welches grösser als 10 ist, so würde die *eine* Teilung (Fig. 1.) nicht ausreichen, deshalb kommt in Fig. 1. bei 10 rechts eine Wiederholung der ersten Teilung.

Wenn man $0{,}2 \times 3$ rechnen will, so verfährt man genau ebenso wie bei 2×3, und schreibt zum Schluss 0,6 statt 6. Die Stellung des Decimal-Kommas giebt der Rechenschieber nicht, diese ist einer Neben-Überlegung durch Kopfrechnung überlassen.

Nachdem wir hiemit die Multiplikation erklärt haben, ist auch Division als

Umkehrung der Multiplikation erklärt. Man denke sich stets die Kante zwischen Lineal und Schieber als Bruchstrich, z. B. in Fig. 1. links oben:

$$\frac{A}{B} \text{ entspricht dem Bruch } \frac{A}{B}$$

d. h. man stellt mittelst des Läufers in dieser Weise A über B, und liest den Quotienten links, über 1 des Schiebers, am Lineal ab.

Auch das Produkt $\frac{A}{B} B' = A'$ wird ähnlich gefunden:

Man stellt wieder A über B, sucht B' auf der Teilung B, und entnimmt darüber das Resultat A' auf der Teilung A.

Die Teilung C Fig. 1. hat doppelten Massstab von A oder B, es geben also B und C zusammen Quadrate und Quadratwurzeln.

Unmittelbar hat das wenig Wert, weil hiefür die Anwendung einer Zahlentabelle viel bequemer ist.

Man kann aber auch unmittelbar Ausdrücke, wie $\frac{B^2}{C}$, $\frac{B}{\sqrt{C}}$ und ähnliche, mit Hilfe der Teilung C abschieben.

Bei manchen Instrumenten sind nicht die beiden Teilungen $B\,B$ von Fig. 1. einander gleich, sondern die beiden unteren Teilungen B und C (vgl. die Anmerkung zu Fig. 1. S. 92).

Nach der einen oder anderen Anordnung richtet sich natürlich der Gebrauch. Indessen wollen wir hierauf, sowie auf Beschreibung der Rechnung mit $\sin\alpha$ $\tan g\,\alpha$ u. s. w. nicht weiter eingehen, weil doch nur persönliche Übung (wobei man eine gewöhnliche Rechnung nebenher macht) zum Ziel führen kann.

Die *Genauigkeit* des Rechenschiebers beträgt etwa 0,2 bis 0,3 %; wir haben in der „Zeitschr. f. Verm. 1887", S. 57, einiges über Rechenschieber-Genauigkeit mitgeteilt, wie folgendes Beispiel zeigt:

Num.	*Rechenschieber-Produkt*	*soll* a	*Fehler* δ	$\frac{100\,\delta}{a}$	$\left(\frac{100\,\delta}{a}\right)^2$
1.	$2{,}34 \times 7{,}69 = 18{,}0$	17,99	+ 0,01	0,06 %	0,0036
2.	$9{,}61 \times 1{,}42 = 13{,}68$	13,65	+ 0,03	0,21	0,0441
3.	$7{,}22 \times 6{,}13 = 44{,}4$	44,26	+ 0,14	0,32	0,1024
4.	$3{,}45 \times 7{,}78 = 26{,}8$	26,84	— 0,04	0,15	0,0225
					0,1726

$$\text{Mittlerer Fehler} = \sqrt{\frac{0{,}1726}{4}} = 0{,}21\,\%$$

Die hier gemachte Quotienten-Berechnung entspricht dem logarithmischen Gesetz:

$$d \log x = \frac{dx}{x}$$

Im Mittel kann man die Rechenschieber-Genauigkeit etwa zu 0,2 % bis 0,3 % annehmen.

Die Rechenscheibe. Da auf dem geraden Rechenschieber *zwei* gleiche Teilungen hintereinander nötig sind, ist es naheliegend, die Teilung auf einem Kreis aufzutragen, so dass das Ende von selbst wieder in den Anfang übergeht. Eine solche Rechenscheibe (von Mechaniker *Landsberg* in Hannover) wurde von uns mehrfach benützt. Der Durchmesser ist $= 15^{cm}$, also die Teilungs-Einheit $= 15\,\pi = 47^{cm}$, d. h. 3,8mal so gross als die Teilungs-Einheit $12{,}5^{cm}$ des gewöhnlichen Rechenschiebers.

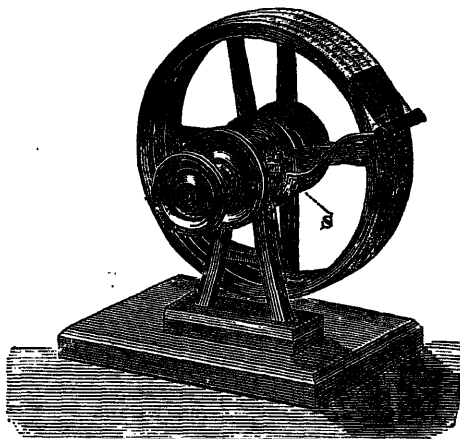
Die Genauigkeit ist auch entschieden grösser als beim gewöhnlichen Schieber, indessen ist die *Kreis*form der Übersicht und Raschheit der Rechnung nicht nützlich, und wir ziehen, wenn es sich um Genauigkeitssteigerung handelt, den 50^{cm}-Schieber vor.

Das *Rechen-Rad* (Fig. 5.). Die neueste Form des logarithmischen Rechnungs-Werkzeugs ist das von *Beyerlen* in Stuttgart konstruierte Rechen-Rad, das wir nach der Beschreibung von *Hammer* in der „Zeitschr. f. Verm. 1886“, S. 382 bis 385, in Fig. 5. abbilden.

Fig. 5.
Das Rechen-Rad.
(Rad-Durchmesser = 12^{cm})

(Hannov. Sammlung.)

Die Teilungen auf zwei Cylinderflächen sind entschieden übersichtlicher und bequemer als auf einer Scheibe. Unser Hannoversches Exemplar hat jedoch keine Teilung auf dem Metall selbst, sondern nur aufgezogene gedruckte Papier-Teilung.

Bei scharfer Metall-Teilung und genügender Grösse könnte das Rechen-Rad wohl auf eine Genauigkeit von $\frac{1}{1000}$ gebracht werden.

§ 32. Die Rechenmaschine.

Die Rechenmaschine ist eine Erfindung des Philosophen *Leibnitz* aus der Zeit von 1673 (s. *Leibnitii* opera omnia, Tomus tertius, Genevae 1768, S. 413—415). Die Originalmaschine befindet sich in der K. Bibliothek zu Hannover, wo sie von uns besichtigt wurde. Die Konstruktion stimmt im wesentlichen (Walzen mit ungleich langen Zähnen u. s. w.) mit der heutigen *Thomas*schen und *Burkhardt*schen Konstruktion. (Wir denken im Laufe des Jahres 1887 eine Beschreibung der *Leibnitz*schen Maschine in der „Zeitschr. für Verm.“ zu bringen.)

Die Form, in welcher die *Leibnitz*sche Erfindung nach langer Vergessenheit in Thätigkeit gebracht wurde, stammt von dem Elsässer *Thomas*, und wurde in Paris ausgeführt. In Deutschland besteht eine sehr zu empfehlende Werkstätte für Rechenmaschinen (von welcher wir zwei Maschinen bezogen haben) in Glashütte in Sachsen, von *Arth. Burkhardt*.

Beschreibung der Burkhardtschen Rechenmaschine.

(Vgl. die Zeichnung auf S. 97.)

Die zuerst in Betracht kommenden Teile sind die Walzen *W*, deren unsere Zeichnung 6 veranschaulicht, nämlich im Grundriss *W W* und im Aufriss *W' W'*. Jede solche Walze ist auf etwa die Hälfte ihrer Oberfläche vollkommen cylindrisch, der übrige Teil ist besetzt durch 9 Zähne von verschiedener Länge. Denkt man sich die Länge der Walze in 10 Teile geteilt, so hat der längste Zahn 9 Teile, der nächste 8 u. s. f. und der kürzeste hat die Länge 1 Teil. Schneidet man eine Walze bei 0, so erhält man einen vollkommen kreisförmigen Querschnitt, schneidet man sie bei 9, so erhält man einen Kreis mit 9 aufgesetzten Zähnen.

Diese Zahnwalzen stehen im Eingriff mit Zahnrädern a (im Grundriss aa, im Aufriss $a'a'$), welche auf ihren horizontalen Axen (parallel den Walzenaxen) so verschoben werden können, dass sie nach Umständen mit mehr oder weniger Walzenzähnen zusammenkommen. Die Verschiebung wird mit den Knöpfen A von oben gemacht, und wenn z. B. ein Knopf A auf 6 steht, so ist das darunter befindliche Rad a so auf der Walze gestellt, dass es bei einer Umdrehung der Walze mit 6 Zähnen derselben in Eingriff kommt.

Die sämtlichen Walzen stehen durch konische Räder mit einer Längentransmission so in Verbindung, dass bei einer Umdrehung der Kurbel K, welcher eine Umdrehung der Transmissions-Axe entspricht, sich auch alle Walzen je einmal umdrehen.

Die kleinen Räder a stehen (ebenfalls mittelst konischer Räder) in Verbindung mit Zifferscheiben C, welche ihre Axen in $c \dots c$ haben. In unserer Zeichnung ist nur *eine* solche Zifferscheibe C, nämlich beim 8^{ten} c gezeichnet, und zwar punktiert, weil sie *unter* der Gesamtdeckplatte sich befindet. Jede volle Umdrehung eines Rades a dreht auch die entsprechende Scheibe C einmal um und führt dabei die aufgeschriebenen Ziffern 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 sämtlich unter dem Schauloch B vorbei; sieht man also zu Anfang in einem Schauloch die Ziffer 0, und dreht die Kurbel einmal um, während das Rad a mittelst seines Knopfes A auf 6 gestellt ist, so kommen 6 Walzenzähne mit 6 Zähnen von a in Eingriff, drehen also a und die damit verbundene Zifferscheibe C um 6 Teile, und nach Vollendung der Kurbeldrehung wird man, statt ursprünglich 0, in dem Schauloch die Ziffer 6 erblicken.

Hiemit ist folgendes erkannt: Wenn man alle Zifferscheiben in den Schaulöchern auf 0 stellt, dann die Knöpfe A bzw. auf 9 3 4 6 0 6 stellt, und dann die Kurbel einmal umdreht, so wird nachher in den 6 Schaulöchern ebenfalls zu sehen sein: 9 3 4 6 0 6.

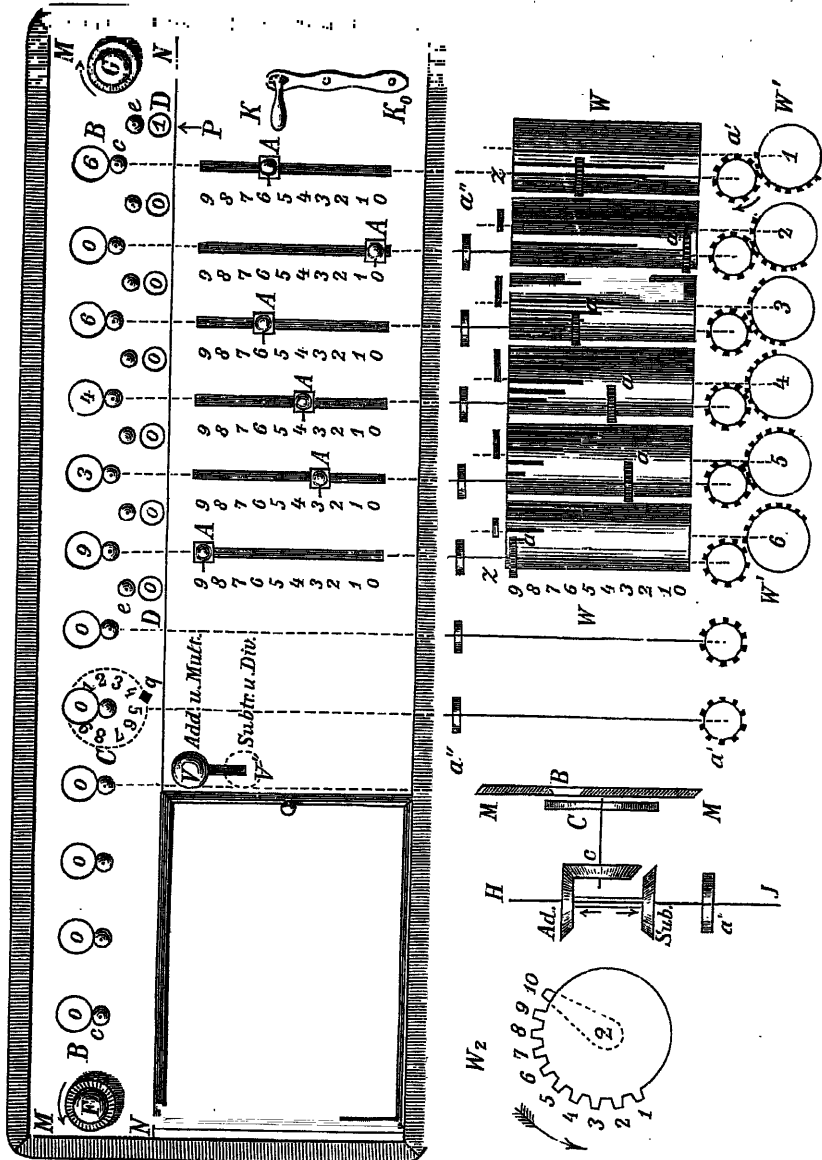
Wenn anfänglich die Zifferscheiben nicht auf 0 gestanden haben, so drehen sie sich doch bei einer solchen Operation genau um so viel Teile, als der Knopf A angiebt, wenn z. B. die erste Scheibe (von rechts) 6 zeigt, und der entsprechende Knopf A ebenfalls 6, und man dreht die Kurbel einmal um, so zeigt dabei das Schauloch 6. folgende Veränderungen: 7 8 9 0 1 2, und am Schluss der Operation hat man 2. Alle andern Scheiben sind dabei unverändert geblieben. Das ist aber nicht das, was wir wollen, wir kommen deswegen jetzt zu der

Zehnerübertragung. Die Axen der Räder a tragen nicht bloss diese Räder a selbst, sondern in der Verlängerung auch noch die Räder $a''a''$, welche jedoch mit den Walzenzähnen nicht in Berührung kommen; dagegen tragen die Walzenaxen ebenfalls in der Verlängerung noch besondere Zähne z, welche zwar im allgemeinen nicht in der Ebene $a''a''$ der Räder a'' liegen, und deswegen nicht in dieselben greifen können, welche jedoch ausnahmsweise in die Ebene $a''a''$ geschoben werden können.

Jede Zifferscheibe hat nämlich unten einen Daumenansatz q (s. im oberen Teil der Zeichnung), und in dem Moment, in welchem die Zifferscheibe von 9 auf 0 übergeht, drückt dieser Daumen q mittelst einer Hebelübersetzung den besonderen Zahn z der *nächsten* Walze in die Ebene der Räder $a''a''$.

Die Zähne z sind im Grundriss unserer Zeichnung durch verschieden lange Striche angedeutet, weil die Zähne verschiedene Winkel mit dem Horizont machen und sich deshalb verschieden lang projizieren.

Projiziert man eine Walze nebst dem Zahn z auf ihre Querschnitts-Ebene, so erhält man, wie die besondere grössere Zeichnung W_2 (s. links unten in der Zeichnung) für die zweite Walze zeigt, einen Kreis mit 10 Zähnen, denn zu den 9 verschieden

Fig. 1.
Die Rechenmaschine.

langen Walzenzähnen, welche sich als die gleich geformten Zähne 1 2 3 4 5 6 7 8 9 projizieren, kommt noch der Zehnerzahn 10 mit unmittelbarem Anschluss.

Wir kehren nun zu den Walzen-Umdrehungen zurück und denken uns wieder den ersten Knopf *A* auf 6 gestellt. Steht die zugehörige Zifferscheibe auf 0, so wird sie durch eine erste Kurbeldrehung auf 6 gebracht, und durch eine zweite Drehung

allerdings wieder wie früher auf 2, allein während sie von 9 auf 0 sprang, setzte der Daumen q die Zehnerübertragung an der *zweiten* Walze in Thätigkeit, und die *zweite* Scheibe ist um 1 vorgerückt, obgleich der zweite Knopf auf 0 stand.

Wenn der zweite Knopf A vorher nicht auf 0 stand, so hat bei einer Kurbeldrehung die zweite Scheibe sowohl die ihr unmittelbar von der Walze übertragene Drehung auszuführen, als auch die etwa durch die Zehnerübertragung von der ersten Scheibe her geforderte Drehung um einen Teil, und damit diese zwei Ursachen die gewünschten Wirkungen hervorbringen, erfolgt immer die Zehnerübertragung, *nachdem* alle Walzenzähne an der Eingriffsstelle vorübergegangen sind, denn würde etwa der Zehnerzahn gleichzeitig mit einem Walzenzahn eingreifen, so würden diese beiden Zähne an ein und derselben Axe doch keine andere Drehung hervorbringen, als einer allein.

Der Zehnerzahn z_n (für die n^{te} Walze) wird in dem Augenblick in die Ebene der Zehnerräder $a''a''$ geschoben, wenn unter dem Schauloch B_{n-1} der Übergang von 9 auf 0 stattfindet, d. h. während die Walze W_{n-1} wirksam ist. Der Zehnerzahn z_n muss aber natürlich vorher in die Wirkungsebene $a''a''$ geschoben werden, ehe er daselbst auf das Rad a''_n wirken kann. Die Zeit der Wirkung dieses Zehnerzahnes z_n ist also zwei Bedingungen unterworfen:

1) er muss *nach* allen Zähnen seiner eigenen Walze W_n wirken,

2) er muss wirken, *nachdem* alle Zähne von W_{n-1}, *den Zehnerzahn* z_{n-1} *inbegriffen*, an ihrer Eingriffsstelle vorübergegangen sind, denn möglicherweise wird der Übergang von 9 auf 0 im Schauloche B_{n-1} nicht durch einen Walzenzahn, sondern gerade durch den Zehnerzahn z_{n-1} veranlasst, dieser Übergang von 9 auf 0 bei B_{n-1} muss aber, wie schon früher erwähnt, als Ursache des Vorschiebens von z_n in die Ebene $a''a''$, dem Eingriff von z_n vorangegangen sein.

Aus der Vereinigung dieser beiden Bedingungen folgt die Notwendigkeit fortgesetzter *Verzögerung der Walzenwirkung* derart, dass W_2 erst eingreifen darf, wenn mindestens der erste Zahn von W_1 gewirkt hat (oder hätte wirken können) und bei 6 Walzen können gleichzeitig wirken, z. B.:

Walze:	W_6	W_5	W_4	W_3	W_2	W_1
Zahn:	Z_6	Z_5	Z_4	Z_3	Z_2	Z_1

Hieraus erklärt sich die verschiedene Zahnstellung der Walzen $W'W'$ (s. unten rechts in der Zeichnung).

Ein leerer Raum auf jeder Walze ist nötig, damit die Wirkungen verschiedener Kurbeldrehungen gehörig auseinander gehalten werden; wenn gleich nach dem 9. Zahn und der Lücke für den 10. Zahn auf jede Walze wieder der 1. Zahn käme, so würde *eine* Kurbelumdrehung wegen der Walzenverzögerung nicht alle Zähne zum Eingriff bringen.

Es bleibt nun nur noch übrig, zu zeigen, dass die Bewegung der Zifferscheiben vollständig umgekehrt werden kann:

Die Kurbel K, die Längentransmission und die daran gekuppelten Walzen, sowie auch die von den Walzen mitgenommenen Räder a und a'', drehen sich immer in *demselben* Sinn, dagegen ist die Bewegungsübertragung von den Rädern a und a'' auf die Zifferscheiben C eine doppelte.

In der besonderen Zeichnung (links unten) ist JH die Axe eines Rades a und eines Rades a''; auf dieser Axe stecken *zwei* konische Räder $Ad.$ und $Sub.$, von denen das erste als im Eingriff befindlich mit dem konischen Rad c gezeichnet ist. c steckt auf derselben Axe mit der Ziffernscheibe C, welche sich unter dem Schauloch B dreht. Die zwei Kegelräder $Ad.$ und $Sub.$ haben unter sich konstanten Abstand, können aber

zusammen auf ihrer Axe verschoben werden mittelst des Wendehebels V (in der Hauptzeichnung). Steht dieser Hebel in der Lage V (*Ad.* und *Mult.*), so greift unten das Rad *Ad.* in das Rad c, und die Ziffernscheibe C dreht sich in dem positiven Sinn 0 1 2 3 . . . 8 9. Steht aber der Wendehebel in der Lage V' (*Subtr.* und *Div.*), so greift unten das Rad *Sub.* in das Rad c, und die Ziffernscheibe C dreht sich in dem negativen Sinn 9 8 7 6 . . . 1 0. Der Wendehebel V kann nur in Bewegung gesetzt werden, wenn die Kurbel K in ihrer Normalstellung ist.

Der ganze Rahmen $MMNN$ mit den daran befestigten Zifferscheiben C und den damit centrischen konischen Rädern c ist um die Axe MM drehbar, und längs derselben verschiebbar, so dass man nach Belieben die erste Walze auf die erste Ziffernscheibe, oder auf die zweite, dritte u. s. f. Ziffernscheibe wirken lassen kann.

Dieser Rahmen $MMNN$ hat endlich noch eine besondere Reihe von Ziffernscheiben, welche sich um die Axen e unter den Schaulöchern D drehen.

Diese Scheiben tragen je folgende 18 Ziffern:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Von diesen Scheiben dreht sich aber immer nur *eine*, nämlich diejenige, welche gerade sich an der Pfeilmarke P befindet. Die Ziffern 0 1 2 . . . 9 entsprechen der Multiplikation, und können zur Kontrollierung des Multiplikators, durch die Zahl der Kurbeldrehungen, dienen. Die zweite Hälfte 9 8 7 . . . 2 1 0 jener 18 Ziffern wird beim Dividieren gebraucht, ihre Reihenfolge erscheint hier umgekehrt, d. h. abermals 0 1 2 3 . . . 9, und es wird dadurch der Quotient bestimmt.

Noch sind zu erwähnen die zwei Knöpfe F und G, durch deren Drehung man die sämtlichen Zifferscheiben B und D auf einmal auf 0 stellen kann.

Die verschiedenen Federn und sonstigen Vorrichtungen, welche zur Sicherung des Gangs aller Teile dienen, sowie mehrere Kleinigkeiten, welche sich selbst erklären, übergehen wir.

Nach dieser Beschreibung des Instruments wird es genügen, die Anwendung durch einige Beispiele zu erläutern:

Multiplikation. 934606 × 762142.

Man steckt mit den Knöpfen A den einen Faktor 934606 als Multiplikandus auf, wie unsere Figur zeigt. Der Wendehebel steht auf *Mult.* Das Schauloch D_1 auf P, alle Schaulöcher B zeigen 0.

Man dreht die Kurbel 2mal, und erhält: 1 869 212

Man hebt den Rahmen MN und bringt D_2 auf P, dreht sodann 4mal, und erhält: 39 253 452

Man hebt den Rahmen abermals, stellt D_3 auf P, dreht 1mal und erhält: 132 714 052

So fährt man fort mit den übrigen Ziffern 2 6 7 des Multiplikators, und erhält der Reihe nach: 2 001 926 052
58 078 286 052
712 302 486 052

Die letzte Zahl ist das gesuchte Resultat.

Man wählt natürlich hiebei die kleinere Zahl als Multiplikator.

Division. 712 302 486 052 : 934 606.

Man steckt den Dividendus 712 302 486 052 auf den Ziffernscheiben B von links anfangend auf, ebenso den Divisor 934 606 auf den Scalen mittelst der Knöpfe A.

Die Scheiben D werden auf 0 gestellt, und der Wendehebel V auf *Div.* Wenn nun die erste Ziffer links des Dividendus grösser ist als die erste Ziffer des Divisors, so fährt man mit dem Rahmen MN ganz nach rechts hinaus, andernfalls, wie bei unserem Beispiel, fährt man um einen Teil weniger, so dass man hat:

7 1 2 3 0 2 4 8 6 0 5 2
9 3 4 6 0 6

Nun dreht man die Kurbel so lange, bis über dem unverändert bleibenden Divisor eine dem Stellenwert nach kleinere Zahl bleibt. In unserem Falle dreht man 7mal und findet:

0 5 8 0 7 8 2 8 6 0 5 2
9 3 4 6 0 6

So fährt man mit successive links geschobenem Rahmen fort, d. h. man macht die Umkehrung der Multiplikation, und liest schliesslich auf den Scheiben D von links nach rechts den Quotienten ab, nämlich:

7 6 2 1 4 2

Addition und Subtraktion brauchen nicht weiter erklärt zu werden.

Hat man (z. B. bei einer Flächenrechnung) einen Ausdruck von der Form:

$$ab \pm cd \pm ef\,..$$

auszurechnen, so bildet man das erste Produkt ab, lässt das Produkt stehen, und stellt zunächst den Wendehebel so, wie es das Vorzeichen des folgenden Produkts verlangt, dann wird mit dem zweiten Produkt, unbekümmert um das auf den Scheiben B bereits befindliche erste Produkt, fortgefahren; ebenso geschieht mit den folgenden, bis man am Schluss das Resultat auf den Scheiben B abliest.

Sehr bequem machen sich offenbar arithmetische Reihen, indem man die Differenz auf A aufsteckt und dann bei jeder Kurbeldrehung ein neues Glied bekommt.

Kapitel IV.

Die Libelle.

§ 33. Die Röhren-Libelle.

Die Libelle, oder Wasserwage, dient zur Bestimmung der horizontalen Richtung nach der Oberfläche einer ruhenden Flüssigkeit.

Die Flüssigkeit ist hiebei in ein Glasgefäss eingeschlossen, das entweder die Gestalt einer ausgebauchten Röhre, oder einer oben gewölbten Dose hat, und demnach unterscheidet man Röhren-Libellen und Dosen-Libellen (von letzteren wird in § 36. gehandelt werden).

Eine Röhren-Libelle besteht im wesentlichen aus einem Glasgefäss, dessen Innenfläche durch Umdrehung eines flachen Kreisbogens um eine Sehne erzeugt gedacht werden kann (Fig. 1. S. 101). Zuweilen ist übrigens nur ein Teil der Innenfläche, nämlich der obere Teil, so geformt, während der untere Teil cylindrisch ist (Fig. 2. S. 101).

Die mechanische Herstellung der Libellen-Röhre geschieht durch Ausschleifen einer vorher cylindrischen Röhre (bei schlechteren Libellen durch Biegen einer cylindrischen Röhre). Der seitliche Verschluss geschieht durch Zuschmelzen, oder Einkitten eines Glasstöpsels. Die Röhre ist soweit mit Weingeist oder Schwefeläther gefüllt,

Fig. 1.
Längenschnitt einer Röhren-Libelle (mit übertriebener Krümmung).

Fig. 2.
Röhren-Libelle, nur oben geschliffen, mit Scheidewand S.

dass nur ein kleiner Teil oben von Flüssigkeit frei bleibt, welcher sich aussen in Gestalt einer Blase zeigt. Um die Länge der Blase, welche sich mit der Temperatur der Flüssigkeit verändert (und bei mangelhaftem Verschluss stets grösser wird) regulieren zu können, versieht man grössere Libellen mit einer Scheidewand S (Fig. 2.), welche verschiedene Verteilung der Flüssigkeit in beiden durch sie abgegrenzten Räumen, nämlich der eigentlichen Libelle und der „Kammer“ gestattet.

Für Feldmessungen ist eine zugeschmolzene Libelle ohne Kammer immer vorzuziehen, denn die nicht zugeschmolzenen, nur zugekitteten Libellen sind selten genügend dicht. Die Blasen werden deswegen mit der Zeit immer länger, und schliesslich, trotz der Kammer, zu lang.

Die Blasen-Länge ist auch mit der Temperatur veränderlich (s. § 37.).

Die Fassung der Libelle dient zur Verbindung der Libelle mit derjenigen Geraden oder Ebene, deren Horizontalität untersucht werden soll. (Linealkante, Fernrohr-Axe etc.) Nach Verschiedenheit der Fassung kann man unterscheiden: liegende, stehende, hängende, Reiter-Libellen etc. Die Fassung muss eine Korrektionsvorrichtung haben, bestehend in Zug- und Druckschrauben, Schraube mit Gegenfeder u. s. w., damit die Lage der Libelle, und damit die Libellen-Axe gegen die Fassung in vertikalem und zuweilen auch in horizontalem Sinn geändert werden kann.

Liegende Libellen, z. B. zur Horizontalstellung einer Glasplatte (künstlicher Horizont), können auch *ohne Metall-Fassung* gebraucht werden. Es wird hiebei die Glasröhre unten nach einer Ebene so weit angeschliffen, dass sie feste Lage hält. Eine solche Lage-Libelle braucht auch keine Korrektions-Schrauben, und ist, wenn *ein*mal richtig, immer richtig, so lange sie überhaupt dienstfähig bleibt.

§ 34. Empfindlichkeit der Libelle.

Die Oberfläche der in der Glasröhre eingeschlossenen Flüssigkeit ist eine horizontale Ebene (abgesehen von der an den Rändern entstehenden Aufbiegung), und die Blasenmitte zeigt den höchsten Punkt der Innenfläche an.

Um die Stellung der Blasenmitte auf der Röhre zu bestimmen, ist die letztere mit einer Teilung versehen, die bei kleineren Libellen nur aus wenigen gegen die Röhrenmitte symmetrisch liegenden Strichen, bei grösseren Libellen aber zweckmässig aus einer durchlaufenden gleichförmigen Teilung mit Bezifferung besteht. Die Mitte der Teilung, oder ein der Mitte naheliegender Punkt, gilt als „Normalpunkt der Teilung“.

Axe der Libelle heisst die im Normalpunkt der Teilung an die Innenfläche der Libelle nach der Längen-Richtung gezogene Tangente*). Wenn die Axe horizontal ist, so fällt die Blasenmitte mit dem Normalpunkt zusammen, oder „die Blase spielt ein".

Wenn die Axe nicht horizontal ist, so hat die Blasenmitte einen gewissen Abstand vom Normalpunkt, der „Ausschlag" der Blase heisst, und gewöhnlich in Einheiten der Teilung „Strichen" (linear) gemessen wird. Die Teilungs-Einheit (1 Strich) ist meist $= 2{,}26^{mm}$, d. h. 1 Pariser Linie.

Der Begriff der Empfindlichkeit einer Libelle ist durch Fig. 1. und Fig. 2. veranschaulicht.

Fig. 1. Einspielende Libelle. Fig. 2. Geneigte Libelle mit dem Ausschlag a.

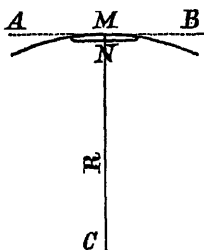
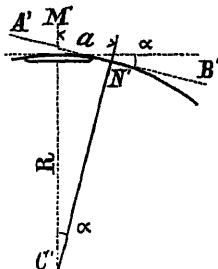



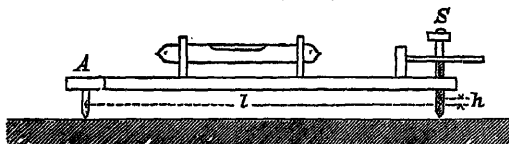
Fig. 1. zeigt eine Libelle mit horizontaler Axe AB, und Fig. 2. zeigt eine Libelle mit geneigter Axe $A'B'$. Im ersten Fall fällt die Blasenmitte M mit dem Normalpunkt N zusammen, im zweiten Falle hat die Blasenmitte M' von dem Normalpunkt N' den Abstand a, welcher „Ausschlag" heisst.

Wenn C, bzw. C' der Krümmungsmittelpunkt der Libelle ist, so ergiebt sich zwischen dem Ausschlag a, der Axen-Neigung α und dem Krümmungshalbmesser R die Beziehung:

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{R}{\varrho} \tag{1}$$

Das Verhältnis $\frac{a}{\alpha}$ der Masszahlen für den Ausschlag a und die Axen-Neigung α ist also konstant, wenn der Krümmungshalbmesser R auf die ganze Länge der Libelle konstant ist, d. h. wenn die Libelle gut kreisförmig geschliffen ist. Dieses wird bei der Herstellung angestrebt und wird bei der Theorie angenommen.

Die Empfindlichkeit wird gewöhnlich durch die einem Ausschlag a von 1 Strich entsprechende Neigung α angegeben.

Fig. 3. Libellen-Prüfer.

Zur Bestimmung der Empfindlichkeit dient ein in Fig. 3. skizzierter Apparat, der im wesentlichen in einem starren Arm von der Länge l besteht, der an einem Ende mittelst zweier gewöhnlicher Stützen A, und am andern Ende mittelst einer durch

*) Eine analytisch-geometrische Theorie der Libellen-Axe ist von *Helmert* in der „Zeitschr. f. Verm. 1878", S. 185—192, angegeben.

ihn gehenden Schraube S, auf fester Unterlage aufliegt. Wenn h die Ganghöhe der Schraube, und l die Länge des Arms ist, so entspricht *einer* Schrauben-Umdrehung die Neigung:

$$\alpha_1 = \frac{h}{l} \varrho$$

Die Dimensionen h und l sind so zu wählen, dass α eine runde Zahl wird. Z. B. hat unser Hannoverscher Libellen-Prüfer $h = 0{,}51^{mm}$ und $l = 438{,}3^{mm}$, womit $\alpha_1 = 4$ Minuten wird, weshalb die Scheibe in 240 Teile geteilt ist.

Die hier nötige Messung der Ganghöhe h kann man wohl genügend dadurch machen, dass man 10 oder 20 u. s. w. Gänge an verschiedenen Stellen der Schraube abzählt und mit dem Zirkel misst. Damit kann man den Wert h wohl auf etwa 1 % genau finden, also auch Libellen entsprechend genau bestimmen, was für alle Zwecke der Feld- und Landmessung ausreicht.

Folgendes ist ein Beispiel einer Libellen-Empfindlichkeits-Bestimmung (Libelle des Nivellier-Instruments *Bamberg*):

Schraube	Blase		Ausschlag		Blasen-länge
	links	rechts	links	rechts	
3′ 0″	26,0	43,2			17,2
			1,6	1,6	
3 10	24,4	41,6			17,2
			1,6	1,5	
3 20	22,8	40,1			17,3
			1,7	1,7	
3 30	21,1	38,4			17,3
			1,4	1,4	
3 40	19,7	37,0			17,3
			1,5	1,5	
3 50	18,2	35,5			17,3
			1,4	1,4	
4 0	16,8	34,1			17,3
			1,5	1,5	
4 10	15,3	32,6			17,3
			1,6	1,5	
4 20	13,7	31,1			17,4
			1,5	1,5	
4 30	12,2	29,6			17,4
			1,5	1,5	
4 40	10,7	28,1			17,4
			1,6	1,6	
4 50	9,1	26,5			17,4
			1,5	1,5	
5 0	7,6	25,0			17,4
			1,6	1,5	
5 10	6,0	23,5			17,5
			1,5	1,5	
5 20	4,5	22,0			17,5
2′ 20″ = 140″	21,5	21,2	21,5	21,2	
			Mittel = 21,35		

Im Mittel hat man 21,35 Striche Ausschlag auf eine Neigung von 2′ 20″ = 140″. Auf 1 Strich kommt also:

$$\frac{140}{21{,}25} = 6{,}58''$$

Die Wiederholung der Messung in umgekehrter Folge gab 6,7″, wir nehmen also im Mittel:

Empfindlichkeit = 6,6″ auf 1 Strich.

Die Zeitdauer einer solchen Versuchsreihe war 20 Minuten. Oft ist es besser, noch langsamer zu verfahren, weil die Blase langsam zur Ruhe kommt.

Die Ausschläge sind für die 14 Schrauben-Bewegungen hinreichend gleich, nämlich zwischen den Grenzen 1,4 und 1,7 schwankend.

Wenn für gleiche Schrauben-Drehungen die Ausschläge gleich sind, so ist bewiesen, dass die Röhre gut kreisförmig geschliffen ist, sofern die Schraubengänge alle gleich sind (vgl. hiezu § 37.).

Umgekehrt kann man auch durch Vergleichung desselben Libellen-Ausschlags an verschiedenen Stellen der Schraube untersuchen, ob die einzelnen Schraubengänge gleich sind; dabei ist es nützlich, die linksseitigen Stützen A in Fig. 3. auch als Schrauben einzurichten.

Die Blasenlänge erscheint in dem obigen Beispiel etwas veränderlich, nämlich zwischen 17,2 und 17,5, was auf Temperatur-Änderung während des Versuchs oder vielleicht auch auf ungleiche Röhrenweite hindeutet.

Bei Instrumenten für Feld- und Landmessung sind etwa folgende Empfindlichkeiten zu empfehlen:

Hauptnivellierung	5″	auf 1 Strich von 2,26mm
Grosser Theodolit für Horizontalwinkel	10″	„ „ „ „ „
Kleiner Feldmess-Theodolit	20″	„ „ „ „ „
Dosen-Libelle	1′	
Setzlatte	2′	
Dosen-Libelle für Nivellierlatten . .	5′	

Wenn die Libellen zu empfindlich sind, d. h. nicht zur Ruhe kommen, so erschweren sie die Arbeit, ohne an Genauigkeit etwas zu nützen.

§ 35. Prüfung der Libelle durch Umsetzen und Drehen.

Obgleich die verschiedenen Prüfungen und Berichtigungen, welche bei Libellen vorkommen, besonders zu behandeln sind, wenn von den Instrumenten die Rede ist, an welchen die Libellen angebracht sind, so ist es doch nützlich, sich ein- für allemal von der Wirkung des Umsetzens einer Röhren-Libelle zu überzeugen.

Wenn in Fig. 1. AB eine Libellenaxe, und CD eine mit ihr fest verbundene Linealkante, oder sonst eine feste Gerade, Axe, ist, und untersucht werden soll, ob beide Axen AB und CD parallel sind, so setzt man CD auf eine feste Unterlage, und giebt dieser eine solche Stellung, dass die Blase einspielt, also die Axe der Libelle horizontal ist. Legt man nun die Libelle um (in die Lage $A'B'$), so wird die Blase nur dann einspielen, wenn die Unterlage horizontal ist; andernfalls entspricht der Ausschlag der Blase dem *doppelten* Winkel zwischen AB und CD, d. h. dem Winkel 2α. Man hat daher mittelst der Libellen-Korrektions-Schraube die *Hälfte* des Ausschlags wegzuschaffen, und, wenn man zugleich die Unterlage horizontal machen will, diese so zu neigen, dass die andere Hälfte des Ausschlags verschwindet. Dieses Verfahren ist im wesentlichen das bei allen Libellen-Korrektionen zur Anwendung kommende.

Fig. 1.
Umsetzen einer Libelle.

Bei grossen und empfindlichen Libellen kann man, statt mittelst der Korrektions-Schrauben die Libellen-Axe zu neigen, einen anderen Normalpunkt auf der Teilung wählen, und damit eine neue Axe bestimmen.

Man habe z. B. eine Libelle mit durchlaufender Libelle, mit dem Mittelstrich 25. Dieselbe gebe die Ablesungen entsprechend Fig. 1.:

Lage AB	links:	16,4	rechts:	37,8	Mittel = 27,1
Lage $B'A'$	rechts:	13,6	links:	35,0	„ = 24,3
	Mittel	15,0		36,4	25,7

Gesamt-Mittel: 25,7

Man könnte nun mit den Korrektions-Schrauben dahin wirken, dass das Mittel der Ablesungen von 25,7 auf 25,0 kommt, indessen ist es einfacher, nun den Punkt 25,7 als Normalpunkt N anzunehmen, und mechanisch nichts mehr zu ändern.

Um mit Hilfe einer Libelle die Neigung einer nahezu horizontalen Geraden (z. B. einer horizontalen Instrumenten-Axe) zu bestimmen, setzt man die Libelle in beiden Lagen auf, und erhält aus dem arithmetischen Mittel beider Ausschläge die gesuchte Neigung, unabhängig von dem Libellen-Fehler α (Fig. 1.), ferner bestimmt die halbe Differenz der Ausschläge diesen Fehler α, d. h. den Winkel zwischen der Libellen-Axe und der Auflage-Linie.

Wenn eine Reiter-Libelle auf eine cylindrische Instrumenten-Axe aufgesetzt wird, und wenn bei einer geringen Drehung um diese Axe die Blase ausweicht, so ist das ein Beweis, dass die Libellen-Axe gegen die Drehungs-Axe eine Kreuzung hat oder windschief liegt. Diese Libellen-Kreuzung, welche z. B. bei Nivellier-Instrumenten besondere Beachtung verlangt, wird durch seitliche Korrektions-Schrauben beseitigt, worauf wir hier nicht weiter eingehen.

§ 36. Die Dosen-Libelle.

Eine Dosen-Libelle besteht aus einem flachen Gefäss mit schwach gewölbter Glas-Deckplatte.

Die Dosen-Libelle wirkt nach allen Richtungen wie eine Röhren-Libelle, und zeigt also, auf eine Ebene aufgesetzt, sofort die Neigung der Ebene nach Richtung und Grösse, wenn angenommen werden kann, dass die Axen-Ebene der Dosen-Libelle, d. h. die in der Mitte an die innere krumme Fläche gelegte Berührungs-Ebene parallel der Unterlags-Ebene ist.

Um dieses zu untersuchen, setzt man die Dosen-Libelle auf ein Legebrett mit Stellschrauben, und bringt sie mit diesen Stellschrauben zum Einspielen. Nun dreht man die Dose um sich selbst, und sieht zu, ob ein Ausschlag entsteht, und nach welcher Richtung der Ausschlag am grössten ist. Die so gefundene, am weitesten ausschlagende Blase wird mit Korrektions-Schrauben hälftig gegen die Mitte getrieben, und wenn man dann die Blase wieder auf dem Legebrett zum Einspielen bewegt, so wird sie beim Umdrehen stehen bleiben.

Dosen-Libellen haben meist geringe Empfindlichkeit, sie zeigen häufig nur 1′ deutlich oder sind auch noch weniger empfindlich, sie sind dafür aber sehr bequem.

Häufig hat man Dosen-Libellen auch an Instrumenten, welche ausserdem empfindlichere Röhren-Libellen haben.

Eine Dosen-Libelle dient in solchem Falle nur zum *vorläufigen* Einstellen, womit erhebliche Zeitersparung erzielt werden kann.

§ 37. Einfluss der Wärme und des Glases.

Die erste Einwirkung der Wärme auf die Libelle besteht in der Änderung der Blasenlänge, welche in der Kälte erheblich grösser ist als in der Wärme.

Wir fanden z. B. bei einem Nivellier-Instrument (*Bamberg*), dessen Libelle keine Scheidewand hat:

Temperatur	$t =$	0°	5°	10°	15°	20°	25° C.
Blasenlänge	$l =$	26,5	24,5	22,5	20,5	18,5	16,5 Striche

(1)

$$\varDelta t = 1^\circ \text{ entspricht } \varDelta l = 0{,}4 \text{ Striche.}$$

Wenn man diese Verhältnisse für eine Libelle bestimmt hat, so kann die Libelle zugleich als Thermometer benützt werden (sofern sie keine Scheidewand S und Kammer hat, Fig. 2. § 33. S. 101).

Auch die Empfindlichkeit ist mit der Temperatur etwas veränderlich; für Feld- und Landmessung ist das jedoch wenig von Bedeutung. Wir fanden z. B. bei der vorerwähnten Libelle ohne Scheidewand, deren Blasenlänge sich also nur infolge der Temperatur verändert, bei Temperaturen zwischen 0° und 25° die Empfindlichkeit etwa zwischen 6,7″ und 6,0″ auf 1 Strich.

Zur Untersuchung der Empfindlichkeit bei verschiedenen Blasenlängen, aber konstanter Temperatur wurde mit dem Nivellier-Instrument Nr. IV. der Preussischen Landes-Aufnahme folgender Versuch gemacht, wobei die Blasenlänge mittelst der Scheidewand willkürlich geändert wurde:

Temperatur	*Blasenlänge*	*Empfindlichkeit*
15,1°	29,7 Striche	3,70″ auf 1 Strich
15,7	24,1	3,93
15,2	17,4	3,78
15,3	5,8	3,98
15,8	3,7	4,12

(2)

Wenn hiernach, wie auch sehr natürlich ist, die Blasenlänge auf die Empfindlichkeit in rein geometrischem Sinn fast keinen Einfluss hat, so besteht doch in anderem Sinne ein solcher Einfluss. Sehr kleine Blasen sind sehr träge, sie bewegen sich langsamer als grosse Blasen, was auch durch die Reibung der Flüssigkeit an den Glaswänden völlig erklärt wird.

Es ist deshalb zu empfehlen, die Blasenlänge etwa gleich einem Drittel oder der Hälfte der geschliffenen Röhrenlänge zu machen.

Die Wärme übt auf die Libellen verschiedene Einflüsse aus:

Wenn eine ruhig stehende Libelle einseitig erwärmt wird, so bewegt sich die Blase, und zwar geht sie der Wärmequelle zu. Man schützt desswegen die Libellen durch Überziehen der Fassung mit schlechten Wärmeleitern (Papier) oder durch doppelte Fassung.

Im Felde muss ein Instrument mit einer empfindlichen Libelle stets unter einem Sonnenschirm gehalten werden.

Ausser diesen Abweichungen von der rein geometrischen Theorie zeigen die Libellen manchmal auch andere Missverhältnisse, welche in der Beschaffenheit des Glases und der Füllungsflüssigkeit ihren Grund zu haben scheinen.

Als Beispiel können wir die oben bei (1) benützte Libelle von 6,5″ Empfindlichkeit anführen, welche nach einigen Jahren Störungen zeigte, wie wenn sie ganz

ungleichförmig geschliffen wäre. Diese Libelle gab nämlich im Juni 1886, auf dem Prüfer Fig. 3. § 34., unter Anderem folgendes:

Schraube	Blase		Ausschlag		Blasen-länge
	links	rechts	links	rechts	
3′ 40″	2,2	19,5			17,3
			5,4	5,3	
3′ 50″	7,6	24,8			17,2
			0,1	0,1	
4′ 0″	7,7	24,9			17,2
			2,2	2,1	
4′ 10″	9,9	27,0			17,1
			0,0	0,0	
4′ 20″	9,9	27,0			17,1
			0,1	0,1	
4′ 30″	10,0	27,1			17,1
			3,7	3,6	
4′ 40″	13,7	30,7			17,0
			. .	. .	
. .	. .	. .			. .

Herr *Bamberg* hat uns darüber folgendes mitgeteilt:

„Der Fehler, dass die Libelle nicht mehr funktionierte, lag daran, dass die Füllungsflüssigkeit stark abgesetzt hatte, resp. das Glas durch wässerige Beimischung, wahrscheinlich durch Absorption während des Schleifens, Teilchen ausgeschieden hatte, welche punktartig die Schliffläche belegten und so den regelmässigen Gang der Blase hemmten. Es ist dieses ja eine bekannte Erscheinung fast aller Libellen der neueren Zeit und hat seinen Grund in dem Bestreben der Glasfabrikanten, möglichst leicht schmelzbare und verarbeitbare Gläser zu erzielen auf Kosten der Dauerhaftigkeit derselben gegen äussere Einflüsse.

Wie die Erfahrungen der letzten Jahre gezeigt haben, lässt sich das Ansetzen der Libellen dadurch vermeiden, dass dieselben nach dem Schliff längere Zeit hindurch (circa 14 Tage) in Alkohol und Äther gespült werden. Nachdem diese Procedur mit Ihrer Libelle vorgenommen worden ist und dieselbe wieder gefüllt, zeigt sich dieselbe vollendet tadellos."

Die fragliche Libelle hat in der That wieder den alten Gang der Blase und Zuverlässigkeit der Angaben wieder erlangt.

Es mag am Platze sein, hier auch eine Stelle anzuführen aus einem Votum des Chefs der trigonometrischen Abteilung der K. Landesaufnahme, Herrn Oberst-(Lieutenant) *Schreiber* (Mai 1883), als Beilage zu der Denkschrift betreffend die physikalisch-technische Reichsanstalt, Etat für das Reichsamt des Innern 1887/88, S. 62. Diese Stelle lautet:

„Es kommen alljährlich Fälle vor, dass Wasserwagen während der Feldarbeiten ohne erkennbaren Grund in der Zuverlässigkeit ihrer Angaben nachlassen, und selbst ganz unbrauchbar werden. Mit einem solchen Fall ist stets ein erheblicher Zeitverlust verbunden, weil die Glasröhre durch eine neue ersetzt und diese bezüglich des Wertes und der Genauigkeit ihrer Angaben untersucht werden muss. Wenn aber der Übelstand nicht frühzeitig bemerkt wird, so bleiben entweder die dadurch erzeugten Inkorrektheiten in der bereits geleisteten Arbeit zurück oder sie muss verworfen und wiederholt werden."

Kapitel V.

Die optischen Instrumente.

§ 38. Das Sehen mit freiem Auge.

Teils als Vorbereitung der Theorie der optischen Instrumente, Lupen, Fernröhre, Mikroskope u. s. w., teils wegen selbständiger Bedeutung für das Messen, behandeln wir hier das Sehen mit freiem Auge.

Die erste Frage betrifft die Genauigkeit, mit welcher man die gegenseitige Lage zweier benachbarter Punkte, namentlich das Aufeinanderfallen zweier Punkte, beurteilen kann, oder kurz die Genauigkeit des *Zielens* mit freiem Auge.

Man kann sich davon leicht durch Versuche Rechenschaft geben. Einen solchen einfachen Versuch machten wir im November 1879 mit Karlsruher Studierenden in folgender Weise:

Eine Latte hatte eine breite, weit sichtbare Teilung in Decimeter, und eine feine nur in der Nähe sichtbare Teilung in Millimeter. Ein Bleistift wurde als Zeiger willkürlich auf die Teilung gehalten, und von den 18 Meter entfernt stehenden Studierenden nach Schätzung an der Decimeter-Teilung abgelesen, wie unter a' im Folgenden angegeben ist. Nachher wurde die Ablesung a genau an der Millimeter-Teilung genommen, so dass $a' - a = \Delta$ den Fehler der Zielung auf 18 Meter vorstellt. So wurde folgendes erhalten:

a'	a	$a' - a = \Delta$	Δ^2
$0{,}64^m$	$0{,}634^m$	$+6^{mm}$	36
0,68	0,678	+2	4
0,66	0,659	+1	1
0,605	0,607	−2	4
0,65	0,645	+5	25
0,575	0,567	+8	64
0,44	0,439	+1	1
0,47	0,472	−2	4
0,72	0,721	−1	1
0,775	0,767	+8	64
			204

$$m = \sqrt{\frac{204}{10}} = \pm 4{,}52^{mm}$$

Der mittlere Zielfehler ist also $= \pm 4{,}52^{mm}$ auf 18^m Entfernung, also der mittlere Zielfehler als Winkel:

$$\delta = \frac{4{,}52}{18000}\,\varrho'' = \pm 52'' \tag{1}$$

Ähnliches wurde auch bei Wiederholungen dieses Versuches gefunden.

Das Zielen durch Kreuzscheibenspalten nach hölzernen Baken ist weniger genau, es giebt nämlich einen mittleren Fehler von etwa 2′, wie wir schon in § 5. S. 6 angegeben haben.

Andererseits kann man die Zielgenauigkeit noch erheblich steigern, wenn man nämlich die Zielpunkte günstig gestaltet und beleuchtet, wenn man z. B. eine scharfe Linie zwischen zwei Fäden einstellt, wobei schmale helle Streifen übrig bleiben.

Interessante Versuche in dieser Beziehung hat Ingenieur *R. Wagner* angestellt und in der „Zeitschr. f. Verm. 1886“, S. 87—89 und S. 97—104, mitgeteilt. Die Versuche waren im wesentlichen ebenso angeordnet, wie der vorhin beschriebene Versuch mit einer Decimeter-Latte, jedoch in feinerer Weise behandelt, mit Einstellung eines vertikalen Fernrohr-Fadens auf einen weissen Streifen auf schwarzem Grunde. Breite des Streifens $= 2^{mm}$, 8^{mm} und 20^{mm}, bei Zielweiten zwischen 50^{m} und 500^{m}. Bei 25facher Fernrohr-Vergrösserung fand sich im ganzen ein mittlerer Zielfehler von nur $\pm 0{,}287''$, also auf freies Sehen reduziert, $= 25 \times 0{,}287 = 7{,}2''$

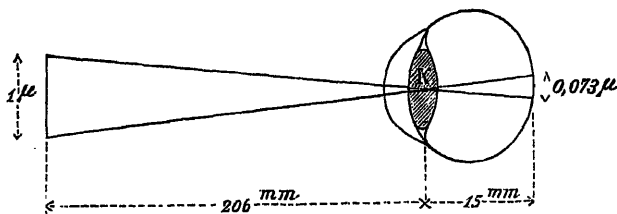
$$\delta = \pm 7{,}2'' \tag{2}$$

Die Genauigkeit ist hier 7mal grösser als bei dem rohen Versuche (1), und etwa 15mal grösser als bei dem Zielen durch Kreuzscheibenspalten nach hölzernen Baken.

Zur Vergleichung mit dem Folgenden bemerken wir noch, dass die Streifenbreite 20^{mm} bei 500^{m} Entfernung und 25facher Vergrösserung einen Gesichtswinkel giebt $= \dfrac{0{,}020}{500} \varrho'' \, 25 = 206'' = 3' \, 26''$. Dieses entspricht $2\,b$ + Strichbreite in der nachfolgenden Fig. 2. S. 111; die Strichdicke nehmen wir rund $= 60''$ an, es bleibt also $b = 73''$ oder etwa das Doppelte der Breite $34''$, welche sich bei den nachher zu berichtenden *Förster*schen Versuchen als die günstigste ergeben hat.

Alle diese Verhältnisse werden wesentlich aufgeklärt durch die physiologischen Ergebnisse der Untersuchung des menschlichen Auges.

Herr Prof. *Förster* hat hierüber im Jahr 1880 eine Abhandlung in „procès-verbaux“ des internationalen Mass- und Gewichts-Comite's geschrieben, welche wir in der „Zeitschr. f. Verm. 1880“, S. 117—124 in Übersetzung brachten. Hieraus entnehmen wir folgendes:

Fig. 1.
Schematische Darstellung des Sehens.

In vorstehender Fig. 1. ist K ein Punkt in der Axe der Linse des Auges, welcher näherungsweise (Zusammenfassung der beiden Knotenpunkte) als Centralpunkt bei der Erzeugung von Netzhautbildern betrachtet werden kann.

Wenn ein Linien-Element von 1^{μ} im Abstand 206^{mm} vom Auge Lichtstrahlen auf die Augenlinse wirft, so entsteht auf der Netzhaut, 15^{mm} hinter dem Punkte K, ein Bild von der Grösse:

$$1^{\mu} \times \frac{15}{206} = 0{,}073^{\mu} \tag{3}$$

Dabei mag 1^{μ} vorerst irgend welche Grösse bedeuten, nachher werden wir darunter $0{,}001^{mm}$ verstehen, so dass dann der Gesichtswinkel für 1^{μ} wird:

$$\frac{1^{\mu}}{206^{mm}} \varrho'' = \frac{0{,}001^{mm}}{206^{mm}} \, 206265'' = 1'' \tag{4}$$

Es wird nun die Frage aufgeworfen: Welches muss die Minimal-Dimensio eines Bildes auf der Netzhaut sein, wenn dieses Bild noch sicher wahrgenomme werden soll?

Schon im vorigen Jahrhundert war eine ähnliche Frage der Gegenstand exper mentеller Untersuchungen von *Jurin* und von *Tobias Mayer* in Göttingen. Ein Berich über alle hierauf bezüglichen Arbeiten, sowie die wichtigsten Resultate finden sich in de „Physiologischen Optik" von *Helmholtz* (S. 209—224 und S. 841—842), ferner sind hie die Versuche von *Laugier* („Astr. Nachr." Nr. 1086 [46. Band, 1857, S. 81]) und vo Allem die schönen Arbeiten von *J. A. Broun* (1875) im XXIII. Band der „Proceedings der Royal Society von London (S. 522) zu erwähnen.

Die Physiologie erklärt die Lokalisierung der Eindrücke, und folglich das Unte scheidungsvermögen, durch die in der Netzhautschicht befindlichen sogenannten *Zapfe* oder *Stäbchen.* Die kreisförmige oder polygonale Oberfläche der Endschnitte diese Zapfen hat einen mittleren Durchmesser von ungefähr $4{,}5^{\mu}$ und schwankt zwische 2^{μ} und 6^{μ}; dieselben finden sich am dichtesten auf dem sogenannten *gelben Flec* und ganz besonders in der sogenannten Netzhautgrube.

Man hat gefunden, dass zwei helle Punkte oder zwei helle Linien auf dunkeler Grunde (oder auch zwei dunkle Punkte oder Linien auf hellem Grund) nur getrennt gesche werden können, wenn der Gesichtswinkel, unter welchem ihr Abstand erscheint, etw 60″ erreicht, d. h. wenn auf der Netzhaut das Intervall zwischen den Centren beide Bilder den Wert $60 \times 0{,}073^{\mu} = 4{,}4^{\mu}$ erreicht. Die Übereinstimmung dieser Minima distanz mit dem soeben genannten mittleren Durchmesser der Stäbchen hat unmittelba die Erklärung der Trennungsgrenze geliefert; zwei nahe gleiche Objekte erscheinen der Auge nur dann als getrennt, wenn der Abstand der Mitten ihrer Netzhautbilder ebens gross oder grösser ist als der Abstand der Mitten zweier benachbarter Stäbchen; den nur unter dieser Bedingung, und unter der Annahme, dass die Intervalle zwischen de einzelnen Stäbchen sehr klein sind, was an der Stelle des gelben Flecks der Fall ist werden die optischen Schwerpunkte der Bilder der beiden Objekte auf zwei *verschieden* benachbarte Stäbchen fallen. Wenn dagegen die beiden Bildmitten noch auf die Ober fläche *eines* und desselben Stäbchens fallen, so werden sie nicht getrennt wahrgenom men, sondern sie gehen ineinander über, und ihre Wirkungen vereinigen sich. Es is von Wichtigkeit, dass diese physiologische Theorie sich zugleich stützt auf die That sache der Verminderung des Trennungsvermögens für diejenigen Stellen der Netzhaut auf welchen die Oberflächen der Stäbchen und deren Zwischenräume grösser sin als in der Netzhautgrube.

(Es scheint, dass man manchmal diese Grenze des Trennungsvermögens (4,4 Minimalabstand der Bildcentren) mit der anderen mindestens 50mal weiteren Grenz der Sichtbarkeit eines einzelnen Objekts verwechselt hat ($0{,}09^{\mu}$ Minimalgrösse de Netzhautbildes). In dieser Hinsicht ist der Versuch Nr. 6 von *Broun* a. a. O. seh instruktiv, weil er deutlich den Übergang der einen Grenze in die andere zeigt, un damit vor deren Verwechslung behütet.)

Prof. *Förster* hat nun Versuche angestellt in der Anordnung von Fig 2. (S. 111) d. h. es wurde ein Teilstrich oder ein Faden zwischen zwei Fäden so eingestellt, das links und rechts weisse Zwischenräume *b b* blieben, deren Gleichheits-Schätzung zu Einstellung in die Mitte diente.

Das Minimum der Lichtbreite *b*, bei welchem der helle Streifen überhaupt noch gesehen werden konnte, ergab sich, auf die Netzhaut projiziert, $= 2{,}5^{\mu}$, oder etwa

gleich $\frac{1}{2}$ Stäbchen-Breite (während nach *Broun* für eine *dunkle* Linie auf hellem Grunde $0{,}09^{\mu}$ genügt).

Fig. 2. Einstellung eines Teilstrichs zwischen zwei Fäden.

Mit dieser Minimalbreite $2{,}5^{\mu}$ wurde bei 25facher Vergrösserung ein wahrscheinlicher Faden-Einstellfehler $= \pm 0{,}25^{\mu}$ (auf der Netzhaut gemessen) gefunden. Reduziert man dieses auf Objektgrösse und freies Sehen, so hat man $b = 13{,}7 \times 2{,}5^{\mu} = 34^{\mu}$ oder $= \frac{1}{30}^{mm}$ entsprechend 34″ Gesichtswinkel, und einen wahrscheinlichen Einstellfehler $= 13{,}7 \times 0{,}25^{\mu} = 3{,}4^{\mu}$ oder rund $= 3{,}4''$ Gesichtswinkel. Oder bei 34facher Vergrösserung hätte man einen wahrscheinlichen Fehler von $0{,}1^{\mu}$ am Objekt.

Dagegen braucht man viel stärkere Vergrösserungen, wenn man dieselbe Einstellgenauigkeit erreichen will mit breiteren Lichtstreifen zwischen den Strichrändern und den beiden Fäden.

Wenn z. B. die Breite b dieser hellen Intervalle zwischen den Fäden und den Strichrändern so weit geht, dass sie 8 Nerven-Elemente (Stäbchen-Endflächen) der Netzhaut bedeckt, so braucht man zur Erreichung derselben Genauigkeit ($0{,}1^{\mu}$ wahrscheinlicher Einstellfehler) schon eine 85fache Vergrösserung, und wenn jene Breite bis zu 15 Nerven-Elementen wächst, so braucht man 150fache Vergrösserung.

Als wichtigstes Resultat dieser gesamten Untersuchung von Prof. *Förster* hat man sich zu merken: Man soll die zu vergleichenden Lichtbreiten b (Fig. 2) möglichst *klein* machen.

Andererseits hat man aus den groben Unterschieden, z. B. $\pm 2'$ Zielfehler bei der Kreuzscheibe und dem Winkelspiegel einerseits und $\pm 5''$ bis $\pm 10''$ bei den feinsten Messungen andererseits, den Schluss zu ziehen, dass viele unersetzliche Hilfsmittel des Feld- und Landmessers nicht nach optischen Rücksichten zu beurteilen sind.

Die deutliche Sehweite.

Das normale Auge sieht einen Gegenstand am deutlichsten, wenn er sich in einer gewissen Entfernung, etwa 20^{cm} bis 25^{cm} vom Auge befindet; diese Entfernung heisst *„deutliche Sehweite“*. Wird die Entfernung vergrössert, so kann sich das Auge der vergrösserten Entfernung auch noch anpassen (Akkommodation) bis zur Entfernung Unendlich, z. B. beim Sehen der Sterne.

Die Akkommodation ist mit Veränderung der Pupillen-Öffnung verbunden, die Pupille erweitert sich für die Ferne (*Helmholtz*, „Physiologische Optik 1867“, S. 103).

Wird die Entfernung eines Gegenstandes vom Auge erheblich *kleiner* als die deutliche Sehweite, so findet kein deutliches Sehen mehr statt (vgl. die Lupe § 40.).

Das Auge kann von zwei Gegenständen, welche *verschiedene* Entfernungen haben, immer nur *einen* deutlich sehen. Dieses ist der Haupt-Übelstand der Faden-Diopter (vgl. Fig. 2. § 4. S. 5), weil hier das Auge den etwa 20^{cm} entfernten Faden und ein vielleicht viele Hunderte von Metern entferntes Ziel zusammen beobachten soll.

Indessen gelingt es doch, indem man zwei verschieden entfernte Gegenstände nach einander betrachtet, bald den einen, bald den anderen deutlich zu sehen, und so zusammen zu bringen (vgl. *Helmholtz*, „Physiologische Optik 1867“, S. 92).

Verschiedene Personen haben verschiedene deutliche Sehweiten. Es giebt Kurzsichtigkeit, mit 10^{cm} und noch weniger Sehweite, und Weitsichtigkeit mit 50^{cm} Sehweite.

Kurzsichtige und Weitsichtige, welche passende Brillen tragen, gelten für die Okularstellungen u. s. w. bei Messinstrumenten als normalsichtig.

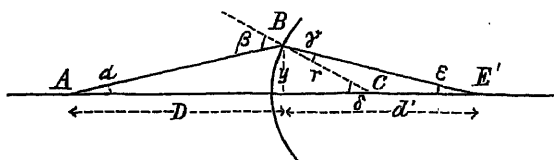
§ 39. Die Konvexlinse. *)

Eine *Linse* ist ein durch zwei Kugelabschnitte begrenzter Glaskörper. Von den verschiedenen Formen von Linsen kommt bei Messinstrumenten fast nur die *Konvexlinse* oder *Sammellinse* vor (mit dem Grenzfall plankonvexe Linse). Die Wirkung der Linsen beruht auf der Brechung des Lichts.

Axe der Linse heisst die gerade Verbindungslinie der zu beiden Begrenzungsflächen gehörigen Kugelmittelpunkte.

Brechung eines Lichtstrahls durch eine bikonvexe Linse (vgl. Fig. 1. und Fig. 2.). Ein Lichtstrahl geht von einem Punkte A (Fig. 1.) in der Axe der Linse aus, wird an beiden Linsenflächen gebrochen und schneidet die Axe wieder auf der andern Seite der Linse in einem Punkte E (Fig. 2.).

Wir betrachten zuerst, nach Fig. 1., nur die Brechung an der Vorderseite der Linse.

Fig. 1.
Brechung an der Vorderseite der Linse.

ABE' ist der Weg des Lichtstrahls, C ist der Kugelmittelpunkt.

Der Kugel-Halbmesser sei r, das Brechungs-Verhältnis für den Übergang des Strahls von Luft in die Linse sei μ.

Aus Fig. 1. nimmt man folgende Gleichungen:

Ordinate: $y = D \tan \alpha = r \sin \delta = d' \tan \varepsilon$

Brechung in B: $\sin \beta = \mu \sin \gamma$

Winkelsummen: $\beta = \alpha + \delta \quad ; \quad \delta = \gamma + \varepsilon$

Es wird nun angenommen, dass alle Winkel α , β , γ , δ , ε sehr klein sind, dann gehen die vorstehenden Gleichungen in folgende über:

$$D\,\alpha = r\,\delta = d'\,\varepsilon \tag{1}$$

$$\beta = \mu\,\gamma \tag{2}$$

$$\beta = \alpha + \delta \quad ; \quad \delta = \gamma + \varepsilon \tag{3}$$

Hiemit berechnet man aus (3) , (2) und (1):

$$\alpha + \delta = \mu\,\gamma = \mu\,(\delta - \varepsilon) = \mu \left(\frac{d'}{r}\,\varepsilon - \varepsilon\right) = \mu\,\varepsilon \left(\frac{d'}{r} - 1\right) \tag{4}$$

aus (1):

$$\alpha = \frac{d'}{D}\,\varepsilon \qquad \delta = \frac{d'}{r}\,\varepsilon \tag{5}$$

*) Wir geben in den folgenden Paragraphen eine elementare Darstellung der Linsen-Gesetze, ohne Rücksicht auf die chromatischen und sphärischen Abweichungen, Lichtverluste u. s. w. Die *Gauss*sche Theorie der Haupt- und Knotenpunkte ist in § 42. benützt, im übrigen ist der „optische Mittelpunkt“ und ähnliche Bezeichnungen nach der älteren Anschauung beibehalten.

Setzt man (5) in (4), so bekommt man:

$$\frac{1}{D} + \frac{1}{r} = \mu \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{d'} \right) \tag{6}$$

Die zweite Brechung, an der Rückseite B der Linse, wird durch Fig. 2. angedeutet:

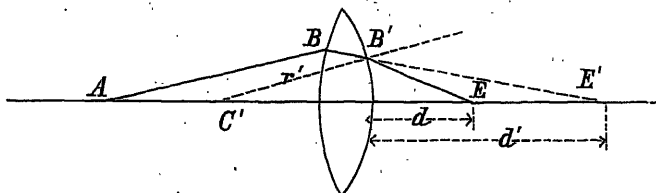
Fig. 2.
Brechung an der Rückseite der Linse.

Es ist nun nicht nötig, die Entwicklung (1) bis (6) für Fig. 2. zu wiederholen. Man überzeugt sich, dass beide Fälle ineinander übergehen, wenn man setzt:

Fig. 1.		Fig. 2.
D	=	d
d'	=	$-d'$
r	=	r'

Setzt man dieses in (6) ein, so geht (6) über in:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{r'} = \mu \left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{d'} \right) \tag{7}$$

Die Addition von (6) und (7) giebt:

$$\frac{1}{D} + \frac{1}{d} = (\mu - 1) \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) \tag{8}$$

Die rechte Seite ist hier konstant, man setzt daher:

$$(\mu - 1) \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) = \frac{1}{f} \tag{9}$$

Der dadurch bestimmte Wert f heisst die *Brennweite* der Linse.

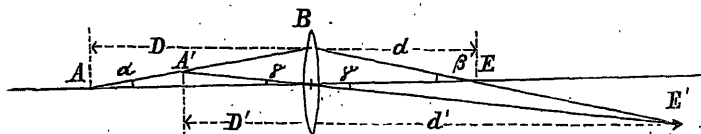
Damit heisst die Gleichung (8):

$$\frac{1}{D} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f} \tag{10}$$

Dieses ist die Grundgleichung für die Brechung eines Lichtstrahls durch eine Linse.

Es ist dadurch bewiesen, dass alle Strahlen, welche von einem Punkt A der Axe ausgehen, sich nach der Brechung wieder in einem Punkte E der Axe vereinigen. Zwei solche Punkte A und E auf der Axe nennt man „konjugiert“.

Wir betrachten ferner (Fig. 3.) ausser dem früheren Strahl ABE, welcher von

Fig. 3.
Konjugierte Punkte A und E, A' und E'.

der Axe ausgeht, einen Strahl $A'BE'$, welcher nicht von der Axe ausgeht. Der Ausgangspunkt A' des zweiten Strahls soll auf dem ersten Strahl AB liegen, weshalb

auch nach der Brechung noch beide Strahlen denselben Weg BE verfolgen. Während im ersten Fall der Schnitt E mit der Linsen-Axe von Wichtigkeit war, untersuchen wir im zweiten Fall den Schnitt E' mit der von A' durch die Linsenmitte gezogenen Geraden. Dabei handelt es sich um die beiden Abstände D' und d'.

Um eine Beziehung zwischen D' und d' zu erhalten, nehmen wir die Winkel α, β, γ zu Hilfe, und haben damit:

$$\frac{D}{D'} = \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin \alpha} \qquad \frac{d}{d'} = \frac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin \beta}$$

oder weil die Winkel sämtlich klein sind:

$$\frac{1}{D'} = \frac{1}{D}\,\frac{\alpha + \gamma}{\alpha} \qquad \frac{1}{d'} = \frac{1}{d}\,\frac{\beta - \gamma}{\beta}$$

$$\frac{1}{D'} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{D} + \frac{1}{d} + \gamma\left(\frac{1}{D\alpha} - \frac{1}{d\beta}\right) \tag{11}$$

Nach Fig. 3. ist aber:

$$D\alpha = d\beta$$

Damit fällt das letzte Glied in (11) fort, und die Vergleichung mit (10) giebt:

$$\frac{1}{D'} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f} \tag{12}$$

Damit ist bewiesen, dass auch alle Strahlen, welche von einem Punkte A' ausserhalb der Axe ausgehen, sich nach der Brechung wieder in einem Punkte E' vereinigen, welcher mit A' und der Linsenmitte auf einer Geraden liegt.

Die Punkte A' und E' heissen *konjugiert*, ebenso wie auch A und E konjugiert sind.

Verschiedene Fälle der Grundgleichung (10) oder (12):

$$\frac{1}{D} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f}$$

$$D = \infty \qquad \frac{1}{\infty} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f} \qquad d = f \tag{13}$$

$$D = d \qquad \frac{1}{2f} + \frac{1}{2f} = \frac{1}{f} \qquad D = d = 2f \tag{14}$$

$$D = f \qquad \frac{1}{f} + \frac{1}{\infty} = \frac{1}{f} \qquad d = \infty \tag{15}$$

$$D = f - x \qquad \frac{1}{f-x} - \frac{1}{d} = \frac{1}{f} \qquad d \text{ wird negativ.} \tag{16}$$

Zwei Punkte auf der Axe, in Abständen f von der Linse, heissen die Brennpunkte der Linse.

Wenn nach (13) ein Punkt in der Richtung der Axe der Linse unendlich entfernt ist, so fällt sein Bild nach der Brechung in den Brennpunkt auf der anderen Seite der Linse. Da alle von einem unendlich entfernten Punkte auf die Linse fallenden Strahlen als parallel gelten, so folgt weiter, dass jeder mit der Axe parallel einfallende Strahl nach der Brechung durch den Brennpunkt geht.

Einen solchen Strahl nennt man einen Hauptstrahl.

Der optische Mittelpunkt.

In der vorstehenden Theorie wird die Annahme gemacht, dass die Linsendicke verschwindend klein sei gegen die übrigen in der Axen-Richtung in Betracht kommenden Dimensionen, jedoch ist es von Interesse, unmittelbar zu zeigen, dass die Gerade $A'E'$

in Fig. 3. durch einen festen Punkt der Linse geht. Es ist dies nämlich derjenige Punkt, welcher die Eigenschaft hat, dass jeder durch ihn gehende Strahl ungebrochen bleibt. Dieser Punkt heisst der optische Mittelpunkt der Linse, er liegt auf der Axe der Linse und teilt die Dicke der Linse in zwei Teile, im Verhältnis der beiden Krümmungshalbmesser, er liegt dabei stets näher der stärker gekrümmten Fläche. Dieses lässt sich so zeigen (vgl. Fig. 4.):

Fig. 4.
Optischer Mittelpunkt O.

Ebenso wie bei dem Durchgang eines Strahls durch ein planparalleles Glas, wobei keine Richtungsänderung erfolgt, ergiebt sich für den optischen Mittelpunkt die Bedingung, dass die zwei Berührungs-Ebenen der Linse am Eintritt und am Austritt eines durch ihn gehenden Strahls parallel sein müssen, oder dass die dem Eintritt und Austritt zugehörigen Kugelhalbmesser parallel sind. Ist also O der optische Mittelpunkt (Fig. 4.) und $ABB'A'$ ein durch ihn gehender Strahl, so soll $A'B'$ parallel BA, und $C'B'$ parallel BC sein, woraus folgt:

$$BO:OB' = BC:B'C = r:r'$$

und genähert:

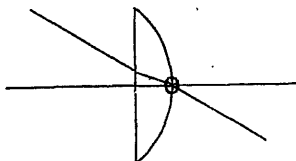
$$BO:OB' = DO:OD'$$

also:

$$DO:OD' = r:r'$$

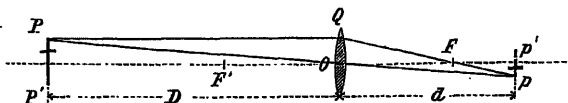
Fig. 5.
Optischer Mittelpunkt der plankonvexen Linse.

Bei der plankonvexen Linse liegt der optische Mittelpunkt auf der konvexen Seite selbst, wie in Fig. 5. angedeutet ist.

Einen Lichtstrahl, der durch den optischen Mittelpunkt der Linse geht, nennt man einen *Hauptstrahl.*

Konstruktion konjugierter Punkte mittelst zweier Hauptstrahlen (Fig. 6.).

Als Hauptstrahlen haben wir bisher folgende bezeichnet:

1) einen Strahl parallel der Axe, z. B. PQ in Fig. 6.;
2) einen Strahl, der durch den optischen Mittelpunkt der Linse geht, z. B. POp in Fig. 6.

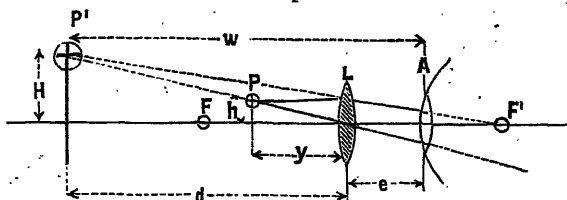
Fig. 6.
Hauptstrahlen PQ und POp.

Damit kann man zu jedem Punkte P seinen konjugierten Punkt p konstruieren (Fig. 6). Man zieht von P aus beide Hauptstrahlen, nämlich PQ parallel der Axe, und PO nach dem optischen Mittelpunkt.

PQ geht nach der Brechung durch den Brennpunkt F, und PO bleibt ungebrochen, man findet daher p als Schnitt der verlängerten QF und PO.

Diese Konstruktion gilt auch für diejenigen Fälle von (13) bis (16), bei welchen D oder d negativ ist.

§ 40. Die Lupe.

Einen besonderen Fall der im vorigen § 39. behandelten Konvexlinse bildet die Lupe, als Konvexlinse mit kleiner Brennweite. Eine solche Linse dient zur Erzeugung vergrösserter Bilder naher Gegenstände (vgl. Fig. 1.).

Fig. 1.
Lupe.

Ein Gegenstand P befindet sich zwischen der Linse L und dem linkseitigen Brennpunkt F dieser Linse. Man findet die Lage des dem Punkte P konjugierten Punktes P' mittelst der beiden Hauptstrahlen (nach Fig. 6. § 39. S. 115), welche sich durch *Rückverlängerung* auf derselben Seite der Linse schneiden, auf welcher P ist, nämlich in dem Punkte P'.

Als Beziehung zwischen den Abständen y und d hat man die Grundgleichung (12) § 39. S. 114, mit Rücksicht darauf, dass der Gegenstand und das Bild auf derselben Seite der Linse liegen, nämlich entsprechend (16) § 39. S. 114:

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{d} = \frac{1}{f} \tag{1}$$

Diese Gleichung giebt nach y aufgelöst:

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{f} + \frac{1}{d} = \frac{d+f}{df} \qquad y = \frac{df}{d+f} \tag{2}$$

Für die weitere Untersuchung ist es nötig, den Ort des Auges A vor der Lupe zu wissen; das Auge hat hier einen gewissen Spielraum, der etwa gleich der Brennweite f der Linse ist. Wir lassen die Entfernung des Auges von der Lupe vorerst noch unbestimmt, indem wir sie $= e$ einführen.

Nun gelangen die von P selbst ausgehenden Strahlen mit solcher Divergenz in das Auge A, als ob sie von P' ausgiengen; das Auge glaubt daher ein vergrössertes aufrechtes Bild H des Gegenstandes h zu sehen.

Wenn hiebei deutliches Sehen stattfinden soll, so ist der Abstand des Auges von dem Bilde gleich der deutlichen Sehweite w anzunehmen, d. h.:

$$w = d + e \qquad \text{oder} \qquad d = w - e \tag{3}$$

Dadurch wird auch der Abstand y ein bestimmter, nämlich nach (2) und (3):

$$y = \frac{(w-e)f}{w-e+f} \tag{4}$$

Vergrösserung. Direkt gesehen, muss der Gegenstand h in die deutliche Sehweite w gebracht werden, er erscheint also unter dem Gesichtswinkel $\frac{h}{w}$. Wenn derselbe Gegenstand mit der Lupe betrachtet wird, so hat er, da der Ort des Auges in A angenommen ist, die scheinbare Höhe H in der Entfernung $= w$, also erscheint er unter dem Gesichtswinkel $\frac{H}{w}$, und demnach ist die Vergrösserung:

$$v = \frac{H}{w} : \frac{h}{w} = \frac{H}{h} = \frac{d}{y}$$

oder vermöge (3) und (4):

$$v = \frac{w - e + f}{f} \qquad (5)$$

oder:

$$v = \frac{w}{f} + 1 - \frac{e}{f} \qquad (6)$$

Da beim Kurzsichtigen w kleiner ist, als beim Weitsichtigen, so hat der Kurzsichtige eine schwächere Vergrösserung als der Weitsichtige, da aber der Kurzsichtige ohne Lupe den Gegenstand näher ans Auge hält als der Fernsichtige, so hat er hier schon einen grösseren Gesichtswinkel; durch die Lupe sehen beide den Gegenstand gleich gross.

Aus (5) ist ersichtlich, dass eine Linse nur dann als Lupe brauchbar ist, wenn ihre Brennweite f kleiner als die deutliche Sehweite w ist.

Wenn man in (6) verschiedene Werte e einführt, welche der Schwankung des Aug-Ortes entsprechen, so findet man:

$$\text{mit } e = 0 \qquad v_{max} = \frac{w}{f} + 1 \qquad (7)$$

$$\text{mit } e = f \qquad v_{min} = \frac{w}{f} \qquad (8)$$

Die unvermeidlichen Schwankungen des Auges vor der Lupe sind also von wenig Einfluss auf die Vergrösserung.

Wichtiger ist es, zu wissen, ob diesen Augorts-Schwankungen etwa erhebliche Veränderungen des Objekt-Abstandes y entsprechen. Um dieses bequem beurteilen zu können, entwickeln wir die Formel (4) für y in eine Reihe:

$$y = f \frac{w - e}{w + (f - e)} = f \frac{1 - \frac{e}{w}}{1 + \frac{f - e}{w}}$$

$$y = f \left(1 - \frac{e}{w}\right) \left(1 - \frac{f - e}{w} + \left(\frac{f - e}{w}\right)^2 + \ldots\right)$$

$$y = f \left(1 - \frac{f}{w} + \frac{f}{w} \frac{f - e}{w} + \ldots\right) \qquad (9)$$

Je nachdem man hier $e = 0$ oder $e = f$ einsetzt, giebt diese Formel (9) Werte von y, welche um $\frac{f^3}{w^2}$ differieren. Für $w = 25^{cm}$ und $f = 1^{cm}$ giebt dieses nur $0{,}016^{mm}$, was ganz unmerklich ist.

Zugleich kann man aus dieser Gleichung (9) ersehen, welchen Einfluss eine Änderung der Sehweite w auf die Einstellung y hat.

Zu diesem Zweck differentiieren wir die Gleichung (9) nach w, also:

$$y = f - \frac{f^2}{w} + \ldots \qquad d\,y = + \frac{f^2}{w^2}\,d\,w$$

Nach (8) kann man hiefür schreiben:

$$d\,y = \frac{d\,w}{v^2} \tag{10}$$

Bei 20facher Vergrösserung ($v = 20$) und einem Sehweiten-Unterschied $d\,w = 20^{cm}$ giebt dieses nur $d\,y = 0{,}5^{mm}$.

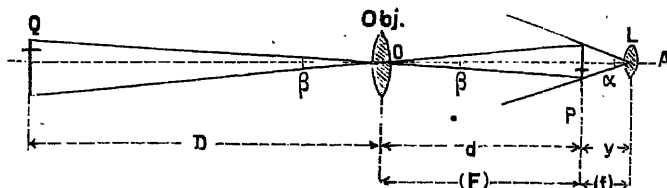
Der Kurzsichtige wird also die Lupe in diesem Fall um $0{,}5^{mm}$ näher an den Gegenstand halten als der Weitsichtige.

Anmerkung.

Obgleich wir (nach der Anmerkung auf S. 112 unten) die sphärischen Abweichungen der Linsen nicht in unsere Betrachtung ziehen, kann doch die Bemerkung hier angefügt werden, dass gute Lupen nicht beiderseits gleich gekrümmt sind, und dass man stets die *flachere* Seite dem Objekt zukehren soll.

§ 41. Das einfache Fernrohr.

Die bisher behandelte Theorie der Konvexlinse als Objektiv-Glas und als Lupe genügt bereits zur Erklärung der Wirkungsweise des einfachen (*Kepler*schen) Fernrohrs.

Fig. 1.
Das einfache Fernrohr.

Ein solches Fernrohr besteht nach Andeutung von Fig. 1. aus einer Verbindung zweier Konvexlinsen, nämlich dem Objektiv O und dem Okular L, welche verschiedene Brennweiten, bzw. F und f haben. Die Brennweite F des Objektivs ist grösser als die Brennweite f des Okulars.

Die Wirkungsweise dieses Fernrohrs lässt sich so erklären: Das Objektiv O erzeugt von einem entfernten Gegenstand Q ein umgekehrtes verkleinertes Bild P, welches durch das als Lupe wirkende Okular L betrachtet wird. Die Entfernung d des Bildes P von dem Objektiv findet sich aus der gegebenen Entfernung D des Gegenstandes Q von dem Objektiv, und der Brennweite F des letzteren, durch die Grundgleichung:

$$\frac{1}{D} + \frac{1}{d} = \frac{1}{F}$$

welche, nach d aufgelöst, giebt:

$$d = F\,\frac{D}{D - F}$$

oder in Reihen-Entwicklung:

$$d = F \frac{1}{1 - \frac{F}{D}} = F \left(1 + \frac{F}{D} + \frac{F^2}{D^2} + \ldots\right)$$

$$d - F = \frac{F^2}{D} + \ldots \qquad (1)$$

Da D meist sehr gross ist, so ist d nahezu $= F$; es giebt z. B. eine Entfernung $D = 300^m$ bei einer Brennweite $F = 0{,}3^m$ nur $d - F = 0{,}0003^m$ oder $= 0{,}3^{mm}$. Die Einstellung der Okularweite d kann überhaupt kaum auf $0{,}3^{mm}$ genau gemacht werden.

Wir haben also bewiesen, dass schon bei Zielpunkts-Entfernungen über 300^m der Okular-Auszug mit der Auszugsweite d nahezu ebenso zu stellen ist, wie für die Zielweite Unendlich.

Der Abstand y des Bildes P vom Okular L ist abhängig von der Brennweite f des Okulars und von der deutlichen Sehweite w des beobachtenden Auges, es ist jedoch y immer nahezu $= f$, wie aus der Gleichung (9) des vorigen § 40. hervorgeht, denn hiernach ist:

$$y - f = -\frac{f^2}{w} \qquad (2)$$

Setzt man beispielshalber hier $f = 1^{cm}$, $w = 20^{cm}$, so wird:

$$y - f = -0{,}05^{cm} = -0{,}5^{mm}$$

Man kann also näherungsweise $y = f$ annehmen.

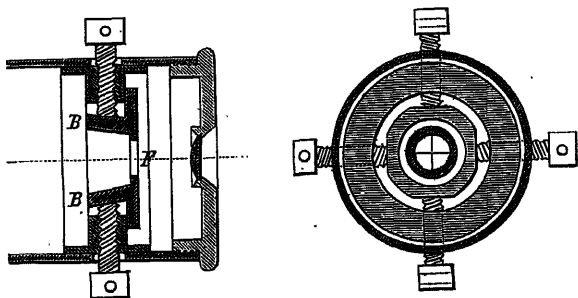
Das Fadenkreuz und die Ziel-Axe (Kollimations-Axe.)

Mit dem bisher beschriebenen Fernrohr kann man zwar entfernte Gegenstände betrachten, man kann aber keinen bestimmten Punkt des Bildes anzielen. Hiezu ist es nötig, an dem Fernrohr zwei feste Punkte zu haben, welche dem Okularloch und dem Faden eines Diopters, oder dem Visier und dem Korn eines Geschützes entsprechen.

Diese zwei festen Punkte sind das Fadenkreuz und der optische Mittelpunkt des Objektivs.

Das Fadenkreuz dient dazu, einen Punkt des Bildes im Innern des Fernrohrs bezeichnen zu können. Man hat in der Ebene dieses Bildes auf dem als Okularblendung dienenden Ring zwei sich rechtwinklig schneidende Fäden (Spinnfäden) ausgespannt, deren Kreuzpunkt mit einem bestimmten Punkte des Bildes zusammenfällt.

Die Einsetzung des Fadenkreuzes im Innern der Okular-Röhre ist durch Fig. 2. veranschaulicht, welche wir später beim Theodolit noch näher betrachten werden.

Fig. 2.
Das Fadenkreuz.

Der zweite feste Punkt im Fernrohr, welcher zusammen mit dem Fadenkreuzpunkt die Ziellinie bestimmt, ist der schon erwähnte optische Mittelpunkt des Objektivs.

Da stets ein Punkt Q, sein Bild P, und der optische Mittelpunkt O des Objektivs in einer Geraden liegen, so heisst ein Punkt „angezielt", wenn sein Bild P mit dem Fadenkreuzpunkt zusammenfällt, die Gerade PO wird dann durch Q gehen, gerade so wie z. B. bei einem Geschütz die gerade Verbindungslinie von Visier und Korn durch den Punkt geht, auf welchen gezielt wird. (Die Ziel-Axe wird mit der optischen Axe der Objektiv-Linse im allgemeinen nicht zusammenfallen.)

Das Anzielen eines entfernten Punktes geschieht durch folgende Operationen:

1) Die Entfernung y zwischen dem Fadenkreuz und dem Okular, welche von der Brennweite des Okulars und von der deutlichen Sehweite des beobachtenden Auges abhängt (s. ob. (2)), wird durch Verschieben des Fadenkreuzes oder des Okulars in der Okular-Röhre so reguliert, dass das Fadenkreuz deutlich gesehen wird (vgl. die Theorie der Lupe § 40. S. 116).

2) Die Okular-Linse samt dem Fadenkreuz, d. h. der ganze Okularkopf, wird gegen das Objektiv in solche Stellung gebracht, dass der Gegenstand, auf welchen das Fernrohr gerichtet ist, deutlich gesehen wird, und dann kann ein bestimmter Punkt des betrachteten Gegenstandes zur Deckung mit dem Fadenkreuz gebracht, d. h. angezielt werden.

Von diesen zwei Einstellungen ist die erste ein- für allemal vorzunehmen, sofern nicht verschiedene Beobachter mit verschiedenen Augen das Fernrohr zusammen benützen, während die zweite bei jedem Zielpunkt zu wiederholen ist.

Ein kurzsichtiger und ein weitsichtiger Beobachter werden die Stellung des Fadens gegen das Okular verschieden nehmen, jedoch wird diese Verschiedenheit höchstens 1 Millimeter betragen, wie aus der Lupen-Theorie in (10) § 40. S. 118 und aus der daran geknüpften Bemerkung entnommen werden kann.

Wenn ein Kurzsichtiger eine seinem Auge entsprechende Brille trägt, so kann er mit einem anderen Beobachter mit normalem Auge abwechselnd ein Fernrohr benützen, ohne dass Fadenverstellung nötig ist.

„Parallaxe" des Fadenkreuzes heisst eine Abweichung der Fadenkreuz-Ebene von der Bild-Ebene: sie zeigt sich dadurch, dass bei einer Verschiebung des Auges von unten nach oben oder von links nach rechts sich der Fadenkreuzpunkt gegen das Bild verschiebt.

Wenn man eine solche Parallaxe bemerkt, so ist es das Erste, den Okularkopf neu einzustellen. Kann man damit die Parallaxe nicht beseitigen, so muss man den Abstand y zwischen der Okularlinse und dem Fadenkreuz von Neuem stellen.

Vergrösserung.

Die *Vergrösserung des Fernrohrs* ist das Verhältnis der Gesichtswinkel, unter welchen das Bild eines Gegenstandes im Fernrohr, und der Gegenstand selbst erscheinen. Setzt man voraus, dass der Gegenstand ziemlich weit entfernt ist, so kann der letztere Gesichtswinkel gleich dem in Fig. 1. angedeuteten Winkel β genommen werden, weil dann die Fernrohr-Länge LO gegen die Entfernung D vernachlässigt werden kann.

Der Gesichtswinkel für das Bild kann $= \alpha$ genommen werden, wenn man das Auge als unmittelbar hinter dem Okular befindlich voraussetzt. Da ferner genähert $d = F$ und $y = f$ ist, so ist die Vergrösserung:

$$v = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{d}{y} = \frac{F}{f} \tag{3}$$

Die Bestimmung der Vergrösserung könnte theoretisch geschehen durch Messen der Brennweiten F und f, es ist jedoch das folgende unmittelbare Verfahren vorzuziehen: Man schaut mit dem einen Auge durch das Fernrohr nach einer geteilten Latte, und mit dem andern Auge gleichzeitig nach derselben Latte, und bringt dabei die mit beiden Augen gesehenen Bilder zur Deckung. Die Vergrösserungszahl ist dann gleich der Anzahl der direkt gesehenen Lattenteile, welche von *einem* vergrössert gesehenen Teil überdeckt werden.

Wir fanden folgendes Verfahren am besten:

Man schaut mit dem rechten Auge in das Fernrohr, nach einer geteilten Latte, in der linken Hand hält man einen Zirkel in deutliche Sehweite. Nun bringt man die Zirkelspitzen mit dem Lattenbilde in scheinbare Deckung, und kann, fast so genau wie auf der Zeichnung, mit dem Zirkel in der Luft die Lattenteilung abgreifen und nachher auf einem Massstab messen. Ist L die Entfernung der Latte und T der betrachtete Lattenteil, ist entsprechend l die Entfernung des Zirkels vom Auge und t die mit dem Zirkel gemessene Grösse des Lattenteil-Bildes, so ist die Vergrösserung:

$$v = \frac{t}{l} : \frac{T}{L} = \frac{t}{T} \frac{L}{l} \tag{4}$$

Ein Nivellier-Instrument gab so:

$$L = 33^m \quad , \quad T = 0{,}1^m \quad , \quad l = 36^{cm} \quad , \quad t = 4{,}2^{cm}$$

$$v = \frac{4{,}2}{36} \frac{33}{0{,}1} = 38{,}5 \tag{5}$$

Gesichtsfeld.

Das *Gesichtsfeld* des Fernrohrs ist derjenige kegelförmige Raum, der mit dem Fernrohr auf einmal übersehen werden kann.

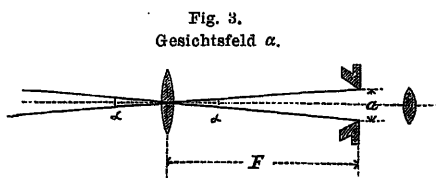
An der Stelle, wo das Bild im Fernrohr entsteht, ist ein Ring angebracht, der alle zu weit von der Axe des Okulars abstehenden Strahlen von diesem abhält. Dieser Ring, dessen Durchmesser $= a$ sei, heisst *Okularblendung* oder *Diaphragma* (er trägt zugleich das Fadenkreuz).

Fig. 3.
Gesichtsfeld α.

Da jeder Punkt (Fig. 3.) mit seinem Bilde und dem optischen Mittelpunkt des Objektivs in einer Geraden liegt, so dient der Winkel α, dessen Scheitel im optischen Mittelpunkt des Objektivs ist, und dessen Schenkel durch die Endpunkte eines Durchmessers der Okularblendung gehen, als Mass des Gesichtsfeldes, und es ist:

$$\alpha = \frac{a}{F} \varrho \tag{6}$$

Der Durchmesser a der Okularblendung, oder der wirksame Teil der Okular-Linse darf nicht zu gross genommen werden, damit nicht eine zu stark gekrümmte Linse und ein verzerrtes Bild erhalten wird.

Man kann im Mittel etwa annehmen, dass diese Öffnung a nur etwa gleich der Hälfte der Okularbrennweite f sei, also $a = 0{,}5 f$; dann wird der Ausdruck für die Grösse des Gesichtsfeldes nach (6), wenn man zugleich wieder die Vergrösserung nach (3) berücksichtigt,:

$$\alpha = 0{,}5 \frac{f}{F} \varrho = 0{,}5 \frac{\varrho}{v}$$

in runder Zahl: Gesichtsfeld $\alpha = \frac{30}{v}$ in Graden.

Hiernach kann man etwa annehmen:

Vergrösserung	$v =$	10	20	30	40
Gesichtsfeld	$\alpha =$	3°	1° 30′	1°	0° 45′

Je stärker die Vergrösserung, um so kleiner wird das Gesichtsfeld.

Die unmittelbare Messung des Gesichtsfeldes eines Fernrohrs ist sehr ei
Man merkt zwei einen Durchmesser des Gesichtsfeldes begrenzende Punkte, u
stimmt den Winkel der zwei nach ihnen gehenden Strahlen, mit einem Wink
instrument, oder durch Messen des Abstandes beider Punkte und der Strahlen

Helligkeit.

Um die Helligkeit eines leuchtenden Gegenstandes im allgemeinen zu defi
betrachtet man die Lichtmenge L, welche er in das Auge schickt, und die Fläc
auf der Netzhaut des Auges, welche von der Lichtmenge L getroffen wird; dar
steht man unter Helligkeit das Verhältnis:

$$H = \frac{L}{N^2}$$

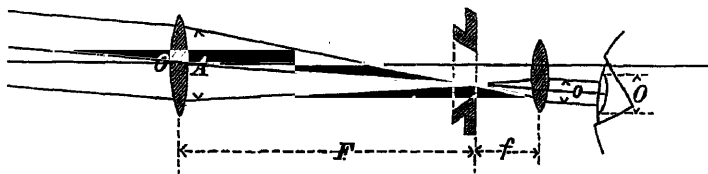
Betrachtet man denselben Gegenstand durch ein Fernrohr, so habe man entspre

$$H' = \frac{L'}{N'^2}$$

und nun versteht man unter Helligkeit des Fernrohrs das Verhältnis:

$$h = \frac{H'}{H} = \frac{L'}{L} \frac{N^2}{N'^2}$$

Um dieses Verhältnis näher zu bestimmen, muss man die Öffnungswei
Pupille des Auges kennen, durch welches das Licht aufgenommen wird.

Fig. 4.
Helligkeit des Fernrohrbildes.

In Fig. 4. ist diese Pupillen-Öffnung $= O$ angedeutet, und wir wolle
nehmen, es sei O *grösser* als der Durchmesser o des aus dem Okular komm
Lichtbündels, oder höchstens *gleich* o.

Die Lichtmenge L, welche ein Auge mit der Öffnung O bei natürliche
leuchtung aufnimmt, ist der Öffnungsfläche proportional, kann also gesetzt werde

$$L = \lambda\, O^2$$

dagegen die Lichtmenge L', welche durch das Fernrohr ins Auge kommt, ist
Fig. 4. proportional o^2 und sei daher zunächst:

$$L' = \lambda'\, o^2$$

Die Stärke λ' ist hiebei grösser als λ, denn alles Licht, welches auf die Objektivfläche vom Durchmesser A gefallen ist, wird auf die geringe Dicke o konzentriert, folglich:

$$\lambda' = \lambda \left(\frac{A}{o}\right)^2 \tag{11}$$

Nun geben (9) (10) und (11) zusammen:

$$\frac{L'}{L} = \frac{A^2}{O^2} \tag{12}$$

Der zweite Quotient von (8) ist leicht anzugeben, nämlich:

$$\frac{N^2}{N'^2} = \frac{1}{v^2} \tag{13}$$

denn die Vergrösserung v ist das lineare Verhältnis des durch das Fernrohr erzeugten Netzhautbildes N' zu dem direkt erhaltenen Netzhautbilde N. Aus (8) (12) und (13) haben wir nun:

$$\text{Helligkeit} \quad h = \frac{A^2}{O^2 v^2} \tag{14}$$

Es wurde vorausgesetzt, dass O grösser als o oder gleich o sei. Setzt man nun $O = o$, so wird die Helligkeit am grössten, nämlich:

$$h_{max} = \frac{A^2}{o^2 v^2} = \frac{F^2}{f^2} \frac{1}{v^2} = v^2 \frac{1}{v^2} = 1 \tag{15}$$

d. h. die grösste erreichbare Helligkeit ist die „natürliche Helligkeit“ $= 1$.

(Hiebei ist von den Lichtverlusten beim Durchgang durch die Linsen, welche bereits 20—30 % ausmachen können, von Farbenzerstreuung u. s. w. abgesehen.)

Wir betrachten auch noch den bisher ausgeschlossenen Fall, dass O *kleiner* als 0 sei.

In diesem Falle, der jedoch bei Messinstrumenten selten vorkommen wird, kann nur ein Teil des aus dem Okular kommenden Lichtbündels vom Auge aufgenommen werden, und es bleibt ein Teil der Objektiv-Öffnung unbenützt. Im übrigen aber hat man ganz dieselben Verhältnisse, wie wenn $O = o$ ist, also $h = 1$.

Im ganzen wissen wir nun folgendes:

Man sieht in einem Fernrohr die irdischen Gegenstände *höchstens* ebenso hell wie in der freien Luft, im allgemeinen weniger hell. Die Helligkeit ist (abgesehen durch Lichtverluste bei der Brechung u. s. w.) ausgedrückt durch die Formel (14). *)

Der Durchmesser O der Pupille ist selbst veränderlich, bei starkem Lichte verengt sich die Pupille und erweitert sich bei schwachem Lichte, auch die Akkommodation ist mit Veränderung der Pupillen-Öffnung verbunden, wie am Schluss von § 38. S. 111 angegeben wurde.

Dennoch kann man in der Gleichung (14) einen Mittelwert von O einsetzen, zumal die ganze vorstehende Betrachtung nur die Bedeutung einer allgemeinen Veranschaulichung der Helligkeits-Verhältnisse hat. Setzt man etwa $O = 2^{mm}$, oder rund $O^2 = 5$, so wird:

$$\text{Helligkeit} \quad h = \frac{1}{5} \frac{(A^{mm})^2}{v^2}$$

---

*) Die Fernrohrbilder von *Fixsternen* sind heller als die unmittelbar gesehenen Sterne, weil diese Sterne leuchtende *Punkte* sind, so dass keine Vergrösserung $v = N' : N$ stattfindet.

Weiteres hierüber s. *Helmholtz* „Physiologische Optik“, Leipzig 1867, S. 174.

Unsere besseren Feldmessinstrumente haben Objektiv-Öffnungen etwa $A = 30^{mm}$ bis 40^{mm}, und Vergrösserungen etwa $v = 20$ bis 30. Dieses giebt:

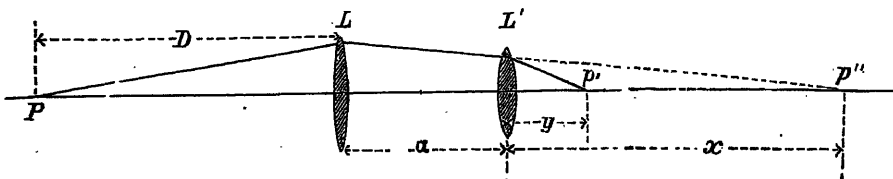
Objektiv-Öffnung	$A =$	30^{mm}	30^{mm}	40^{mm}	40^{mm}
Vergrösserung	$v =$	20	30	20	30
Helligkeit	$h =$	0,45	0,20	0,80	0,36

Dieses kann zu der Bemerkung führen, dass es z. B. nicht nützlich ist, ein Objektiv von 30^{mm} Durchmesser mit 30facher Vergrösserung anzuwenden, weil die Vergrösserung auf Kosten der Helligkeit geht.

Übrigens kommt hier alles auf die besonderen Umstände an. So werden z. B. den starken Nivellierfernröhren hellblaue *Blendgläser* beigegeben, weil das Bild einer weissen von der Sonne beschienenen Nivellierlatte manchmal zu grell ist.

§ 42. Zusammenwirkung zweier Linsen.

Wir betrachten in Fig. 1. zwei Linsen L und L', mit gemeinsamer Axe $P P' P''$, im Abstande a.

Fig. 1.
Lichtstrahl $P L L' P'$ durch zwei Linsen.

Von einem in der Axe gelegenen Punkt P, der den Abstand D von der ersten Linse L hat, fällt ein Lichtstrahl PL auf die erste Linse, und wird durch sie nach dem Punkte P'' der Axe geworfen; ehe er aber diesen Punkt P'' erreicht, wird der Strahl durch die Linse L' noch einmal gebrochen, und dadurch nach P' geworfen, wo er die Axe schneidet.

Da P und P'' in Bezug auf die Linse L konjugiert sind, sowie P'' und P' in Bezug auf die Linse L', so bestehen folgende zwei Gleichungen:

$$\frac{1}{D} + \frac{1}{a+x} = \frac{1}{f} \qquad -\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f'} \tag{1}$$

dabei sind f und f' die Brennweiten der beiden Linsen.

Um aus den Gleichungen (1) x zu eliminieren, lösen wir die erste Gleichung nach $a + x$ und die zweite Gleichung nach $-x$ auf:

$$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{f} - \frac{1}{D} = \frac{D-f}{Df} \qquad -\frac{1}{x} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{y} = \frac{y-f'}{yf'}$$

$$a + x = \frac{Df}{D-f} \qquad -x = -\frac{f'y}{f'-y}$$

Die Addition dieser zwei Gleichungen giebt:

$$a = \frac{Df}{D-f} - \frac{f'y}{f'-y} \tag{2}$$

Man kann diese Gleichung (2), welche die Beziehung zwischen D und y zunächst ausdrückt, auf folgende Gestalt bringen:

$$\frac{1}{D+u}+\frac{1}{y+v}=\frac{1}{f''} \tag{3}$$

wobei u, v und f'' folgende Bedeutungen haben:

$$u=\frac{af}{f+f'-a} \qquad v=\frac{af'}{f+f'-a} \tag{4}$$

$$f''=\frac{ff'}{f+f'-a} \tag{5}$$

Diese 3 Gleichungen (3) (4) und (5), welche das Resultat unserer ganzen Betrachtung enthalten, haben wir zunächst hergeschrieben, und haben noch die Aufgabe, ihre Richtigkeit aus der Gleichung (2) nachzuweisen.

Zu diesem Zwecke ordnen wir sowohl die Gleichung (2) als auch die Gleichung (3) nach Potenzen von D und y, d. h. nach den Gliedern D, y und Dy.

Bringt man zuerst (2) auf gleiche Nenner, so wird:

$$a(D-f)(f'-y)=Df(f'-y)-f'y(D-f)$$

Wenn man dieses ausmultipliziert, und nach D, y und Dy ordnet, so erhält man:

$$Df'(f-a)+yf(f'-a)-Dy(f+f'-a)+ff'a=0 \tag{6}$$

Den Coëfficienten von Dy wollen wir, weil er mehrfach beisammen bleibt, besonders bezeichnen:

$$f+f'-a=s \tag{7}$$

und damit wird (6):

$$D\frac{f'(f-a)}{s}+y\frac{f(f'-a)}{s}-Dy+\frac{ff'}{s}a=0 \tag{8}$$

Wenn man ebenso auch die Gleichung (3) nach D, y und Dy ordnet, so wird:

$$D(f''-v)+y(f''-u)-Dy+(u+v)f''-uv=0 \tag{9}$$

Indem man die entsprechenden Coëfficienten von (8) und (9) einander gleich setzt, erhält man folgende 3 Gleichungen zur Bestimmung von uv und f'':

$$\left.\begin{aligned} f''-v&=\frac{f'}{s}(f-a) \\ f''-u&=\frac{f}{s}(f'-a) \end{aligned} \qquad f''(u+v)-uv=\frac{ff'}{s}a \right\} \tag{10}$$

Wenn man hier die beiden Gleichungen links multipliziert, so erhält man:

$$f''^2-f''(u+v)+uv=\frac{ff'}{s^2}(ff'-(f+f'-a)a) \tag{11}$$

Wenn man die Gleichung rechts von (10) hiemit vergleicht, und auch die Bedeutung von s nach (7) zuzieht, so erhält man:

$$f''^2=\frac{ff'}{s^2}ff'=\left(\frac{ff'}{s}\right)^2$$

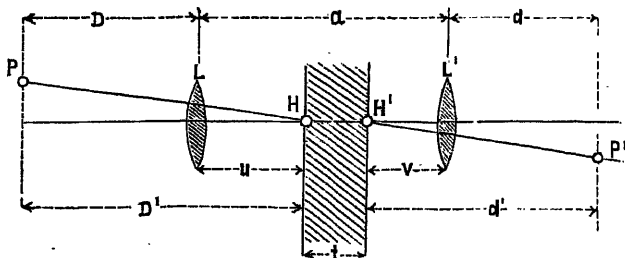
$$f''=\frac{ff'}{s} \tag{12}$$

Dieses ist in der That die Gleichung (5), und aus der linkseitigen Gruppe von (10) ergeben sich auch die beiden Gleichungen (4), so dass das System (3) (4) (5), das wir zuerst hingeschrieben haben, nun bewiesen ist.

Der Wert f'' nach (5) heisst die *»äquivalente Brennweite«* des Linsensystems mit den Brennweiten f und f' und dem Abstand a.

Aus der Gleichung (3) folgt, dass zwei feste Punkte H und H' existieren (Fig. 2.), welche die Abstände u und v von den zwei Linsen haben. Diese Punkte H und H' heissen die *Hauptpunkte* und die ihnen entsprechenden Normalebenen zur Axe heissen die *Hauptebenen* des Linsensystems.

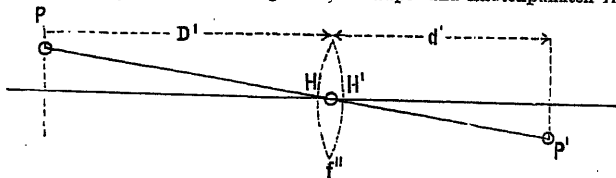
Fig. 2. *)

Konjugierte Punkte P und P'. Haupt- und Knotenpunkte H und H'.

Die Gleichung (3), welche im wesentlichen dieselbe Form hat wie die einfache Konjugations-Gleichung für eine einzelne Linse, gilt zunächst nur für zwei Punkte P und P', welche in der gemeinsamen Axe beider Linsen liegen; wenn es sich auch um solche Punkte handelt, welche nicht in der Axe selbst liegen, z. B. P und P' Fig. 2., so kann man hierauf die frühere Betrachtung von Fig. 3. § 39. S. 113 übertragen, und wir finden dann, dass in Fig. 2. die Punkte P und P' dann konjugiert sind, wenn erstens die Gleichung (3) erfüllt ist, und wenn zweitens PH parallel $H'P'$ ist.

Dieses war Veranlassung zur Zeichnung von Fig. 3., in welcher die Punkte H und H' von Fig. 2. zusammengerückt sind, so dass der tote Raum t von Fig. 2. verschwindet.

Da nun in Fig. 2. PH und $H'P'$ parallel waren, muss in Fig. 3. $PHH'P'$ eine Gerade sein.

Fig. 3.

Fingierte Linse f'' mit zusammengerückten Haupt- und Knotenpunkten $HH_{,}$

Aus diesem Grunde heissen die Punkte H und H' auch *Knotenpunkte* des Linsensystems.

Wenn man nach Fig. 2. die Abstände konjugierter Punkte P von P' von den Haupt- und Knoten-Punkten P und P' an zählt, indem man setzt:

$$D' = D + u \qquad d' = d + v \tag{13}$$

so bekommt man die sehr übersichtliche Gleichung:

$$\frac{1}{D'} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f''} \tag{14}$$

---

*) In dieser Figur ist angenommen, dass $D + a + d$ grösser als $D' + d'$ sei, oder dass $(D + a + d) - (D' + d') = t$ *positiv* sei. Sehr oft ist dieses nicht der Fall, wenn man jedoch Fig. 2. so zeichnet, dass H und H' rechts und links übereinander übergreifen, so wird die Figur weniger übersichtlich.

Besonderer Fall $D = \infty$.

Wenn $D = \infty$ gesetzt wird, so gehen die Gleichungen (3) bis (5) in folgende über, in welchen der besondere Wert von y mit y_0 bezeichnet ist:

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{y_0 + v} = \frac{1}{f''} \qquad y_0 + v = f'' \tag{15}$$

$$v = \frac{af'}{f + f' - a} \qquad f'' = \frac{ff'}{f + f' - a} \tag{16}$$

$$y_0 = \frac{f'(f - a)}{f + f' - a} \tag{17}$$

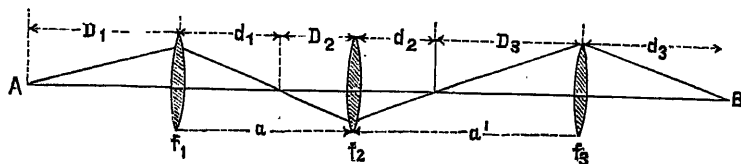
Dieses führt noch zur Definition der *Brennpunkte* (welche in Fig. 2. und in Fig. 3. nicht eingetragen sind).

Die Brennpunkte erhält man, wenn man von den Hauptpunkten H und H' aus die Brennweite f'' auf die Axe abträgt.

Den rechtseitigen Brennpunkt in Fig. 2. erhält man auch, wenn man den Abstand y_0 nach (17) von der Linse L' nach rechts abträgt.

Anmerkung.

Die Sätze von den Haupt- und Knoten-Punkten eines Systems von zwei Linsen lassen sich auf drei und beliebig viele Linsen ausdehnen.

Fig. 4.
Zusammenwirkung von drei Linsen.

In Fig. 4. seien drei Linsen centrisch auf einer Axe aufgereiht, und ein Lichtstrahl gehe von einem Punkte A der Axe aus, durch alle drei Linsen, und komme wieder in B in die Axe; dann hat man mit den eingeschriebenen Bezeichnungen:

$$\frac{1}{D_1} + \frac{1}{d_1} = \frac{1}{f_1} \qquad \frac{1}{D_2} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f_2} \tag{18}$$

$$\frac{1}{D_1 + u} + \frac{1}{d_2 + v} = \frac{1}{f''} \tag{19}$$

Dabei sind u , v und f'' Funktionen von f_1 f_2 und a.

Die dritte Linse giebt:

$$\frac{1}{D_3} + \frac{1}{d_3} = \frac{1}{f_3} \tag{20}$$

Nach demselben Gesetz, welches von (18) auf (19) geführt hat, muss es möglich sein, aus (19) und (20) abermals eine Gleichung herzuleiten von folgender Form:

$$\frac{1}{D_1 + u + u'} + \frac{1}{d_3 + v'} = \frac{1}{f'''}$$

wo u' v' und f''' Funktionen der Brennweiten f_1 f_2 f_3 und der Abstände a a' der einzelnen Linsen sind.

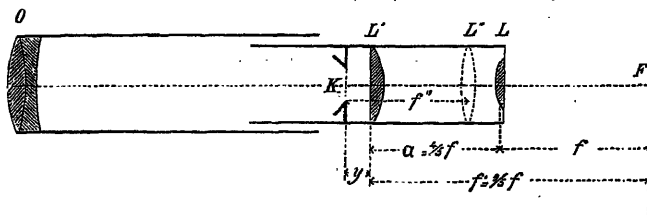
§ 43. Das *Ramsden*sche Fernrohr.

Das in § 41. betrachtete einfache (*Kepler*sche) Fernrohr giebt wegen der sphärischen und chromatischen Abweichungen nur bei schwacher Vergrösserung und bei kleinem Gesichtsfeld gute Bilder.

Beim Objektiv wird den sphärischen und chromatischen Abweichungen durch die aus Kronglas und Flintglas zusammengesetzte achromatische Linse mit passenden Krümmungen entgegengewirkt, und ein solches Objektiv gilt für unsere Zwecke als *eine* Linse.

Beim Okular wird die Brechung auf zwei getrennt stehende Linsen verteilt, deren Wirkung nach § 42. zu beurteilen ist.

Die einfachste Anordnung dieser Art zeigt das *Ramsden*sche Okular, welches wir in Fig. 1. veranschaulichen:

Fig. 1.
Fernrohr mit *Ramsden*schem Okular.

Das Okular besteht aus zwei Plankonvexlinsen, nämlich dem eigentlichen Okular-Glas L und dem sogenannten Kollektiv-Glas L'; beide haben unveränderlichen Abstand a und befinden sich fest in der Okular-Röhre, gehen also beide beim Ausziehen oder Einziehen der Okular-Röhre mit einander vom Objektiv oder zum Objektiv.

Das Fadenkreuz K bezeichnet die Stelle, wo das vom Objektiv O erzeugte Bild entsteht.

Die ganze Wirkungsweise wird auf die Wirkungsweise des einfachen Fernrohrs zurückgeführt, wenn man für die zwei Linsen L und L' *eine* äquivalente Okular-Linse L'' nach Brennweite und Lage bestimmen kann.

Die Brennweiten und die Lagen-Verhältnisse der beiden Linsen L und L' sind in Fig. 1. angedeutet. F ist der gemeinsame Brennpunkt rechts, und wenn man alle Masse auf die Brennweite f des eigentlichen Okular-Glases bezieht, so hat man:

Linse L mit der Brennweite $f = \frac{5}{5} f$

„ L' „ „ „ $f' = \frac{9}{5} f$

Abstand LL' = $a = \frac{4}{5} f$

Differenz $f - a = \frac{1}{5} f$

Die äquivalente Brennweite ist nach (5) § 42. S. 125:

$$f'' = \frac{f f'}{f + f' - a} = \frac{9}{10} f \qquad (1)$$

Auch die Gleichung (17) § 42. S. 127 lässt sich auf unseren Fall anwenden (man beachte, dass in Fig. 1. S. 124 und in der neuen Fig. 1. S. 128 die Stellung f und f' links und rechts vertauscht sind). Man erhält auf diese Weise:

$$y = \frac{f'(f-a)}{f+f'-a} = \frac{9}{50} f = \frac{1}{10} f'$$

Das Fadenkreuz K liegt hiernach sehr nahe an der Linse L'.

Nun kann man auch die Formeln für Vergrösserung, Gesichtsfeld und Helligkeit eines einfachen Fernrohrs von (3), (6), (14) § 41. S. 120—123 auf unseren *Ramsden*schen Fall übertragen, indem man überall f'' an Stelle von f setzt.

Oder: man denke sich zuerst ein einfaches Fernrohr mit der Objektiv-Brennweite F und der Okular-Brennweite f, und dann ein *Ramsden*sches Fernrohr mit derselben Objektiv-Brennweite F und derselben Okular-Brennweite f, aber mit Einschaltung der Linse L' mit der Brennweite f'; dann hat man folgende Vergleichung

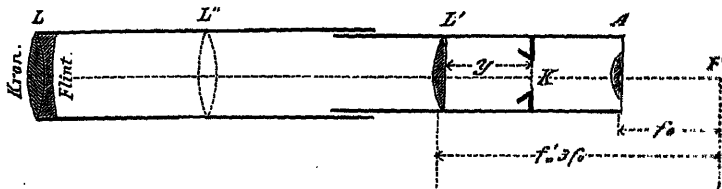
	Vergrösserung	*Gesichtsfeld*	*Helligkeit*	
Einfaches Fernrohr	$v = \frac{F}{f}$	$\alpha = \frac{30}{v}$	$h = \frac{1}{5} \frac{A^2}{v^2}$	(3)
*Ramsden*sches Fernrohr	$v' = \frac{F}{f''} = \frac{10}{9} v$	$\alpha' = \frac{9}{10} \alpha$	$h' = \frac{81}{100} h$	(4)

Durch die Einschaltung der Linse L' wurde die Vergrösserung ein wenig gesteigert (bzw. die Anwendung des Okulars mit der Brennweite f möglich gemacht).

§ 44. Das *Huyghens*sche Fernrohr.

Das *Huyghens*sche Fernrohr-Okular, welches durch Fig. 1. angedeutet ist, hat ebenfalls wie das *Ramsden*sche zwei getrennte Linsen A und L' in festem Abstand, mit gemeinsamem rechtsseitigem Brennpunkt F.

Das Bild und das Fadenkreuz befinden sich aber *zwischen* den beiden Linsen, bei K.

Fig. 1.
Fernrohr mit *Huyghens*schem Okular.

Die durch das achromatische Objektiv L eintretenden Strahlen werden vor ihrer Vereinigung zu einem Bilde zum zweiten Mal gebrochen durch die Kollektiv-Linse L', und erzeugen in einer Ebene zwischen L' und A, woselbst das Fadenkreuz K ausgespannt ist, ein kleines verkehrtes Bild, welches sodann durch die als Lupe wirkende Okularlinse A vergrössert wird.

Um die Wirkungsweise dieses Fernrohres auf den Fall eines einfachen Fernrohrs § 41. zurückzuführen, betrachten wir nun das Kollektiv L' mit dem Objektiv L zusammen.

Für die äquivalente Brennweite, die wir diesesmal mit F'' bezeichnen, und für n Abstand y des Fadenkreuzes vom Kollektiv, haben wir nach (5) und (17) § 42. 125 und S. 127 die Formeln:

$$F'' = \frac{F f'}{F + f' - a} \quad , \quad y = \frac{f'(F - a)}{F + f' - a} \tag{1}$$

Dabei ist F die Brennweite des Objektivs, und es wird angenommen, dass die elweite unendlich, also a konstant ist.

Man kann den Abstand a (zwischen dem Objektiv L und dem Kollektiv L') s den zwei Gleichungen (1) eliminieren und bekommt damit:

$$f' - y = \frac{f'^2}{F + f' - a} \quad , \quad F'' = \frac{F}{f'}(f' - y) \tag{2}$$

Nun müssen die Brennweiten-Verhältnisse bekannt sein; dieselben sind in g. 1. eingeschrieben, nämlich:

$$f' = 3 f_0 \tag{3}$$

f_0 die Brennweite der eigentlichen Okular-Linse A ist.

Das in K befindliche Bild soll durch die Lupe A betrachtet werden; es muss ıer K nahezu im Brennpunkt der Linse A sein, oder es muss der Abstand KA ıezu gleich der Brennweite f_0 sein, woraus folgt:

$$y = f' - 2 f_0 \quad \text{oder} \quad y = f_0 \tag{4}$$

Setzt man (3) und (4) in (2) ein, so wird:

$$F'' = \frac{2}{3} F \tag{5}$$

Diese zwei Gleichungen (4) und (5) enthalten alles, was zum Verständnis der rkung des *Huyghens*schen Fernrohrs und zur Zurückführung auf das einfache Fernr § 41. notwendig ist.

Das Fadenkreuz erhält nach (4) seine Stelle in der Mitte zwischen der Kollektivse und der eigentlichen Okular-Linse.

Zur Vergleichung mit dem einfachen Fernrohr denken wir uns nun wieder ein 'aches Fernrohr mit der Objektiv-Brennweite F und mit der Okular-Brennweite f_0, . damit erhalten wir folgendes:

	Vergrösserung	*Gesichtsfeld*	*Helligkeit*	
Einfaches Fernrohr	$v = \frac{F}{f_0}$	$\alpha = \frac{30}{v}$	$h = \frac{1}{5}\frac{A^2}{v^2}$	(6)
*Huyghens*sches Fernrohr	$v' = \frac{F''}{f_0} = \frac{2}{3} v$	$\alpha' = \frac{3}{2}\alpha$	$h' = \frac{9}{4} h$	(7)

Durch die Einschaltung der Kollektiv-Linse mit der Brennweite f' ist also Vergrösserung schwächer geworden, dagegen das Gesichtsfeld und die Helligkeit achsen.

Die Vergleichung mit den entsprechenden Werten des *Ramsden*schen Okulars und (4) § 43. S. 129 zeigt, dass beim *Ramsden*schen Okular die Vergrösserung, ı *Huyghens*schen Okular das Gesichtsfeld und die Helligkeit bevorzugt sind.

Die Ziel-Axe des *Huyghens*schen Fernrohrs ist nach der Anschauung, die wir Vorstehenden gewonnen haben, bestimmt durch das wirkliche Fadenkreuz K und h den optischen Mittelpunkt einer *fingierten* Linse L''. Statt des letzteren

Punktes können wir auch nach der neueren Theorie (§ 42.) einen Haupt- und Knotenpunkt nehmen, welcher der Verbindung der beiden Linsen L und L' entspricht. Der tote Abstand, welcher in Fig. 2. § 42. S. 126 mit t bezeichnet ist, kommt dann nicht weiter in Betracht, indem man ihn in der Richtung nach dem Zielpunkt hin hinausgerückt, und die Zielweiten entsprechend grösser denkt.

Wenn verschieden grosse Zielweiten gebraucht werden, so hat das in unserer Theorie zur Folge, dass auch der Abstand a zwischen L und L' und damit auch die Brennweite F'' der fingierten Objektiv-Linse L'' sich ändert. Indessen bei dem beschränkten Gebrauch, den wir hier von dieser Brennweite zur Aufstellung der Formeln (7) gemacht haben, ist das ohne Belang, weil ja die Vergleichsformeln (6) auch zunächst für unendliche Zielweiten und nur näherungsweise für andere Fälle gelten.

§ 45. Allgemeine Prüfung der Fernröhre.

Die in den vorstehenden § 43. und § 44. behandelte Theorie der zwei gebräuchlichsten Fernrohr-Okulare hat sich nur mit der geometrischen Konstruktion der Bilder beschäftigt; ob diese Bilder auch optisch gut sind, ist durch den Erfolg zu erproben.

Ein Umstand lässt sich jedoch unmittelbar erkennen:

Beim *Huyghens*schen Fernrohr gehen die vom Objektiv herkommenden Strahlen einerseits und die von dem Fadenkreuz herkommenden Strahlen andererseits nicht durch dieselben Linsen ins Auge. Die Krümmungs- und Brennweiten-Verhältnisse der Kollektiv-Linse und der Okular-Linse sind so gewählt, dass ein möglichst gutes Bild des betrachteten Gegenstands erzeugt wird, während für die vom Fadenkreuz kommenden Strahlen die Okular-Linse besser in umgekehrter Stellung wäre (convexe Seite aussen). So lange nur *ein* Fadenkreuzpunkt in der *Mitte* des Gesichtsfeldes gebraucht wird, ist dieser Übelstand von geringer Bedeutung; wenn aber mehrere Fäden deutlich gesehen werden sollen, wie z. B. beim Distanzmesser, so werden beim *Huyghens*schen Okular diejenigen Fäden, welche nicht Durchmesser des Gesichtsfeldes sind, undeutlich und krumm erscheinen.

Wenn man nach dieser theoretischen Rücksicht z. B. für Distanzmesser kein *Huyghens*sches Okular anwenden soll, so thut doch der Landmesser, welcher keine besonderen optischen Kenntnisse hat, am besten, diese Wahl dem Mechaniker zu überlassen und sein Urteil über ein Fernrohr lediglich nach dem *Erfolg* abzugeben.

Wir haben z. B. ältere *Fraunhofer*sche Fernröhre mit *Huyghens*schen Okularen als Distanzmesser vorzüglich gefunden.

Das beste Prüfungsmittel für die Güte der Fernrohrbilder hat der Landmesser in seinen *Nivellierlatten.*

Ein Nivellier-Fernrohr soll jedenfalls auf 50 Meter Entfernung die Zehntel einer Centimeter-Teilung scharf zeigen $\left(\frac{1^{mm}}{50^m}\,\varrho'' = 4''\right)$. Grössere (oder geringere) Ansprüche sind nach dem Zweck, der erreicht werden soll, zu bemessen.

§ 46. Das Mikroskop.

Ähnlich wie das Fernrohr zur Gewinnung vergrösserter Bilder entfernter Gegenstände dient, benützen wir das Mikroskop zur Vergrösserung naheliegender Gegenstände, namentlich zum Ablesen feiner Teilungen.

Nach Andeutung von Fig. 1. und Fig. 2. besteht ein Mikroskop aus einem Objektiv O und einem Okular, das meist aus zwei Linsen A und B zusammengesetzt ist, ähnlich wie die Fernrohr-Okulare. Man hat auch die zwei wesentlich verschiedenen Anordnungen nach *Ramsden* und *Huyghens* bzw. *Campani*, welche wir schon in § 43. und § 44. kennen gelernt haben.

Fig. 1.
Mikroskop mit *Ramsden*schem Okular.

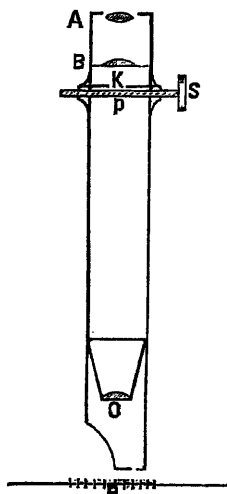
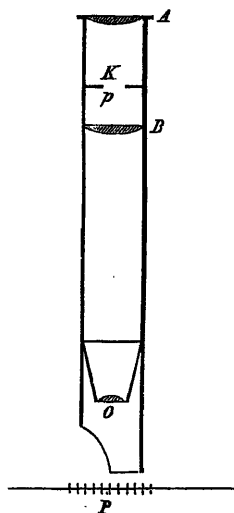



Fig. 2.
Mikroskop mit *Campani*schem (*Huyghens*) Okular.

Auch der bei K ausgespannte Doppelfaden hat dieselbe Bedeutung wie das Fadenkreuz eines Fernrohrs.

Ein Punkt P ist dann angezielt, wenn sein Bild p in der Fadenmitte erscheint.

In Fig. 1. ist ausser den Linsen-Verhältnissen noch eine Schraube S angedeutet, von welcher wir später (in § 49.) reden werden.

Die *Vergrösserung* eines Mikroskops kann man ähnlich bestimmen wie bei (3) , (4) , (5) § 41. S. 120 und 121 für ein Fernrohr angegeben ist, zumal wenn man ohnehin eine Teilung von bekannter wahrer Grösse im Gesichtsfeld des Mikroskops hat.

Bei *Schätzung* von Mikroskop-Vergrösserungen kann man oft auch andere bekannte Eindrücke zu Hilfe nehmen.

Beispielsweise sagen wir: die Teilung eines italienischen (Clebs) Instrumentes mit nur 4^{cm} Durchmesser, mit Strich-Abstand von 0,1 Centesimal-Grad, macht im Mikroskop ungefähr denselben Eindruck wie die Centimeter-Teilung einer Nivellier-Latte in 50 Meter Zielweite bei 25facher Vergrösserung des Nivellier-Fernrohrs.

Die lineare Grösse der Clebsteilung ist:

$$t = 20^{mm} \frac{\pi}{2000} = 0{,}0314^{mm}$$

Die Nivellierlatten-Teilung, auf die Vergrösserung 1 und die Sehweite $0{,}2^m$ reduziert, ist:

$$T = 25 \times 10^{mm} \frac{0{,}2^m}{50^m} = 1{,}0^{mm}$$

Hienach wäre die geschätzte Vergrösserung des Clebs-Mikroskopes:

$$v = \frac{1,0}{0,0314} = 32$$

Stimmung eines Mikroskopes zur Ablesung einer Teilung (Fig. 3.).

Die Mikroskope, welche wir später näher kennen lernen werden, haben im Gesichtsfeld, *K* Fig. 1. und Fig. 2., gewisse Faden-Abstände s (Fig. 3.), welche mit der Einheit t der zu betrachtenden Teilung in Beziehung stehen sollen.

Der Faden-Abstand s ist nämlich bei Schrauben-Mikroskopen gleich der Verschiebung, welche der Faden durch eine Schrauben-Umdrehung erfährt. Bei Schätz-Mikroskopen ist jener Wert s geradezu durch zwei feste Fäden, oder zwei Striche auf einem Glasplättchen dargestellt.

In Fig. 3. ist ein einfaches Mikroskop angedeutet, d. h. ein Mikroskop, welches nur ein Objektiv und ein Okular hat, welch letzteres bei Fig. 3. nicht in Betracht kommt.

Fig. 3.
Mikroskop-Stimmung.

Ausser dem Teilungswert t und dem Faden-Abstand s (Schraubenwert) sind die Abstände d und D von dem Objektiv angegeben. Die Brennweite des Objektivs sei f, dann bestehen die zwei Gleichungen:

$$\frac{1}{D} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f} \qquad \frac{s}{D} = \frac{t}{d} \tag{1}$$

Wenn man hier entweder d oder D eliminiert, so erhält man:

$$D = f + \frac{sf}{t} \qquad d = f + \frac{tf}{s} \tag{2}$$

Während diese Gleichungen für ein richtig gestimmtes Mikroskop gelten sollen, bei welchem s einen gewünschten Wert, z. B. genau *eine* Schrauben-Umdrehung, hat, betrachten wir nun einen Fall mit anderen Werten D', d' und s', wobei s' zu gross oder zu klein sei im Vergleich mit dem gewünschten genauen Wert s. Dann hat man statt (2) folgende andere Gleichungen:

$$D' = f + \frac{s'f}{t} \qquad d' = f + \frac{tf}{s'} \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgen die Differenzen:

$$D - D' = \frac{fs}{t}\left(1 - \frac{s'}{s}\right) \qquad d - d' = -\frac{ft}{s'}\left(1 - \frac{s'}{s}\right) \tag{4}$$

Nach (1) kann man hier einsetzen:

$$f = \frac{Dd}{D+d} \quad \text{und} \quad \frac{s}{t} = \frac{D}{d}$$

Auch kann man in der zweiten Formel (4) näherungsweise im Nenner $s' = s$ setzen, und damit wird (4):

$$D - D' = \frac{D^2}{D+d}\left(1 - \frac{s'}{s}\right) \qquad d - d' = -\frac{d^2}{D+d}\left(1 - \frac{s'}{s}\right) \tag{5}$$

$$(D + d) - (D' + d') = (D - d)\left(1 - \frac{s'}{s}\right) \tag{6}$$

Diese Gleichungen (5) und (6) kann man unmittelbar benützen, wenn das Mikroskop entweder überhaupt nur ein einfaches Okular hat, oder wenn das Okular wie

bei Fig. 1. so konstruiert ist, dass keine Kollektiv-Linse zwischen das Objektiv und den Faden K zu stehen kommt, wie in Fig. 2. Für diesen Fall müsste man eine besondere Untersuchung anstellen, auf welche wir uns hier nicht einlassen. (Eine entsprechende Theorie werden wir später beim Distanzmesser zu behandeln haben.)

Um die Bedeutung der Formeln (5) und (6) durch ein Zahlenbeispiel zu veranschaulichen, wollen wir folgendes annehmen:

Eine Mikroskop-Schraube gebe für 5′ Teilung den Umdrehungswert 5′ 9″, dann ist:

$$\frac{s'}{s} = \frac{5'\,9''}{5'\,0''} = \frac{309''}{300''} = 1{,}030 \quad , \quad 1 - \frac{s'}{s} = -0{,}030$$

Die Abstände D und d wurden gemessen:

$$D = 85^{mm} \qquad d = 48^{mm} \qquad D + d = 133 \qquad D - d = 37$$

dann berechnet man nach (5) und (6):

$$D - D' = -1{,}63^{mm} \qquad d - d' = +0{,}52^{mm} \tag{7}$$

$$(D + d) - (D' + d') = -1{,}11^{mm} \tag{8}$$

Man muss hiernach das Objektiv gegen das Fadenkreuz um $1{,}6^{mm}$ hineinschieben, und dann das ganze Mikroskop um $1{,}1^{mm}$ gegen die Teilung herunterschieben.

Kapitel VI.

Der Theodolit. *)

§ 47. Beschreibung des Theodolits.

Der Theodolit ist ein Instrument, das zum Messen von Horizontal-Winkeln oder auch zum Messen von Horizontal-Winkeln und von Höhen-Winkeln dient.

Wir behandeln in diesem Kapitel hauptsächlich die Horizontal-Winkel-Messung mit dem Theodolit.

Unsere Instrumenten-Beschreibung schliesst sich an die vier Abbildungen an, welche auf S. 141—144 von ausgewählten charakteristischen Formen unserer Sammlungen gegeben sind, wozu noch einzelne Teile besonders herausgezeichnet wurden.

---

*) Über die Etymologie des Wortes „Theodolit" vgl. „Zeitschr. f. Verm. 1880", S. 55, *Sanders*; 1883, S. 321, *Zöppritz*.

Das Wort *Theodolit* scheint hiernach aus dem Arabischen durch Verschmelzung mit dem englischen Artikel *the* entstanden zu sein. Das Wort wird im Deutschen jetzt so dekliniert:

der Theodolit	die Theodolite
des Theodolits	der Theodolite
dem Theodolite	den Theodoliten
den Theodolit	die Theodolite.

1) Das Fussgestell.

Der Unterteil des Theodolits besteht, wie bei den meisten Messungs-Instrumenten, aus einem Dreifuss, welcher in Fig. 1. durch das Mittelstück FG mit den drei Fortsätzen A angedeutet ist.

Die Fortsätze A haben Schrauben-Muttern, in welchen die drei Stellschrauben B laufen, durch deren Umdrehung man den Dreifuss nach allen Richtungen ein wenig neigen oder heben kann.

Fig. 1.
Dreifuss und Stativ.

Durch diese Stellschrauben B, in Verbindung mit einer Libelle (von welcher später die Rede sein wird) wird das „Horizontalstellen" des Instrumentes bewirkt, eine Operation, welche mit wenigen Handgriffen erlernt wird und keiner Beschreibung bedarf.

In Fig. 1. ist auch die Verbindung des Dreifusses FG mit einem hölzernen *Stativ* angegeben, indem das Stativ im Vertikalschnitt gezeichnet ist, und dabei die Stativplatte C mit den Fuss-Schrauben H und der Durchbohrung DD' zeigt. Die Öffnung DD' ist mit weitem Spielraum gemacht, damit für den Dreifuss mit dem Zapfen E und mit dem unten angehängten Lote S auch *nach* der Aufstellung des Statives noch eine mässige Verschiebung auf der Stativplatte verfügbar bleibt.

Nach unten ist die Öffnung DD' durch die verschiebbare Platte K geschlossen, und die Mutter M, mit der darüber gespannten Spiralfeder, hält den Dreifuss an die Platte mässig gepresst, so dass noch Umdrehen der Schrauben B möglich ist.

Dieses *eine* Beispiel einer Stativ- und Dreifuss-Konstruktion mag hier genügen.

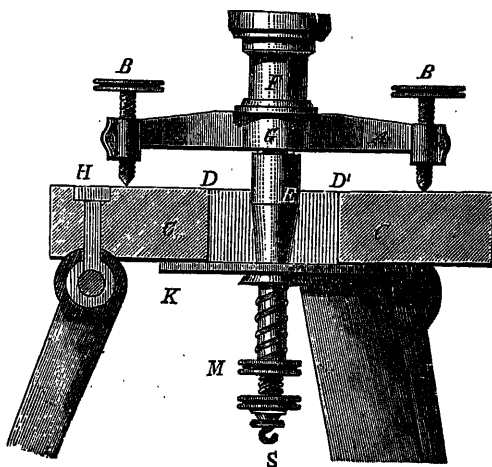
2) Der Limbus D)*

ist eine horizontale Scheibe, bei kleinen Instrumenten massiv, bei grösseren Instrumenten meist zur Verminderung des Gewichts mehrfach durchbrochen. Am Rande der Limbus-Scheibe ist auf einem eingelegten Silberstreifen die Teilung fein eingerissen.

Die Teilung giebt unmittelbar nur etwa Sechstels-Grade (10 Minuten), so dass 2160 Teilstriche am Rande vorhanden sind. Die Hilfsmittel, welche man hat, um an einer solchen Teilung Ablesungen von 10″ und noch feiner zu machen, werden wir in § 48. bis § 50. besonders behandeln.

Der Limbus-Kreis kann mit dem Untergestell des Theodolits fest verbunden sein; es ist aber aus zahlreichen Gründen besser, den Limbus gegen das Untergestell drehbar zu machen.

---

*) Die Literierung der Theodolit-Teile bezieht sich auf Fig. I. II. und III. S. 141—143 ziemlich gleichförmig, während Fig. IV. S. 144 andere Literierung hat.

Da man bei solcher Drehbarkeit mit dem Theodolit nach dem sogenannt Repetitions-Verfahren messen kann, so nennt man einen Theodolit mit drehbare Limbus häufig auch einen „Repetitions-Theodolit", und einen Theodolit mit nicl drehbarem Limbus einen „Einfachen Theodolit".

Da jedoch jenes Repetitions-Verfahren nicht mehr die Bedeutung hat, welch man ihm früher beilegte, ist auch jene Benennung zurückgetreten, zumal fast *al* Theodolite jetzt drehbaren Limbus haben.

3) *Die Alhidade E*

ist der Zeiger, welcher zur Ablesung am Limbus gebraucht wird. Die Alhidade wär daher in der einfachsten Gestalt ein um den Limbus-Mittelpunkt sich drehendes Lineal

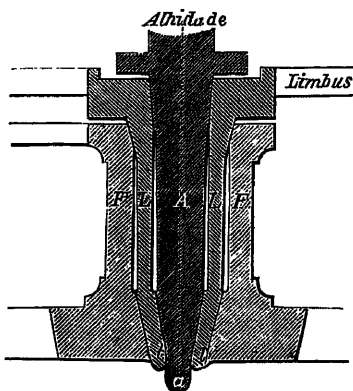
Bei unseren Theodoliten besteht die Alhidade aus einer mit dem Limbus con centrischen Kreisscheibe, welche an den beiden Enden eines Durchmessers die Nonie oder Mikroskope trägt (welche wir in § 48. bis § 50. näher betrachten werden).

Man kann hiernach den Limbus und die Alhidade mit dem Zifferblatt und den Zeiger einer Uhr vergleichen: der Limbus ist das Zifferblatt, die Alhidade der Zeiger

Indessen hat die Alhidade des Theodolits doch auch noch einen anderen Zwecl als den des blossen Zeigers; die Alhidade trägt nämlich auch die Zielvorrichtung, d. h das Fernrohr, zwar nicht unmittelbar, aber durch Vermittlung zweier Träger.

4) *Die vertikale Axe*

ist in Fig. 2. im Vertikalschnitt gezeichnet. Die Axenform ist konisch, wenigsten oben und unten, während die Mitte so ausgearbeitet ist, dass keine Berührung mi dem Lager stattfindet.

Fig. 2.
Vertikale Axe.
(Massstab etwa = 1 : 2.)

Der von der Alhidade nach abwärts gehend konische Zapfen *A* läuft in einem entsprechen den, mit dem Limbus verbundenen Lager.

Nun soll aber bei den meisten Theodolite der Limbus selber gegen das Untergestell dreh bar sein (Repetitions-Theodolit), und dann mus das Limbus-Lager *L* selber wieder als Axe gege das Fussgestell *F* wirken. Die Limbus-Axe *I* ist daher durchbohrt, wirkt innen als Lager und aussen als Axe.

Das Material einer Axe soll immer härte als das des Lagers sein, damit die ganze Abnützung auf das Lager geworfen, und dadurch der Querschnitt der Axe kreisförmig erhalten bleibt. Man nimmt deswegen bei festem Limbus die Alhidaden-Axe *A* aus Stahl, und das Lager aus Rotguss oder Messing, dagegen bei drehbarem Limbus die Alhidaden-Axe *A* aus Stahl, die Limbus-Axe *L*, welche zugleich Lager der vorigen ist, aus Rotguss, und das Lager der Limbus-Axe *F*, wie überhaupt das ganze Fussgestell aus Gelbguss. Die vertikale Axe und ihr Lager ist nächst der Limbus-Teilung der empfindlichste Teil des Theodolits.

5) *Feder-Unterstützung der vertikalen Axe.*

Bei kleineren Instrumenten kann man den konischen vertikalen Zapfen schlechthin mit seinem natürlichen Gewicht in das Lager abwärts drücken lassen.

Bei grösseren Instrumenten lässt man den Zapfen nicht mit seinem ganzen Gewicht in das Lager drücken, damit die Reibung zwischen dem Zapfen und dem Lager, bei bedeutendem Gewicht des ersteren, (welches durch das Gewicht der Fernrohrträger und des Fernrohrs selbst noch vermehrt wird), nicht zu stark wird. Man lässt dann das untere Zapfen-Ende (*a* in Fig. 2. unten hervorragend) sich auf eine Feder stützen, deren Spannung durch Schrauben reguliert werden kann.

Die Anordnung dieser Federung (welche in Fig. 2. nicht angedeutet ist) ist sehr mannigfaltig, man hat z. B. dreiarmige ebene Federn, Spiralfedern, kugelabschnittförmige Federn u. s. w. Wenn ein doppeltes Axensystem vorhanden ist, so muss ihm auch eine doppelte Federung entsprechen, d. h. es müssen dann in Fig. 2. die unteren Enden *a* und *l* beide unabhängig von einander unterstützt werden.

Die Anordnung der Federung ist auch bedingt durch die Frage, ob das Instrument an das Stativ angeschraubt werden soll, wie z. B. bei Fig. 1., oder nicht.

Die Federung der Vertikal-Axe ist oft von aussen kaum zu erkennen.

Bei dem *Bamberg*-Instrument Fig. IV. S. 144, wo die konische Axe *B* aufwärts gerichtet ist, ist in der Mitte über *B* eine Handschraube angebracht (in der Fig. IV. S. 144 nicht deutlich zu sehen), durch deren Drehung man die Federung anziehen oder nachlassen, und damit den Gang der Alhidade leichter oder härter machen kann.

6) *Die Brems-Vorrichtung und die Mikrometer-Bewegung*

dienen zusammen zum groben und zum feinen Einstellen des Fernrohrs und der Alhidade (*H* Fig. I.).

Wenn der Limbus selbst drehbar ist, so wird eine zweite Brems- und Mikrometer-Anordnung erforderlich (*H'* Fig. I.), um auch den Limbus beliebig scharf drehen und stellen zu können.

Dieses ist bei den meisten Nonien-Instrumenten der Fall (Fig. I., II. und III.), dagegen bei Mikroskop-Instrumenten findet man meist für die Limbus-Drehung nur eine Bremsung (drei Speichen, bei Fig. IV. ohne Buchstaben), aber keine Mikrometer-Einstellung, so dass man nur von freier Hand eine gewisse Ablesung auf einen Zielpunkt bringen kann. (Es wäre zu wünschen, dass auch Instrumente von der Art wie Fig. IV. feine Limbus-Einstellung hätten.)

Die Hauptsache bei allen Mikrometer-Bewegungen ist, dass kein „toter Gang" entsteht, d. h., dass nach Anziehen der Bremsschraube, und ohne Angriff der Mikrometerschraube, keine Drehung der Alhidade, also auch keine Verstellung des Fernrohrs, oder des Fadens im Gesichtsfeld möglich ist.

7) *Die horizontale Axe und das Lager der horizontalen Axe.*

Die horizontale Axe, um welche sich das Fernrohr beim Auf- und Niederkippen dreht, liegt in zweien Y-förmigen Lagern (vgl. Fig. 3. und Fig. 4. S. 138). Die beiden Enden der stählernen Horizontal-Axe sind cylindrisch abgedreht, und berühren die Y-förmigen Lager nur in je zwei Punkten.

Die Axen-Lager sind durch die Lager-Stützen (in Fig. 3. durch *K* angedeutet), mit der Alhidade verbunden.

Die beiden Axen-Lager müssen offenbar gleich hoch sein, und da der Mechaniker dieses von vornherein nicht genügend scharf erzielen kann, wird das eine der beiden Lager mit einer Vorrichtung zur Regulierung der Höhenlage versehen. Diese Vorrichtung besteht gewöhnlich aus Zug- und Druck-Schrauben, wie in Fig. 3. angedeutet ist.

Fig. 3. Fig. 4.
Lagerung und Höhen-Regulierung der horizontalen Axe.

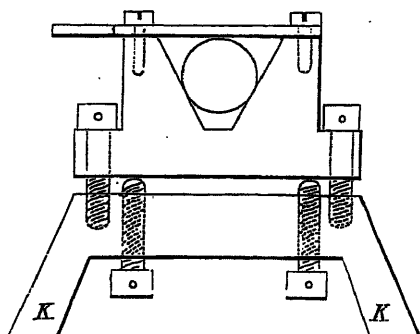
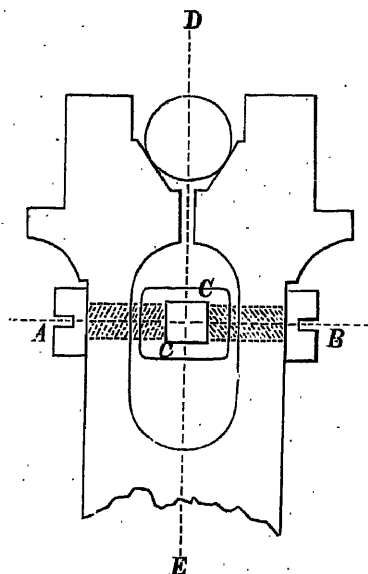



Fig. 4. zeigt eine andere Art der Höhen-Regulierung, welche in der Zeitschr. f. Verm. 1876, S. 38—40 beschrieben wurde (von *Hahn* in Kassel).

Dabei ist A eine Schraube mit linkem Gewinde, B eine Schraube mit rechtem Gewinde. Beide Schrauben haben ihre Muttern in dem Stücke C, welches durch einen Stift gedreht werden kann. Thut man dieses, so werden, vermöge Federung des Messings, die beiden Lagerteile sich erweitern oder verengen, und damit das Lager senken oder heben.

8) *Das Fernrohr.*

Nachdem wir das Fernrohr im allgemeinen bereits ausführlich in § 41. bis § 45. beschrieben haben, ist es jetzt nur noch nötig, einige Einzelheiten zu behandeln.

Dazu gehört zuerst *die Verschiebung des Fadenkreuzes*, welche durch Fig. 5. S. 139. angedeutet ist.

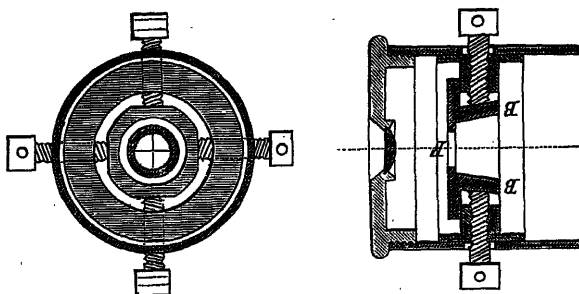
Damit die Ziel-Axe (Kollimations-Axe) des Fernrohrs genau in eine bestimmte Lage (nämlich rechtwinklig zur horizontalen Axe) gebracht werden kann, muss das Fadenkreuz im Innern der Röhre quer zur Längsrichtung verschiebbar sein.

Diese Verschiebung des Fadenkreuzes im Innern der Okular-Röhre ist durch Fig. 5. veranschaulicht, welche wir schon in § 41. S. 119 bei der Erklärung der Ziel-Axe betrachtet haben.

Das Fadenkreuz befindet sich bei F auf dem konisch gestalteten Diaphragma-Ringe $B\,B$.

Will man das Fadenkreuz nach links rücken, so hat man offenbar die linke Schraube zu lösen, und die rechte Schraube entsprechend nachzudrehen u. s. w.

In Fig. 5. haben wir *Druck*-Schrauben; manchmal kommt auch die Einrichtung von *Zug*-Schrauben vor, welche ihre Muttern in dem Ringe *B* haben. Solche Einzelheiten hat man in jedem Falle zuvor zu betrachten, ehe man die Schrauben in Angriff nimmt.

Fig. 5.
Verschiebung des Fadenkreuzes.

In Fig. 5. ist auch eine Verschiebung des Fadenkreuzes in *Längs*schlitzen angedeutet, welche der Regulierung des Abstandes *y* in der Theorie von (4) §. 40. S. 116 entspricht.

Statt dieser Verschiebung des Fadenkreuzes selbst wird sonst auch eine Verschiebung der Okular-Linse angewendet, welche offenbar denselben Zweck erreicht. Es giebt aber Fälle, in welchen es nicht gleichgültig ist, ob das Fadenkreuz oder die Okular-Linse verschoben wird. (Wir werden später beim Distanzmesser darauf zurückkommen.)

Die Bewegungen des Fernrohrs, welche teils während des Messens selbst, teils zu Fehler-Untersuchungen gemacht werden, führen bestimmte Namen:

1) *Kippen* heisst eine Auf- und Nieder-Bewegung des Fernrohrs mit Drehung um die horizontale Axe.

Das Fernrohr soll für gewöhnlichen Okular-Auszug im Gleichgewicht sein, so dass man Horizontal-Winkel auch ohne Benützung der Vertikal-Mikrometer-Bewegung messen kann.

2) *Durchschlagen* heisst eine vollständige Kippung des Fernrohrs um 180°, so dass das Objektiv und das Okular vertauscht werden.

Zum unmittelbaren Durchschlagen ist erforderlich, dass die Fernrohr-Träger hoch sind und das Fernrohr nicht zu lang ist. Bei Fig. I. (S. 141) kann man mit dem Okular unten zwischen den Trägern durchkommen, bei Fig. II. (S. 142) mit dem Objektiv. Bei den zwei grösseren Instrumenten Fig. III. (S. 143) und Fig. IV. (S. 144) kann man nicht unmittelbar durchschlagen, sondern nur mittelbar, dadurch, dass man das Fernrohr zuerst aus den Lagern hebt, und mit vertauschtem Objektiv und Okular wieder einlegt.

Unmittelbares Durchschlagen des Fernrohrs ist dringend zu wünschen. Wenn das Durchschlagen mit dem Okular-Ende geschieht, so muss so viel Raum sein, dass auch der Okular-Auszug für Zielweiten bis 100^m durchgeht.

3) *Umlegen* heisst Ausheben des Fernrohrs aus den Lagern und mit vertauschten Zapfen (links und rechts) wieder einlegen. Das Umlegen wird manchmal durch unsymmetrische Teile, am Höhenkreis u. s. w., erschwert, oder auch ganz unmöglich gemacht.

9) *Libellen.*

Man kann mit *einer* Libelle zum Horizontalstellen des Instruments auskommen, die meisten Theodolite haben aber zwei und manchmal drei Libellen.

Wir unterscheiden zwei wesentlich verschiedene Arten der Libellen am Theodolit:

I. *Horizontal-Axen-Libelle (Reiter-Libelle),*

II. *Alhidaden-Libelle.*

Eine etwa auf dem Fernrohr selbst befestigte Libelle kann das Instrument zum Nivellieren geeignet machen, für den Theodolit als Winkelmesser hat sie wenig Wert, und bleibe hier ausser Betracht. Selbst zum Messen von Höhen-Winkeln ist eine solche Fernrohr-Libelle kein gutes Mittel.

Wir beschränken daher unsere Betrachtung auf die oben unter I. und II. angegebenen Anordnungen.

I. Die Reiter-Libelle auf der horizontalen Axe ist nicht fest, sondern abnehm bar, und kann in zwei Lagen aufgesetzt werden. Eine solche Libelle ist in Fig. III. (S. 143) und Fig. IV. (S. 144) aufgesetzt gezeichnet, und in Fig. I. (S. 141) und Fig. II. (S. 142) abgenommen angedeutet.

Die Horizontal-Axen-Libelle hat bei Landmess-Theodoliten durchaus nicht die Bedeutung wie bei astronomischen Theodoliten, weil beim Landmessen selten starke Ziel-Neigungen vorkommen, und bei nahezu wagrechten Ziellinien, welche in der Landmessung die Regel bilden, es auf scharfe Horizontrierung der horizontalen Axe weniger ankommt.

II. Unter Alhidaden-Libelle verstehen wir jede mit der Alhidade des Horizontalkreises fest verbundene Libelle, in der Mitte oder seitwärts, sei es eine Axen-Längs-Libelle (L_1 in Fig. I. und Fig. II.), welche für Höhen-Winkel nötig ist, oder eine Röhren-Quer-Libelle oder eine Dosen-Libelle.

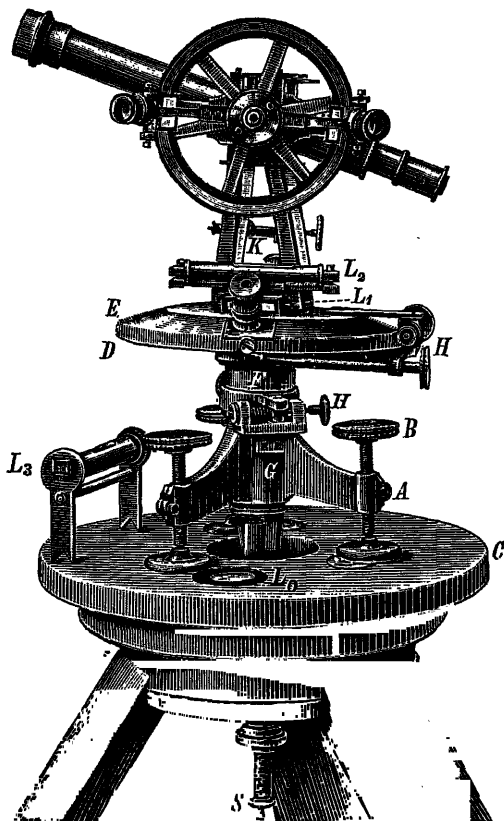
Eine Dosen-Libelle sollte an keinem Theodolit fehlen. Bei kleinen Feldmess-Theodoliten genügt eine solche meist überhaupt zum Messen der Horizontal-Winkel. Bei grösseren Theodoliten, welche ausserdem mit einer feineren Röhren-Libelle versehen sind, dient die Dosen-Libelle zum ersten vorläufigen Einstellen, wodurch einesteils überflüssige Arbeit gespart und andernteils die Axe des Theodolits vor vielem überflüssigem Drehen bewahrt wird.

Wenn ein Theodolit eine Alhidaden-Libelle *und* eine Reiter-Libelle hat (wie in Fig. I. und Fig. II.), so kann man im allgemeinen mit der Alhidaden-Libelle messen, und die Reiter-Libelle nur ausnahmsweise, etwa zur Prüfung und Berichtigung der Horizontal-Axe, benützen. (Um dieses anzudeuten, sind die Reiter-Libellen in Fig. I. und Fig. II. abgesetzt gezeichnet.)

Anmerkung.

Unsere vorstehende Instrumenten-Beschreibung hat sich auf das Nötigste beschränkt; für Weiteres ist zu empfehlen:

„Anweisung zur Behandlung der Universal-Instrumente und Theodolite mit mikroskopischer Ablesung von *Carl Bamberg*. Berlin N. Linienstrasse 158.“ 1883. Buchdruckerei von Gustav Schade (Otto Francke) in Berlin N.

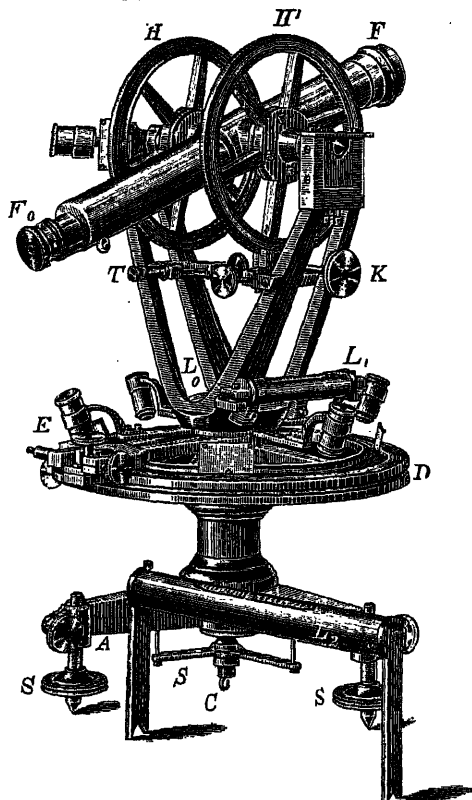
Fig. I.
Kleiner Feldmess-Theodolit.

(Hannov. Sammlung.)

Kleiner Feldmess-Theodolit von Mechaniker *Randhagen* in Hannover.

Dieses Instrument eignet sich namentlich zum Messen von Polygon-Zügen und von Triangulierungen IV. Ordnung. Mit dem Höhenkreis wird zugleich die Verwendbarkeit zu Polygon-Höhen-Zügen und zur Höhenmessung für nachfolgende Tachymetrie gesichert.

Der Horizontalkreis hat 15^{cm} Durchmesser und giebt $10''$ Ablesung an zwei Nonien, der Höhenkreis hat 12^{cm} Durchmesser und giebt $30''$ Ablesung. Das Fernrohr ist 28^{cm} lang und wird mit dem Okular durchgeschlagen. Die Vergrösserung des Fernrohrs ist 18fach.

Es sind drei Libellen vorhanden: Eine Dosen-Libelle L_1 in der Mitte (in der Figur nicht sichtbar), eine Röhren-Längs-Libelle L_2, welche bei der Messung von Höhen-Winkeln unbedingt nötig ist, aber auch zum allgemeinen Horizontalstellen für Horizontal-Winkel (bei steilen Zielungen) gebraucht wird. Die Empfindlichkeit dieser Libelle L_2 ist etwa $1'$ auf 1 Strich. Eine Reiter-Libelle L_3 kann auf die Horizontal-Axe aufgesetzt werden (in der Figur abgesetzt gezeichnet). Diese Libelle L_3 mit Empfindlichkeit von $1'$ auf 1 Strich wird bei den Messungen selbst gewöhnlich nicht gebraucht, sondern dient nur zur Prüfung und Berichtigung der Horizontal-Axe.

Fig. II.
Grosser Feldmess-Theodolit.

(Hannov. Sammlung.)

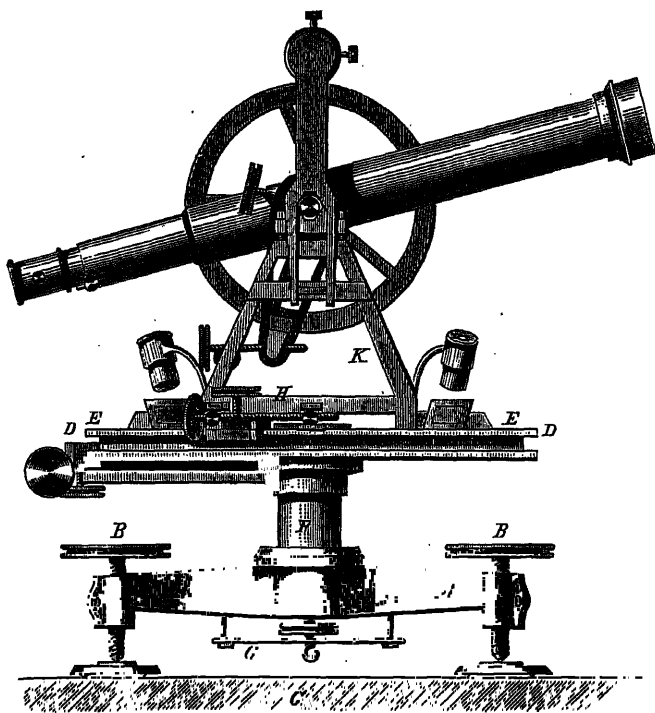
Grosser Feldmess-Theodolit nach *Ertel*schem Muster von Mechaniker *Pfaff* in Hannover konstruiert, mehrfach für unsere Zwecke abgeändert von Mechaniker *Randhagen* in Hannover.

Der Horizontalkreis hat 20,4^cm^ Durchmesser und 10″ Ablesung an vier Nonien. Der Höhenkreis H hat 13^cm^ Durchmesser und 20″ Ablesung an zwei Nonien. (Der zweite Kreis H' hat keine Teilung, sondern ist nur zur Symmetrie vorhanden.)

Das Fernrohr hat 33^cm^ Länge und 22fache Vergrösserung; dasselbe lässt sich mit dem Objektiv durchschlagen.

Es sind drei Libellen vorhanden, ebenso wie bei dem kleinen Instrument Fig. I., nämlich eine Dosen-Libelle L_0, eine Röhren-Längs-Libelle L_1 mit 30″ Empfindlichkeit und eine Reiter-Quer-Libelle L_3 mit 7″ Empfindlichkeit, als Kontrolle für die Horizontal-Axe. (L_1 und L_2 dürften besser beide gleich, etwa 10″ bis 15″ Empfindlichkeit haben.)

Dieses Instrument, welches nach einigen Wiederholungen Horizontal-Winkel auf etwa 2″ bis 5″ und Höhen-Winkel auf etwa 10″ genau giebt, dabei leicht und handlich ist, ist zu Landmesser- und Ingenieur-Messungen der verschiedensten Art sehr geeignet.

Fig. III.
Münchener Theodolit.

(Karlsr. Sammlung.)

Dieser Theodolit, von *Ertel* in München im Jahre 1823 konstruiert, wurde bei der Grossh. Badischen Triangulierung 1823—1852 gebraucht.

Der Limbus des Horizontalkreises hat 22^{cm} Durchmesser, ist in Zehntels-Centes.-Grade (10^{-}) geteilt, und giebt an vier Nonien Ablesung 10 Centesimal-Sekunden $(10^{=})$.

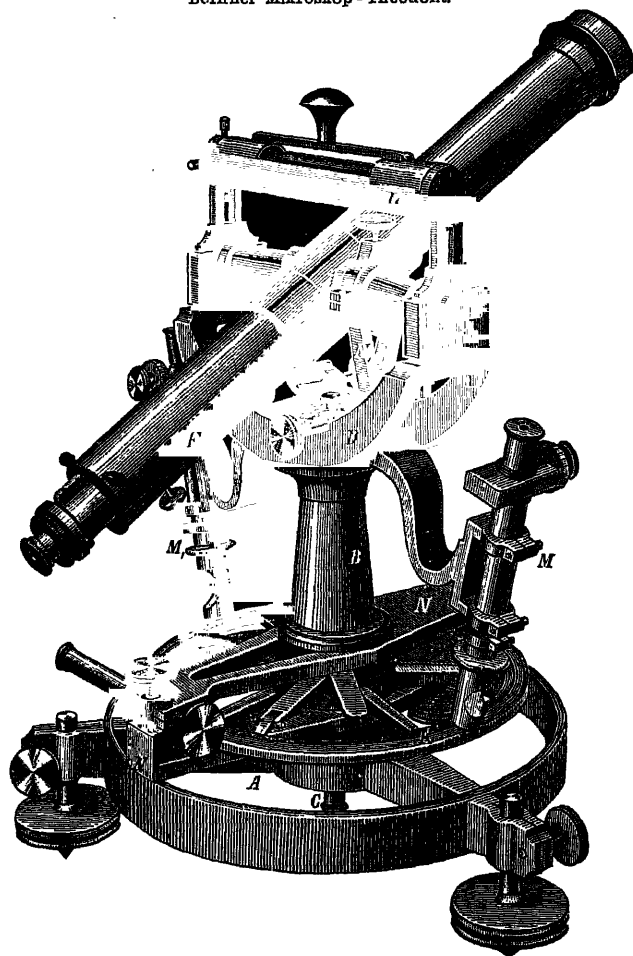
Das Fernrohr hat 36^{cm} Länge (in der Figur etwas verkürzt gezeichnet) und 30fache Vergrösserung mit *Huyghens*schem Okular.

Es ist nur *eine* Libelle *L* als Reiter auf der Horizontal-Axe vorhanden.

Der kleine Höhenkreis, mit *einem* Nonius, dem keine Längs-Libelle entspricht, dient nur als gelegentliche Beigabe und wurde nie ernstlich gebraucht.

Dieser Münchener Theodolit, in mechanischer und optischer Hinsicht ein Meisterwerk seiner Zeit, kann als Repräsentant der Instrumente dienen, mit welchen im zweiten Viertel unseres Jahrhunderts die deutschen, und namentlich die süddeutschen Landes-Triangulierungen ausgeführt wurden.

Über die Teilungs-Genauigkeit dieses Instrumentes und über Winkel-Messungen mit demselben nach der Repetitions-Methode werden wir in § 57. und § 58. Weiteres mitteilen.

Fig. IV.
Berliner Mikroskop-Theodolit.

(Hannov. Sammlung.)

Berliner Mikroskop-Theodolit von Mechaniker *Bamberg* in Berlin.

Der Horizontalkreis K hat 21 ^{cm} Durchmesser, ist in 5′ geteilt und wird durch zwei Schrauben-Mikroskope M und M_1 mit 16facher Vergrösserung abgelesen. Das Fernrohr hat 44 ^{cm} Länge, und giebt mit zwei *Ramsden*schen Okularen 40fache und 55fache Vergrösserung. Es ist nur *eine* Libelle L als Reiter auf der Horizontal-Axe angebracht, mit Empfindlichkeit = 5,9″. Beim Durchschlagen muss das Fernrohr aus den Lagen gehoben, und die Libelle L abgenommen werden.

Dieser Berliner Mikroskop-Theodolit, welcher in seinem Bau zum Teil den Instrumenten der früheren Werkstätte von *Pistor* und *Martins* nachgebildet ist, ist zur Zeit bei der trigonometrischen Abteilung der Landes-Aufnahme eingeführt, und zwar in dieser Grösse, Kreisdurchmesser = 21 ^{cm} für Triangulierung II. Ordnung, und entsprechend mit 27 ^{cm} und 35 ^{cm} Durchmesser für I. Ordnung.

§ 48. Der Nonius.

Der Limbus-Kreis eines gewöhnlichen Feldmess-Theodolits ist gewöhnlich nicht weiter geteilt als etwa in Drittels- oder Sechstels-Grade, man kann aber die Ablesung wohl auf etwa 10″ Schärfe bringen durch eine kleine Hilfsteilung, welche *Nonius* heisst.

Allgemein betrachtet, kommen bei dem Ablesen der Stellung eines Zeigers auf einer Teilung *zwei* Operationen vor: erstens die Untersuchung, *hinter* welchem Teil-Strich der Zeiger einschneidet, und zweitens die Messung des Abstands des Zeigers von dem vorhergehenden Teilstrich. Die letztere Operation wird bei rohen Messungen durch eine Schätzung ersetzt, bei Theodoliten führt man sie aus mittelst des Nonius oder des Mikroskops.

Der Nonius besteht aus einem kleinen längs der Haupt-Teilung verschiebbaren Massstab, dessen Teilung derjenigen des Limbus nahezu gleich ist.

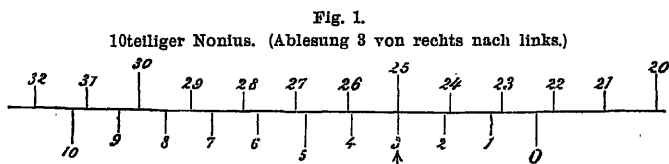
Ist L die Teilungs-Einheit des Limbus, N diejenige des Nonius, und m eine ganze Zahl, so ist:

$$(m-1)\,L = mN, \quad \text{also} \quad L > N \tag{1}$$

$$L - N = \frac{L}{m} = a \tag{2}$$

Man teilt also $(m-1)$ Limbus-Teile in m Nonien-Teile, z. B. 9 L in 10 N (Fig. 1.) oder 59 L in 60 N (Fig. 2. S. 146).

Der durch die Gleichung (2) bestimmte Wert a heisst die „Angabe des Nonius“. Wenn irgend ein Nonius-Strich mit einem Limbus-Strich zusammentrifft, so stehen die zwei nächsten Striche um a, die zwei darauffolgenden Striche um $2\,a$ von einander ab u. s. w. Wenn also z. B. (Fig. 1.) der dritte Nonius-Strich mit einem Limbus-Strich

Fig. 1.
10teiliger Nonius. (Ablesung 3 von rechts nach links.)

zusammenfällt, so steht der Nullstrich des Nonius um $3\,a$ von dem Strich 22 des Limbus ab, und da hier $m = 10$, also $a = 0{,}1\,L$, so ist die Stellung der Noniusnull gegen die Limbus-Teilung angegeben durch die Ablesung:

$$22 + 3 \times 0{,}1 = 22{,}3.$$

Häufig erhält die Angabe a des Nonius eine andere Benennung, als die Teilungs-Einheit des Limbus, und dann muss auch die Bezifferung des Nonius darnach gerichtet sein. Wenn z. B. ein Limbus in $^1/_6$ Grade geteilt ist, so ist $L = {}^1/_6{}^\circ = 10'$, und wenn hiebei $m = 60$, so ist $a = \frac{10'}{60} = 10''$. Dann wird man den Nonius nicht so beziffern:

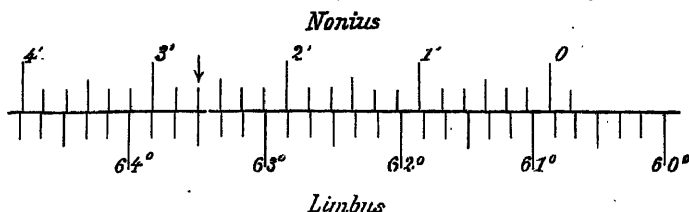
0 10″ 20″ 30″ 40″ 50″ 60″ 70″ 80″ . . .

sondern so:

0 10″ 20″ 30″ 40″ 50″ 1′ 1′10″ 1′20″ . . .

wobei Abkürzungen angewendet werden.

Unter dieser Voraussetzung hat man folgende Ableseregel:

Fig. 2.
60teiliger Nonius. (Ablesung 2′ 40″ von rechts nach links.)

1) Man betrachtet den Nonius-Nullstrich als Zeiger und sucht (von rechts nach links) denjenigen Limbus-Strich, hinter welchem der Zeiger abschneidet, z. B. 60° 50′ (Fig. 2.).

2) Man sucht auf dem Nonius (ebenfalls von rechts nach links) denjenigen Strich, welcher mit einem Limbus-Strich zusammenfällt, und liest die diesem *Nonius-Strich* zugehörende Ziffer ab, z. B. 2′ 40″.

3) Man schlägt die zweite Ablesung der ersten zu, also:

$$60^\circ\, 50' + 2'\, 40'' = 60^\circ\, 52'\, 40''.$$

Sollte kein Nonius-Strich mit einem Limbus-Strich genau zusammentreffen, so nimmt man nach Schätzung ein Mittel derjenigen zwei Striche, welche am besten passen.

Überteilung. Die Nonien haben gewöhnlich am Anfang und am Ende 1 bis 2 überschüssige Teilstriche, z. B. in Fig. 2. ist rechts von *0* noch ein Strich. Diese Über-Teilstriche sind angenehm zum Vergleichen, wenn es sich um Ablesung ganz am Anfang oder ganz am Ende des Nonius handelt. Auch kann man die Überteilung zur Untersuchung der Haupt-Teilung benützen, wovon in § 57. weiteres verhandelt werden wird.

Der im bisherigen beschriebene Nonius, mit den Gleichungen (1) und (2), ist der gewöhnliche, welcher bei Theodolit-Teilungen allein vorkommt, die Ablesung geht hiebei in dem Sinne *mit* der Haupt-Teilung.

Nun giebt es aber auch einen zweiten, sehr selten z. B. bei Barometern vorkommenden Nonius, mit Ablesung in dem Sinne *gegen* die Teilung.

Die hiefür gültigen Gleichungen sind:

$$(m+1)\,L = m\,N \tag{3}$$

$$N - L = \frac{L}{m} = a \tag{4}$$

Anmerkung.

Der Nonius ist nicht bloss für den Limbus eines Theodolits, sondern auch für viele andere Teilungen, eine sehr nützliche Einrichtung, welche aber auch manchmal unnötig angewendet wird, z. B. bei Planimeter-Ablesungen und manchen anderen kleinen Teilungen, bei welchen unmittelbares *Schätzen* an einem Zeiger-Strich denselben oder einen besseren Dienst thut.

§ 49. Das Schrauben-Mikroskop.

Nachdem der Grund-Gedanke des Mikroskops bereits in § 46. S. 131 mitgeteilt ist, beschreiben wir das Weitere an einem Beispiel Fig. 1.—3. von *Pistor* und *Martins*.

Fig. 1. zeigt den Mikroskop-Kasten mit abgenommener Deckplatte und mit abgeschraubtem Okular. In dem Kasten *K* ist ein Schlitten *A*, welcher zwei Parallelfäden *F* trägt. Der Schlitten *A* samt diesen Parallelfäden *F* wird durch die mit geteilter Trommel *B* versehene Schraube *S* bewegt, und man kann dadurch die Fäden *F* über einen im Gesichtsfeld sichtbaren Teilstrich einstellen (so dass der Strich zwischen den Fäden erscheint).

Die Verschiebungen des Fadens *F'* sind nun offenbar den Umdrehungen der Schraube *S* proportional; wir wollen der Einfachheit wegen zunächst annehmen, dass *eine* Umdrehung der Schraube *S* und der Trommel *B* gerade den Faden *F* von einem Teilstrich zum folgenden Teilstrich verschiebt. Wenn man dann die Trommel *B* dem Intervall zwischen zwei Teilstrichen entsprechend einteilt, so kann man an der Trommel *B* jeden Bruchteil eines Limbus-Intervalls messen.

Ehe wir das weiter verfolgen, seien die einzelnen Teile mechanisch erklärt:

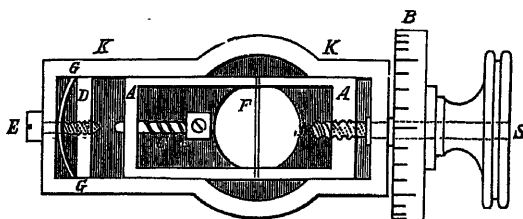
Fig. 1.
Schrauben-Mikroskop.

(Karlsr. Sammlung.)

Fig. 2.
Deckplatte mit Zeiger *Z*.

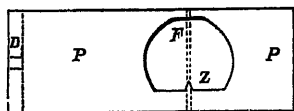
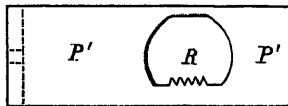



Fig. 3.
Deckplatte mit Rechen *R*.

In Fig. 1. ist *C* eine Spiralfeder, welche einem toten Gang der Schraube *S* entgegenwirkt.

Um eine gewisse Stellung des Fadens *F* im Gesichtsfelde als Normal-Stellung zu bezeichnen, hat man eine dünne Platte, welche mittelst des Verbindungsstückes *D* mit dem Kasten in Verbindung steht, über denselben hergedeckt. In Fig. 2. ist diese Deckplatte *P* als abgenommen besonders gezeichnet, und es ist durch die punktierten Linien die entsprechende Stellung der Fäden angedeutet.

Die Deckplatte trägt in der Öffnung für das Gesichtsfeld einen Zeiger *Z*, unter welchem die Normal-Stellung der Fäden ist. Die Deckplatte mit dem Zeiger kann mit Hilfe der Schraube *E* (Fig. 1.), gegen welche die Feder *G* drückt, etwas verschoben werden, damit die Normal-Stellung der Fäden der Ablesung Null an der Trommel *B* entspricht.

Wenn nicht *eine* Umdrehung der Schraube die Fäden von einem Teilstrich des Limbus zum folgenden schiebt, sondern z. B. 5 Umdrehungen, so müssen 5 Zeiger Z nebeneinander, d. h. ein sogenannter „Rechen" vorhanden sein, damit die einzelnen Umdrehungen der Schraube abgezählt werden können. Dieses ist in Fig. 3. S. 147 angedeutet. Der Mittelzahn des Rechens kann etwa noch besonders als Haupt-Zeiger gestaltet sein.

(Der Abstand zweier aufeinander folgender Rechenzähne wird dadurch genau gleich der Ganghöhe der Schraube gemacht, dass der Rechen mit demselben Schneidezeug, das zur Herstellung der Schraube gedient hat, geschnitten wird.)

Damit ist die Konstruktion und die Wirkungsweise des Schrauben-Mikroskops genügend erklärt, und wir können den Vorgang beim Einstellen und Ablesen an Fig. 4. und Fig. 5. (zu dem *Bamberg*-Theodolit Fig. IV. § 47. S. 144) verfolgen.

Fig. 4.
Gesichtsfeld des Mikroskops.
(Instrument *Bamberg* Fig. IV. S. 144.)

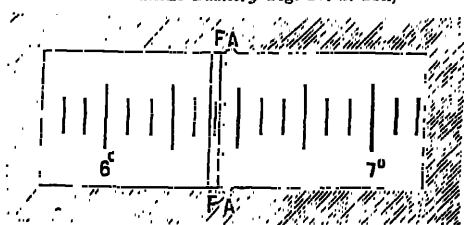



Fig. 5.
Trommel-Teilung der Mikrometer-Schraube.
Normal-Stellung. Ablese-Stellung.

(Hannov. Sammlung).

Der Limbus ist in $\frac{1}{12}$ Grade $= 5'$ geteilt, und *eine* Trommel-Umdrehung schiebt die Fadenmitte von einem Strich zum folgenden.

Bei normaler Trommel-Stellung A wird die Fadenmitte zwischen zwei Teilstriche gebracht, z. B.:

Strich links	*Fadenmitte*	*Strich rechts*
6° 25′	A	6° 30′

Nun dreht man mit der Schraube die Fadenmitte auf den linken Strich 6° 25′ und liest an der Trommel hiefür ab: 2′ 26″. Dann ist die ganze Ablesung:

$$6° 25' + 2' 26'' = 6° 27' 26''$$

(Dieses könnte auch z. B. 36° 27′ 26″ oder 206° 27′ 26″ u. s. w. entsprechen, denn die 30° oder 200° sieht man nicht im Mikroskop, sondern mit freiem Aug an besonderer Teilung.)

Wenn etwa der Weg vom Strich 6° 25′ zum Strich 6° 30′ durch *fünf* Schrauben-Umdrehungen gemessen würde, so hätte eine Schrauben-Umdrehung den Wert $1' = 60''$, die Trommel wäre schlechthin in 60 Teile geteilt, und man würde dann z. B. so ablesen:

Strich links	=	46° 25′
2 Rechen-Zähne	=	2′
26″ an der Trommel	=	26″
Gesamt-Ablesung	=	46° 27′ 26″

Eine grosse Umdrehungszahl, z. B. fünf, wie hier angenommen ist, für den Weg von einem Teilstrich zum folgenden, ist nicht bequem. Hat man etwa nur zwei oder drei Umdrehungen, so kann man die Ablesung am Rechen auch entbehren, indem man die ganze Minuten geradezu schätzt.

Doppel-Sekunden. Bei vielen Instrumenten ist die Bezifferung der Trommel nicht geradezu nach Sekunden, sondern nach Doppel-Sekunden gemacht, das hat den Zweck, bei der Mittelbildung aus den Ablesungen zweier Mikroskope, das Halbieren zu ersparen, wie folgendes Beispiel zeigt, wobei die Doppel-Sekunden durch das Zeichen ⁗ angedeutet sind.

	Bezifferung nach Sekunden	*Bezifferung nach Doppel-Sekunden*
Mikroskop I.	50° 36′ + 3′ 6″	50° 36′ + 3′ 3,0⁗
Mikroskop II.	+ 3′ 41″	+ 3′ 20,5⁗
Summe	+ 6′ 47″	+ 23,5⁗
Mittel	+ 3′ 23,5″	+ 23,5″
Gesamt-Ablesung	50° 39′ 23,5″	50° 39′ 23,5″

Dieser kleinen Ersparung an Rechen-Arbeit stehen aber viele Nachteile gegenüber:

An der Grenze zweier Minuten, z. B. bei 3′ 58″ = 3′ 29⁗ oder bei 4′ 2″ = 4′ 1⁗ kommt es vor, dass die ganzen Minuten in beiden Mikroskopen verschieden sind, sogar wenn die Mikroskope gut diametral stehen (was auch nicht immer der Fall ist), dann muss man, um obige Rechnungsart zu wahren, statt 4′ 1⁗ schreiben: 3′ 31⁗, oder statt 3′ 29⁗ muss man schreiben: 4′—1⁗ u. s. w.

Es kommt oft vor, dass die Messungen an einem Mikroskop ganz für sich stehen, z. B. bei Bestimmungen mittlerer Ablese- und Einstellungsfehler, bei Untersuchungen von Teilungsfehlern u. s. w.

Ob die kleinen Übelstände der Doppel-Sekunden durch die Ersparung des Halbierens beim Ausrechnen der Winkel aufgewogen werden, lässt sich nur subjektiv entscheiden.

Verfasser hat an allen seinen Instrumenten *einfache* Sekunden-Bezifferung.

Stimmungs-Korrektion.

Wir haben bis jetzt angenommen, dass die Verschiebung der Fadenmitte, von einem Strich zum folgenden Strich, genau durch *eine* Umdrehung der Schraube, oder eine *ganze* Zahl von Umdrehungen, bewirkt werde. Ob dieses genügend genau der Fall ist, erfährt man dadurch, dass man den Abstand je zweier Nachbar-Striche an vielen Stellungen der Teilung misst.

Mit dem *Bamberg*-Instrument Fig. IV. S. 144 wurde in dieser Weise eine Versuchs-Reihe zweifach gemacht in folgender Ordnung, aus welcher nicht nur der gesuchte Gangwert, sondern auch der mittlere Fehler der Einstellung erhalten wird:

Mikroskop A.

Teilstriche		Messungs-Reihe 1.			Messungs-Reihe 2.			$d =$	d^2
links	rechts	l_1	r_1	$l_1 - r_1 = \delta_1$	l_2	r_2	$l_2 - r_2 = \delta_2$	$\delta_1 - \delta_2$	
359° 55′	0° 0′	4′ 42″	4′ 38″	+ 4″	2′ 6″	2′ 2″	+ 4″	0″	0
9° 55′	10° 0′	2′ 49″	2′ 46″	+ 3″	1′ 16″	1′ 11″	+ 5″	— 2″	4
19° 55′	20° 0′	3′ 18″	3′ 17″	+ 1″	3′ 33″	3′ 31″	+ 2″	— 1″	1
29° 55′	30° 0′	3′ 23″	3′ 23″	0″	1′ 2″	0′ 59″	+ 3″	— 3″	9
. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	.
. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	.
349° 55′	350° 0′	0′ 51″	0′ 47″	+ 4″	1′ 24″	1′ 22″	+ 2″	+ 2″	4
(36)		Summen		+ 116			+ 85		443
	Mittel:	Mikroskop *A*		+ 3,2″			+ 2,4″		12,3
Entsprechend gab:									
		Mikroskop *B*		+ 2,5″			+ 1,6″		12,2

Hiezu ist zuerst noch zu bemerken, dass die Unterscheidung links und rechts sich auf den unmittelbaren Anblick im Gesichtsfeld des Mikroskops bezieht (vgl. Fig. 4. S. 148). Die Fadenbewegung geschah von rechts nach links (in dem Sinn von A nach F in Fig. 4. S. 148), die Ablesungen rechts wurden immer *zuerst* gemacht.

Nun ergiebt sich als Differenz zwischen einem Teilungs-Intervall und einer Trommel-Umdrehung

im Mittel für Mikroskop A $\quad \delta = +\frac{3,2+2,4}{2} = +2,8''$ (1)

„ „ „ „ B $\quad \delta = +\frac{2,5+1,6}{2} = +2,0''$ (2)

(Die Einzelwerte 3,2 und 2,4, sowie 2,5 und 1,6 differieren nicht unbedeutend unter sich um 0,8″ und 0,9″, doch sind diese Abweichungen immer noch in zulässigen Grenzen.)

Gleichzeitig haben wir das mittlere Differenz-Quadrat $d^2 = 12,3$ und 12,2, und da in jeder Differenz d *vier* Einstellungen und Ablesungen l_1, r_1, l_2, r_2 zusammenwirken, haben wir das mittlere Fehler-Quadrat:

$$m^2 = \frac{12,25}{4} = 3,06 \quad \text{also} \quad m = \pm 1,7'' \qquad (3)$$

Der so erhaltene Wert m ist der mittlere Fehler *einer* Einstellung und Ablesung mit dem Mikroskop. (Die Vergrösserung ist 16fach.)

Die oben berechneten Werte $\delta_A = +2,8''$ und $\delta_B = +2,0''$ zeigen, dass die Mikroskope nicht genau auf die Teilung gestimmt sind, und man könnte nun nach der Theorie von (5) § 46. S. 133 die Mikroskope durch Verschiebungen genauer stimmen.

Indessen wenn es sich nur um kleine Werte δ handelt, wird es kaum gelingen sie vollständig wegzuschaffen.

Will man den Einfluss von δ nicht vernachlässigen, so kann man eine Korrektionstafel berechnen, welche in unserem Fall folgende Form bekäme:

Mikroskop A		*Mikroskop B*	
Ablesung	Verbesserte Ablesung	Ablesung	Verbesserte Ablesung
0′	0′	0′	0′
1′	1′ — 0,6″	1′	1′ — 0,4″
2′	2′ — 1,1″	2′	2′ — 0,8″
3′	3′ — 1,7″	3′	3′ — 1,2″
4′	4′ — 2,2″	4′	4′ — 1,6″
5′	5′ — 2,8″	5′	5′ — 2,0″

Bei der trigonometrischen Abteilung der Landes-Aufnahme werden bei Messungen III. und II. Ordnung die Mikroskope abgestimmt, so gut es möglich ist, und die kleinen etwa noch bleibenden Reste δ nicht weiter beachtet.

Dagegen für Messungen I. Ordnung werden die Schrauben-Werte δ bestimmt und von der trigonometrischen Abteilung nach folgender Theorie in Rechnung gebracht:

Es sei durch die Trommel-Ablesungen an je zwei aufeinanderfolgenden Teilstrichen ermittelt, dass hiebei die Trommel nicht, wie sie soll, z. B. $5' = 300''$, sondern $300'' + \delta$ giebt, oder allgemeiner $t + \delta$, dann ist:

$$1 \text{ Trommel-Teil} = \left(1 - \frac{\delta}{t}\right) \text{Sekunden.}$$

Wenn man nun zum Zweck der Kreis-Ablesung immer sowohl auf den Strich links als auf den Strich rechts einstellt, und dabei bzw. l und r erhält, so ist:

die verbesserte Ablesung links $= l\left(1-\frac{\delta}{t}\right) \qquad = l - \frac{l\,\delta}{t}$

" " " rechts $= t-(t-r)\left(1-\frac{\delta}{t}\right) = r + \frac{t-r}{t}\,\delta$

Das Mittel ist: $\frac{l+r}{2} + \left(\frac{t}{2} - \frac{l+r}{2}\right)\frac{\delta}{t}$

oder: $a + \varDelta$

Zu dem arithmetischen Mittel a der Ablesungen am linken und rechten Strich kommt also noch eine kleine Verbesserung:

$$\varDelta = \left(\frac{t}{2} - a\right)\frac{\delta}{t} \qquad (4)$$

Hiernach kann für gegebene Verhältnisse ein Hilfstäfelchen berechnet werden.

In mechanischer Beziehung ist zu allen Schrauben-Einstellungen zu bemerken, dass man immer nur in *einem* bestimmten Sinn, z. B. von rechts nach links, einstellen soll, weil man nie darauf rechnen kann, dass die Schraube völlig ohne toten Gang ist, und weil ein toter Gang durch dieses Verfahren thunlichst unschädlich gemacht wird.

Auch in Bezug auf Elimination des Stimmungsfehlers (welcher von Station zu Station nicht unbedingt als konstant gelten kann) giebt es eine sehr sinnreiche Anordnung, welche von *Zachariae* in dem Werke „Die geodätischen Hauptpunkte" (deutsch von *Lamp*, Berlin 1878, S. 74) angegeben wird: Es wird die Drehung des Kreises zwischen den Sätzen so ausgeführt, dass die Schrauben-Ablesungen für den Ausgangspunkt an n zusammengehörigen Sätzen sich gleichmässig auf den Umfang der Trommel verteilen.

§ 50. Das Schätz-Mikroskop.

Fig. 1.
Gesichtsfeld des Schätz-Mikroskops.

Man hat neuerdings die Mikroskope auch ohne Schrauben zum Ablesen von Theodolit-Teilungen angewendet.

Man kann schon mit *einem* festen Faden im Gesichtsfeld Ablesungen schätzen, wenn z. B. in Fig. 1., welche eine 10'-Teilung sehr stark vergrössert zeigt, nur der eine feste Strich bei 0' vorhanden wäre, so könnte man die Lage dieses Striches zwischen 29° 50' und 30° 0' immerhin = 2' schätzen, und hätte dann die Ablesung 29° 52'.

Genauer wird die Sache, wenn man eine ganze Hilfs-Teilung mit in das Mikroskop aufnimmt. In Fig. 1. z. B. sind die 11 Striche 10' . . . 5' . . . 0'

auf einem Glasplättchen im Mikroskop eingerissen, und somit fest im Mikroskop. Der Abstand 10′ ... 0′ ist *gleich* dem Teilungs-Intervall 29° 40′ ... 29° 50′ ... 30° 0′. Wenn also 0′ als Zeiger gilt, so handelt es sich nur um das Stück x, welches man = 2,4′ schätzt. Die ganze Ablesung von Fig. 1. ist also:

$$29^\circ\,50' + 2{,}4' = 29^\circ\,52{,}4' \;(= 29^\circ\,52'\,24'')$$

Die ganze Anordnung ist offenbar sehr bequem, und auch genau, wie wir nachher noch besonders erörtern werden.

Indessen ist der Anblick der verschiedenen Striche häufig nicht so klar, wie Fig. 1. (welche aus einer Mitteilung von Optiker *Hensoldt* in der „Zeitschr. f. Verm. 1879", S. 499, entlehnt ist), weil die Teilstriche des Limbus, im Vergleich mit der Mikroskop-Teilung, meist zu dick sind.

Wir liessen an einem älteren Theodolit unserer Hannoverschen Sammlung solche Schätz-Mikroskope durch Mechaniker *Breithaupt* in Kassel anbringen. Die 10′-Teilung des Theodolits sieht nun im Mikroskop aus etwa wie eine Centimeter-Teilung natürlich gesehen, und die *Breithaupt*sche Glasstrich-Teilung sieht dann aus etwa wie eine Millimeter-Teilung (Vergrösserung etwa 50fach), und hiernach könnte man 0,1′ scharf schätzen. Die Glasstrich-Teilung würde das auch gestatten, allein die Kreis-Teilung selbst ist in unserem Fall, wie meist bei Instrumenten, welche ursprünglich zu anderer Art der Ablesung bestimmt waren, für Schätz-Mikroskope zu grob. Nach Mitteilung von *Breithaupt* könnten bei *Neu*-Teilung die Striche wohl entsprechend genügend fein gemacht werden.

Den Übelstand, dass die Teilstriche der Kreise meist zu dick für feine Schätz-Mikroskope sind, hat schon *Hensoldt* in der Abhandlung „Zeitschr. f. Verm. 1879", S. 500, erwähnt (Strichdicke etwa 1′); derselbe giebt daselbst weitere lesenswerte Einzelmitteilungen.

Man kann dem fraglichen Übelstand auch dadurch ausweichen, dass die Striche zwar dick, aber in feine Spitzen auslaufend gemacht werden.

Genauigkeit des Schätz-Mikroskops. Trotz des störenden Umstandes, dass die Teilstriche meist zu grob aussehen, kann man doch die Zehntel der Mikroskop-Teilung noch nahezu richtig schätzen.

Wir haben schon bei der ersten *Hensoldt*schen Mitteilung in der „Zeitschr. f. Verm. 1879", S. 505, einen kleinen Genauigkeits-Versuch veröffentlicht mit dem Ergebnis:

$$\text{Mittlerer Fehler einer Schätzung} = \pm\,0{,}12' = \pm\,7'' \qquad (1)$$

Der bereits erwähnte Hannoversche ältere Theodolit mit neuen Schätz-Mikroskopen von *Breithaupt* gab bei einem ersten Versuch mit Studierenden, in 4 Sätzen mit je 5 Zielpunkten, den mittleren Fehler einer Richtung in einem Satz $= \pm\,5''$.

Das Schätz-Mikroskop ist natürlich ungenauer als das Schrauben-Mikroskop, weil bei letzterem die günstige Einstellung *zwischen* zwei Fäden nach Fig. 2. S. 111 stattfindet und die Dicke der Striche unwesentlich ist.

Andererseits geht die Arbeit mit dem Schätz-Mikroskop rascher und bequemer vor sich.

Ein Schätz-Mikroskop muss mit seinen Strichen auf die abzulesende Teilung gestimmt werden, wie ein Schrauben-Mikroskop.

Das Abstimmen wird überflüssig, wenn man die Teilung selbst möglichst weit treibt, und dann nur noch *einen* Faden bzw. Strich im Mikroskop als Schätz-Zeiger anwendet. Dieses Prinzip wird neuerdings bei italienischen Instrumenten „Cleps" verfolgt.

§ 51. Die Axen-Fehler des Theodolits.

Wir betrachten drei eigentliche Theodolit-Axen und eine Libellen-Axe, also im ganzen vier Axen. Dieselben sind (mit Veranschaulichung durch die nachfolgenden schematischen Figuren 1. und 2.) die folgenden:

1. die Vertikal-Axe V
2. die Horizontal-Axe H
3. die Ziel-Axe Z (Kollimations-Axe).

Hiezu noch:

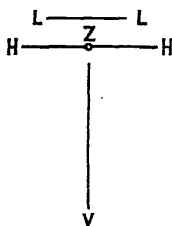
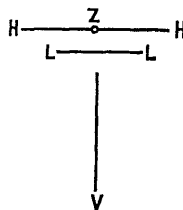
4. eine Libellen-Axe L.

Zwischen diesen vier Axen müssen folgende Beziehungen bestehen:

Allgemeine Bedingungen.

[1] $Z \perp H$, Ziel-Axe rechtwinklig zur Horizontal-Axe.
[2] $L \perp V$, Libellen-Axe rechtwinklig zur Vertikal-Axe.
[3] $H \perp V$, Horizontal-Axe rechtwinklig zur Vertikal-Axe.

Diese drei allgemeinen Bedingungen nehmen verschiedene Formen an, je nach der Anordnung der Libelle.

Wir betrachten die zwei verschiedenen Libellen-Anordnungen, welche schon bei 9) § 47. S. 140 besprochen worden sind, und indem jeweils nur *eine* Libelle vorausgesetzt wird, haben wir folgende schematische Darstellung, welche wir voranstellen:

I.		II.
1) $Z \perp H$	für I. und II. gemeinsam	1) $Z \perp H$
2) L parallel H		2) $L \perp V$
3) $L \perp V$		3) $H \perp V$

Nach dieser schematischen Einteilung, welche vielleicht *nach* der ausführlichen Behandlung noch mehr Bedeutung gewinnt, gehen wir zu den Einzelheiten über:

1) Die Frage, ob die Ziel-Axe rechtwinklig zur Horizontal-Axe ist, betrifft beide Anordnungen I. u. II. gemeinsam, und wird in beiden Fällen am besten vorausgeschickt. Man kann die Untersuchung auf folgende vier Arten machen:

*) In den früheren Auflagen dieses Buches hatten wir die Alhidaden-Libelle als I. und die Reiter-Libelle als II. genommen.

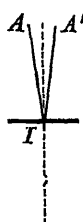
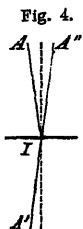
Fig. 3.

a) (Fig. 3.). Bei beliebig aufgestelltem Instrument I wird ein Punkt A angezielt und dann das Fernrohr umgelegt (Lager vertauscht). Dann muss beim Kippen des Fernrohrs der Punkt A abermals am Fadenkreuz erscheinen. Erscheint statt dessen ein anderer Punkt A', so ist AIA' der doppelte Zielaxen-Fehler und man hat die Hälfte des sich zeigenden Fehlers AIA' durch seitliche Verschiebung des Fadenkreuzes wegzuschaffen, in dem Sinn, welchen der unmittelbare Anblick verlangt (der Zielaxen-Fehler wird auch Kollimationsfehler genannt).

b) Fig. 4.). Ausser dem Umlegen des Fernrohrs (das zuweilen durch den Höhenkreis verhindert wird) kann man auch Durchschlagen mit Drehen um 180° in folgender Weise benützen: Es wird ein Punkt A angezielt und dann das Fernrohr durchgeschlagen, so dass es nach A' gerichtet erscheint. Dann dreht man mittelst der Limbus-Teilung die Alhidade und mit ihr das Fernrohr um 180°, so dass es nach A'' gerichtet wird. Wenn nun A'' nicht mit A zusammenfällt, so ist AIA'' der doppelte Ziel-Axen-Fehler, dessen Hälfte wie bei *a*) weggeschafft wird.

Fig. 4.

Oft ist es bequemer, nach dem Durchschlagen wieder auf den ersten Punkt A einzustellen und umgekehrt an der Teilung nachzusehen, ob die Drehung genau 180° war. Z. B. man stellt das Fernrohr auf einen Punkt A ein, und liest entsprechend am Limbus mit einem Nonius ab: 127° 16′ 0″, darauf schlägt man das Fernrohr durch, zielt denselben Punkt A nochmals an, und liest an demselben Nonius ab: 307° 19′ 0″; dann beträgt der doppelte Fehler 3′ 0″ und man berichtigt den Fehler, indem man den Nonius auf 307° 17′ 30″ stellt und dann das Fadenkreuz seitlich so vorschiebt, dass es den Punkt A deckt.

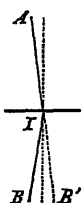
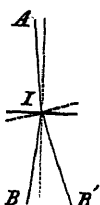
Wir haben hier nur von *einem* Nonius gesprochen; wenn die entsprechende Behandlung am zweiten Nonius ein abweichendes Resultat geben sollte, so nimmt man das Mittel aus beiden Resultaten; übrigens ist im vorliegenden Falle eine Unsicherheit von 10″—20″ unerheblich.

Die so beschriebene Untersuchung stellt sich bei praktischen Winkelmessungen immer von selbst ein; man kann in jedem Feldschreibbuch nachsehen, ob das Instrument einen erheblichen Zielaxen-Fehler hatte, indem man zusieht, ob zusammengehörige Ablesungen in zwei verschiedenen Fernrohr-Lagen um 180° verschieden sind.

Fig. 5.

Die bisher beschriebenen zwei Methoden *a*) und *b*) reichen zur Untersuchung des Zielaxen-Fehlers immer aus, sie sind sehr bequem, weil man sie, ohne ins freie Feld zu gehen, auf einer festen (steinernen) Fensterbank anwenden kann. Der theoretischen Vollständigkeit wegen führen wir noch zwei andere Methoden an:

Fig. 6.

c) Fig. 5.). Nachdem mit dem Instrument I ein Punkt A angezielt worden ist, wird durchgeschlagen, und ein zweiter Punkt B angezielt. Wenn die drei Punkte AIB nicht in einer Geraden liegen, was in A oder in B untersucht werden muss, so ist der Winkel BIB' der doppelte Zielaxen-Fehler.

Diese Untersuchung kann man nicht gut anders als im freien Feld mit Baken-Absteckung machen.

d) (Fig. 6.). Es wird ein Punkt A angezielt, das Fernrohr durchgeschlagen, und ein zweiter Punkt B angezielt. In der zweiten Fernrohr-Lage

wird nochmals A angezielt, und dann das Fernrohr nochmals durchgeschlagen. Wenn statt B ein anderer Punkt B' erscheint, so ist $B\,I\,B'$ der vierfache Zielaxen-Fehler.

Hier kann wenigstens der erste Zielpunkt A ganz willkürlich sein, B und B' aber lässt sich nicht gut ohne Baken-Einweisung oder Latten-Ablesung gewinnen.

Nach Erledigung des Zielaxen-Fehlers tritt die schon oben (S. 153) verbreitete Unterscheidung nach der Libellen-Anordnung ein:

Anordnung I. Horizontal-Axen-Libelle (Reiter-Libelle).

2) Die Libellen-Axe soll parallel der Horizontal-Axe sein.

Die Reiter-Libelle wird auf die horizontale Axe aufgesetzt, und mittelst der Stellschrauben zum Einspielen gebracht; dann setzt man die Libelle auf der Axe um, und verbessert die Hälfte des sich zeigenden Ausschlags an der vertikal wirkenden Korrektionsschraube der Libelle und die andere Hälfte an den Stellschrauben des Theodolits.

Hiebei ist noch eine *Nebenfrage* zu erledigen, betreffend die sogenannte Libellen-Kreuzung:

Wenn man nach Ausführung der vorher erwähnten Libellen-Berichtigung die Reiter-Libelle seitlich dreht, und dabei ein Ausweichen der Blase beobachtet, so hat man die Libelle mittelst der seitlich wirkenden Korrektionsvorrichtung in der Fassung zu verschieben, und zwar nach folgender leicht zu begründenden Regel: Wenn die Libelle so vor dem Beobachter aufgestellt ist, dass er das eine Libellen-Ende zur linken Hand und das andere zur rechten Hand hat, und wenn dann beim Drehen der Libelle herwärts gegen den Beobachter, die Blase dem rechten Libellen-Ende zuläuft, so ist das rechte Libellen-Ende dem Beobachter zu nähern, und umgekehrt.

3) Die Libellen-Axe soll rechtwinklig zur Vertikal-Axe sein.

Es wird zuerst mit Benützung der Reiter-Libelle und der drei Stellschrauben des Theodolits ein allgemeiner Horizontal-Stellungs-Versuch gemacht; wenn es sich hiebei zeigt, dass es nicht möglich ist, die Reiter-Libelle allgemein zum Einspielen zu bringen, so stellt man sie parallel der Verbindungslinie zweier Stellschrauben, und bringt sie mit diesen zum Einspielen. Dann wird die Alhidade (ungefähr) um 180° gedreht, und zunächst die Hälfte des sich zeigenden Libellen-Ausschlags mittelst der Stellschrauben des Theodolits weggeschafft. Die andere Hälfte des Libellen-Ausschlags wird an den Lagerschrauben durch Heben oder Senken des einen Horizontal-Axen-Lagers weggeschafft (vgl. Fig. 3. und Fig. 4. § 47. S. 138).

Nach diesem dreht man noch das Instrument um 90°, und bringt in dieser Lage den *ganzen* sich zeigenden Libellen-Ausschlag mit den Stellschrauben zum Verschwinden.

Anordnung II. Alhidaden-Libelle.

1) Die Ziel-Axe soll rechtwinklig zur Horizontal-Axe sein.

Diese Untersuchung (welche für die Libellen-Anordnungen I. und II. dieselbe ist) haben wir schon oben mit Fig. 3. bis Fig. 6. erledigt, es folgt also sofort:

2) Die Libellen-Axe soll rechtwinklig zur Vertikal-Axe sein. Dieses wird wie bei I. 3) behandelt, nämlich:

Es wird zuerst ein Versuch allgemeiner Horizontalstellung gemacht; wenn es sich hiebei zeigt, dass es nicht möglich ist, die Libelle allgemein zum Einspielen zu bringen, so stellt man sie parallel der Verbindungslinie zweier Stellschrauben, und bringt sie mit diesen Stellschrauben zum Einspielen. Dann wird die Alhidade (samt der Libelle) um 180° gedreht, und die Hälfte des sich zeigenden Ausschlages mittelst der Korrektionsschraube der Libelle weggeschafft.

Dadurch ist die Libellen-Axe rechtwinklig zur vertikalen Axe gemacht worden; um zugleich die vertikale Axe genau vertikal zu machen (das Instrument horizontal zu stellen), schafft man die noch übrige zweite Hälfte des Libellen-Ausschlags mittelst der Stellschrauben des Instruments weg. Dann dreht man die Alhidade samt der Libelle um 90°, und bringt den sich jetzt zeigenden *ganzen* Ausschlag mittelst der dritten Stellschraube zum Verschwinden (Stellschrauben B Fig. 1. S. 135).

Hat man nicht eine Röhren-Libelle, sondern eine Dosen-Libelle fest verbunden mit der Alhidade, so bringt man dieselbe bei feststehender Alhidade mit den Stellschrauben zum Einspielen, dreht dann die Alhidade samt der Libelle, und korrigiert in derjenigen Stellung, in welcher der grösste Ausschlag entsteht, die Hälfte des Ausschlags an den Korrektionsschrauben der Dosen-Libelle, und, um zugleich die vertikale Axe vertikal zu machen, die andere Hälfte mit den Stellschrauben; worauf beim Drehen der Alhidade die Dosen-Libelle allgemein einspielen wird.

3) Die Horizontal-Axe soll rechtwinklig zur Vertikal-Axe sein.

Nachdem die Vertikal-Axe in Folge der unter 2) besprochenen Operationen vertikal gestellt worden ist, wird von der Horizontal-Axe verlangt, dass sie in jeder Lage horizontal ist.

Wenn man sich zwei mit der Instrumentenmitte in einer vertikalen Ebene liegende Punkte verschaffen kann, so müssen beim Niederkippen des Fernrohrs (bei feststehender Alhidade) beide Punkte am Fadenkreuz erscheinen.

Zwei Punkte liegen jedenfalls mit der Instrumentenmitte in einer vertikalen Ebene, wenn sie in einer und derselben vertikalen Geraden liegen. Dieses führt zu den folgenden Prüfungsmethoden:

a) Es wird eine lange Senkelschnur aufgehängt, und zugesehen, ob beim Niederkippen des Fernrohrs das Fadenkreuz immer an dieser Schnur bleibt. Das Pendeln des Senkels kann dadurch vermindert werden, dass man das Senkelgewicht in ein Gefäss mit Wasser tauchen lässt. Für eine rohere Untersuchung genügt statt der Senkelschnur eine vertikale Hauskante.

b) *Künstlicher Horizont* (Fig. 7.) Man verschafft sich einen horizontalen Spiegel

Fig. 7.*) Künstlicher Horizont.

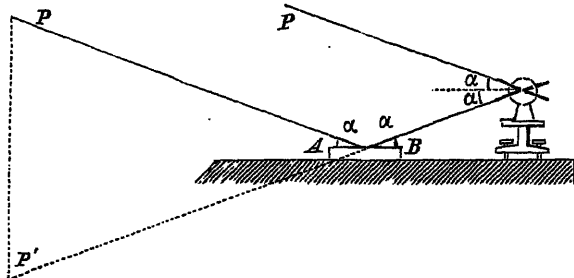



Fig. 8. Schutz-Hülle.

*) Von den vier Winkeln, welche hier $= \alpha$ eingeschrieben sind, sind α bei A und bei B wegen Reflexion einander gleich, und gleich dem Tiefenwinkel der Ziellinie nach P'; dagegen der Höhenwinkel der Ziellinie nach P, welcher in Fig. 7. ebenfalls $= \alpha$ geschrieben ist, ist nur *genähert* $= \alpha$, und würde nur dann wirklich $= \alpha$, wenn P unendlich entfernt wäre.

AB und lässt einen hochgelegenen Punkt P sich in diesem Spiegel reflektieren, so dass man sein Spiegelbild P' unten sieht.

Dann stellt man den Theodolit so auf, dass man sowohl den hochgelegenen Punkt P als auch das Spiegelbild P' beim Auf- und Niederkippen im Gesichtsfelde des Fernrohrs findet. Hat man nun den oberen Punkt P scharf angezielt, so soll beim Niederkippen des Fernrohrs auch der untere Punkt P' am Fadenkreuz erscheinen.

Als horizontaler Spiegel AB kann eine Schale mit Flüssigkeit genommen werden (Quecksilber, Öl, Teer, Rotwein, Tinte u. s. w.); bei ruhiger Luft genügt dieses, und bei bewegter Luft kann man eine Schutz-Hülle (Fig. 8. S. 156) anwenden. (Über Glashorizonte u. s. w. ist Weiteres mitgeteilt in des Verfassers „Grundzüge der astron. Zeit- und Ortsbestimmung, Berlin 1885", S. 162—167).

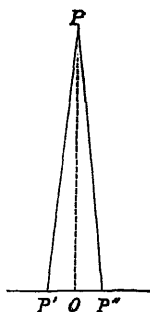
Das Gefäss oder den Spiegel AB stellt man dem Theodolit ganz *nahe*; trotzdem ist die Okularstellung für P und P' *dieselbe*, weil nicht die wirkliche Entfernung des Gefässes oder Spiegels AB, sondern die scheinbare Entfernung des Punktes P' für die Okularstellung massgebend ist.

Fig. 9.

c) Projektion auf eine horizontale Latte $P' Q P''$ (Fig. 9.). Zwei Punkte, welche zwar nicht in einer vertikalen Geraden, aber mit der Instrumentenmitte in einer vertikalen Ebene liegen, erhält man folgendermassen:

Es wird ein hochgelegener Punkt P angezielt, und durch Niederkippen des Fernrohrs auf eine unten befestigte horizontale Teilung (z. B. Nivellier-Latte) projiziert. Dieses wird nach erfolgtem Durchschlagen wiederholt; und wenn das zweite Mal nicht derselbe Projektionspunkt P' erhalten wird wie das erste Mal, sondern ein anderer Punkt P'', so ist der zwischen P' und P'' in der Mitte liegende Punkt Q der richtige Projektionspunkt, welcher dann denselben Dienst leistet, wie der Punkt P' in Fig. 7. (S. 156).

Bei allen hier genannten drei Methoden *a*), *b*), *c*) wird ein sich zeigender Fehler durch Heben oder Senken des einen Fernrohr-Lagers (Fig. 3. und Fig. 4. § 47. S. 138) weggeschafft, und zwar ist das rechte Lager zu heben (oder das linke zu senken), wenn das Fadenkreuz beim Abwärts-Kippen nach rechts abzuweichen scheint, weil das Fernrohr die Gegenstände umgekehrt zeigt.

Bei der Methode *b*) ist die *Hälfte* des sich zeigenden Fehlers wegzuschaffen, bei *a*) und *c*) ebenfalls die Hälfte dann, wenn die Ziellinien nach den beiden massgebenden Punkten um gleich viel aufwärts und abwärts gegen den Horizont geneigt sind. Wenn die Neigungen der Visuren nicht gleich sind, so ist die Verbesserung darnach zu bemessen, dass bei horizontaler Ziellinie der Fehler der Horizontal-Axe unschädlich ist. Wenn also z. B. bei der Methode *c*) (Fig. 9.) Q in der Instrumentenhöhe liegt, so wird man zuerst nach Q zielen, dann aufwärts kippen, und den ganzen bei P sich zeigenden Fehler mittelst der Lagerschrauben wegschaffen; wenn dagegen z. B. die Ziellinie nach P doppelt so stark aufwärts, als die nach Q abwärts geneigt ist, so wird man zuerst auf Q einstellen, und dann von dem bei P sich zeigenden Fehler $^2/_3$ aufheben u. s. w. (streng genommen sind die Visur-Abweichungen den Tangenten der Höhenwinkel proportional, wie in § 53. gezeigt werden wird).

§ 52. Bemerkungen zu den Axen-Fehlern des Theodolits.

Eliminierung von Axen-Fehlern.

Von den drei Axen-Fehlern lassen sich zwei durch Durchschlagen des Fernrohrs eliminieren, nämlich der Zielaxen-Fehler und der Horizontalaxen-Fehler.

Um dieses einzusehen, braucht man nur sich klar zu machen, dass durch Durchschlagen des Fernrohrs diese beiden Fehler von links nach rechts oder umgekehrt gebracht werden, dass also die Messung in beiden Fernrohr-Lagen zwei Werte giebt, deren arithmetisches Mittel von jenen Fehlern frei ist.

Soweit nicht die unmittelbare Anschauung des Theodolits selbst zum Verständnis dieser Behauptung führt, kann auch Fig. 3. § 51. S. 154 und Fig. 9. § 51. S. 157 zu Hilfe genommen werden.

Bei der Horizontal-Axe ist hiebei angenommen worden, dass sie nur deswegen nicht horizontal ist, weil sie nicht genau rechtwinklig zur Vertikal-Axe ist, welch letztere zunächst als genau vertikal gelten mag.

Ist die Vertikal-Axe selbst nicht genau vertikal, so entsteht ein Fehler an der Horizontal-Winkelmessung, welcher weder durch Durchschlagen, noch durch Umlegen u. s. w. eliminiert werden kann.

Der Vertikalaxen-Fehler kann davon herrühren, dass die benützte Libelle nicht rechtwinklig zur Vertikal-Axe war, oder davon, dass diese Libelle nicht richtig benützt worden ist, oder auch von diesen beiden Umständen.

Wie der Vertikalaxen- oder Aufstellungs-Fehler mit dem eliminierbaren Horizontalaxen-Fehler zusammenwirkt, wird bei der späteren Berechnung der Fehler-Einflüsse (§ 53.) deutlicher gemacht werden.

Die Aufeinanderfolge der Prüfungen und Berichtigungen

muss nicht notwendig in allen Beziehungen so eingehalten werden, wie im vorigen § 51. angegeben ist.

Bei I. (Horizontal-Axen-Libelle) ist die Frage nach der Ziel-Axe ganz unabhängig von den Libellen-Fragen, und braucht deswegen nicht notwendig vorangestellt zu werden; es ist nur nötig, dass die Libelle vorher parallel zur Horizontal-Axe gemacht wird, ehe ihre Rechtwinkligkeit zur Vertikal-Axe untersucht wird.

Bei II. (Alhidaden-Libelle) ist umgekehrt die Zielaxen-Frage jedenfalls vorher zu erledigen, ehe die Rechtwinkligkeit der Horizontal-Axe zur Vertikal-Axe in Betracht kommt.

Theodolit mit mehreren Libellen.

Wenn nicht bloss *eine* Libelle vorhanden ist, sondern eine Horizontal-Axen-Libelle und eine Alhidaden-Libelle, so kann man die oben unter I. und II. S. 155 beschriebenen Prüfungs-Verfahren beliebig verbinden, z. B. kann man zuerst nur die Horizontal-Axen-Libelle anwenden, und zum Schluss die Probe mit dem künstlichen Horizont machen. In der theoretischen Darstellung ist es aber immer gut, beide Libellen-Anordnungen auseinander zu halten.

Spielpunkt der Libelle.

Bei den Libellen-Berichtigungen, welche bei I. 2) S. 155 und II. 2) S. 155—156 beschrieben wurden, ist gesagt, es sollen die Libellen-Fehler an der Libellen-Korrektions-Schraube weggeschafft werden. Bei kleineren und wenig empfindlichen Libellen geschieht dieses.

Dagegen bei grossen und empfindlichen Libellen, welche mit durchlaufenden Teilungen versehen sind, ist es für die letzte Feinheit viel bequemer und schärfer, das schon früher in § 35. S. 105 angedeutete Verfahren anzuwenden, d. h. jeweils einen besonderen Einspiel-Punkt der Libellen-Teilung zu bestimmen, welcher von dem sonst gebrauchten Normal-Punkt um 1—2 Striche abweichen kann.

Es stehe z. B. die Blasenmitte einer Alhidaden-Libelle zuerst auf 25,0 und nach dem Umdrehen um 180° (wobei man die Kreis-Teilung benützen kann) auf 28,4, dann berechnet man das Mittel 26,7 und heisst dieses den *Spielpunkt*; man bringt mittelst der Fuss-Stellschrauben die Blasenmitte auf diesen Spielpunkt 26,7, und man kann nun erwarten, dass sie auf diesem Punkt allgemein einspielen wird. Den Spielpunkt und zwei Symmetralpunkte hiezu kann man durch aufgesetzte Reiter-Marken bezeichnen.

So lange man mit Justier-Stiften u. s. w. an den Libellen handiert, ist es bei empfindlichen Libellen, deren Korrektion eine zeitraubende Arbeit ist, nützlich, vor der Anwendung der Korrektions-Schrauben zu untersuchen, welche Beziehung zwischen einer Umdrehung der Schraube und dem Ausschlag der Blase besteht, damit man ungefähr weiss, um wie viel gedreht werden muss, wenn es sich um Wegschaffung eines gewissen Ausschlags handelt.

Wenn z. B. eine vertikal wirkende Korrektions-Schraube eine Ganghöhe $h = 0{,}25^{mm}$ hat, und an einem Hebelsarm $l = 180^{mm}$ wirkt, so neigt eine Schrauben-Umdrehung die Libellen-Axe um $\frac{0{,}25}{180}\,\varrho = 286$ Sekunden, und wenn einem Ausschlag von einem Strich 5,0 Sekunden entsprechen, so würde eine ganze Umdrehung der Korrektions-Schraube die Blase um $286 : 5 = 57{,}2$ Striche verschieben, woraus zugleich ersichtlich ist, wie schwer es ist, kleine Ausschläge mit Hilfe der Korrektions-Schrauben mit Justier-Stiften u. s. w. wegzuschaffen. Einer ähnlichen Untersuchung ist auch die Wirkung der Fuss-Stellschrauben zu unterziehen.

Veränderlichkeit der Ziel-Axe.

Die Ziel-Axe ist durch zwei Punkte bestimmt, nämlich 1) den Fadenkreuzpunkt und 2) den optischen Mittelpunkt des Objektivs. Wenn nun verschiedene Zielweiten in Betracht kommen, so findet Okular-Verschiebung statt, und es kann sich fragen, ob diese Verschiebung immer genau centrisch in der Richtung der Ziel-Axe selbst stattfindet, oder ob dadurch seitliche Änderung der Lage der Ziel-Axe erzeugt wird.

Beim *Ramsden*schen Okular kann es sich hiebei nur um das Fadenkreuz handeln, denn das Objektiv ist fest; beim *Huyghens*schen Okular dagegen ist nach unserer Auffassung von § 44. S. 129 auch der Objektiv-Mittelpunkt an der Okular-Ausziehung beteiligt, weil das Objektiv selbst nur als eine fingierte äquivalente Linse, für das eigentliche Objektiv und das Kollektiv zusammen, auftritt.

Bei Zielweiten über 500^{m} ist jedoch diese Frage verschwindend, weil von hier an alle Zielweiten als unendlich gelten (vgl. (1) § 41. S. 119), und auch bei kürzeren Zielweiten wird der fragliche Fehler durch Durchschlagen *eliminiert*.

Es kann sich also in praktischer Beziehung nur noch darum handeln, ob der Okular-Auszug einen wenigstens nahezu centrischen, im übrigen aber *sicheren* Gang hat.

Überflüssige Feinheiten.

Der Zielaxen-Fehler (Kollimations-Fehler) ist in allen Beziehungen ein *wenig* schädlicher Fehler für Feld- und Land-Winkelmessung, und deswegen ist es für diese

Zwecke auch nicht nötig, die besonderen Hilfsmittel kennen zu lernen, welche man in der Astronomie hat (Kollimatoren), um den astronomisch viel wichtigeren Kollimations-Fehler genau zu untersuchen und zu bestimmen.

Ähnlich verhält es sich auch mit der Frage, ob die Zapfen-Enden der Horizontal-Axe genau gleichen Durchmesser haben. Für Feld- und Landmessung ist das wohl immer genügend der Fall. (Vgl. des Verfassers „Grundzüge der astron. Zeit- und Orts-Bestimmung, Berlin 1885", S. 46.)

Bei sorgfältiger Behandlung ist das oft wiederholte Prüfen und Berichtigen eines Theodolits in Hinsicht auf Axen-Fehler nicht nötig. Ob an den Libellen etwas fehlt, zeigt sich meist beim Gebrauche selbst, auch der Zielaxen-Fehler (Kollimations-Fehler) zeigt sich aus den Ablesungen in zwei Fernrohr-Lagen immer unmittelbar.

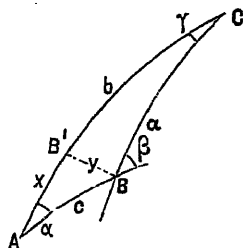
Überhaupt spielen in der Landmessung die Theodolit-Axen-Fehler nicht die Rolle, welche nach dem Umfang und der Ausführlichkeit ihrer Theorie vermutet werden könnte. Wenn Theodolit-Messungen schlecht sind, so ist in der grössten Mehrzahl der Fälle irgend etwas anderes Schuld als die Axen-Fehler.

Trotzdem ist die Theorie dieser Fehler (welche auch in Landmesser-Prüfungen das beliebteste Thema sind) unentbehrlich, weil nur, wer das volle Verständnis inne hat, ermessen kann, wo und wieviel von den strengen Forderungen nachgelassen werden darf.

§ 53. Berechnung der Fehler-Einflüsse der Theodolit-Axen-Fehler.

Sphärische Differential-Formeln.

Als Vorbereitung der Berechnung der Fehler-Einflüsse der Theodolit-Axen-Fehler (und zugleich als Hilfsmittel für viele andere Zwecke) entwickeln wir einige einfache Differential-Formeln der sphärischen Trigonometrie:

Fig. 1.
Sphär. Differential-Dreieck.

In Fig. 1. ist ABC ein schmales Differential-Dreieck mit der kleinen Seite c und dem kleinen Winkel γ. Von B ist eine Senkrechte BB' gefällt, so dass ein kleines rechtwinkliges Dreieck $AB'B$ entsteht, welches in erster Näherung als eben behandelt werden darf.

In dem ebenfalls rechtwinkligen Dreieck CBB' hat man:

$$\sin\gamma = \frac{\sin y}{\sin a}$$

oder weil γ und y klein sind:

$$\gamma = \frac{y}{\sin a} \qquad y = \gamma \sin a \qquad [1]$$

Mit gleicher Annäherung kann man auch setzen:

$$y = \gamma \sin b \qquad [2]$$

wobei die Seite $AC = b$ ist. Weiter ist:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin a} \qquad [3]$$

Da β und α nahe gleich sind, entwickeln wir die Differenz $\beta - \alpha$, und setzen:

$$\beta = \alpha + (\beta - \alpha) \quad \text{und entsprechend} \quad b = a + x$$
$$\sin \beta = \sin \alpha + (\beta - \alpha) \cos \alpha \qquad \sin b = \sin a + x \cos a$$

folglich nach [3]:

$$1 + (\beta - \alpha) \operatorname{cotg} \alpha = 1 + x \operatorname{cotg} a$$
$$\beta - \alpha = x \operatorname{cotg} a \operatorname{tang} \alpha \qquad [4]$$

Es ist aber nach Fig. 1. S. 160:

$$x \operatorname{tang} \alpha = y \qquad y = c \sin \alpha$$

Hieraus mit Zuziehung von [1]:

$$\beta - \alpha = \gamma \cos a \quad \text{oder} \quad \beta - \alpha = c \sin \alpha \operatorname{cotg} a \qquad [5]$$

(Die Formel [1] entspricht dem Parallelkreisbogen, und die Formel [5] entspricht der Meridian-Konvergenz auf der Erdkugel.)

Nach dieser Vorbereitung gehen wir über zu der Berechnung, um wie viel ein Horizontal-Winkel falsch erhalten wird, wenn die drei Axen-Fehler gewisse Werte haben.

Wenn die drei Axen eines Theodolits sich in gegenseitig richtiger Lage befinden, so ist die Ziel-Axe rechtwinklig zur Horizontal-Axe und die Horizontal-Axe rechtwinklig zur Vertikal-Axe; und wenn der Theodolit richtig zur Messung aufgestellt ist, so ist die Vertikal-Axe vertikal und die Horizontal-Axe rechtwinklig zu ihr, also horizontal, während ausserdem, wie vorher, die Ziel-Axe rechtwinklig zur Horizontal-Axe ist. Wir setzen nun voraus, dass alle diese drei Bedingungen *nicht* erfüllt sind, sondern das Folgende stattfindet:

1) Die Ziel-Axe ist nicht rechtwinklig zur Horizontal-Axe, sondern sie macht mit der letzteren einen Winkel $90° - c$, d. h. es ist c die Abweichung der Ziel-Axe von der Lage, welche sie haben sollte. (c = Zielaxen-Fehler oder Kollimations-Fehler.)

2) Die Horizontal-Axe ist nicht rechtwinklig zur Vertikal-Axe, sondern sie macht mit derselben einen Winkel $90° - i$, oder es ist i die Abweichung der Horizontal-Axe von der Lage, welche sie haben sollte. Wird die Vertikal-Axe als genau vertikal vorausgesetzt, so ist also i die Neigung (Inklination) der Horizontal-Axe gegen die wahre Horizontale.

3) Die Vertikal-Axe ist nicht genau vertikal, d. h. der Theodolit ist nicht richtig aufgestellt. Die Abweichung der Vertikal-Axe von der wahren Vertikalen, oder der Aufstellungs-Fehler sei $= v$.

Diese drei Axen-Fehler c, i, v betrachten wir zunächst nicht gemeinsam, sondern einzeln, und bezeichnen die durch sie erzeugten Horizontal-Projektions-Fehler eines Zielstrahles bzw. mit (c), (i), (v). In der Rechnung werden c, i, v als kleine Winkel behandelt.

Bei den folgenden Untersuchungen denken wir uns um die Instrumentenmitte (Schnittpunkt der drei Axen) eine Kugel von beliebigem Halbmesser gelegt, um die in Betracht kommenden Winkelgrössen als Seiten und Winkel von sphärischen Dreiecken zu veranschaulichen.

1) Zielaxen-Fehler (Kollimations-Fehler).

In Fig. 2. S. 162 ist AB die Horizontal-Axe, IZ die Vertikal-Axe, IZ' IP ID' sind drei Lagen der falsch gerichteten Ziel-Axe, welche die Winkel

$ZIZ' = QIP = CID' = c$ mit den entsprechenden richtigen Lagen IZ IQ IC der Ziel-Axe machen, so dass $Z'PD'$ ein Parallelkreisbogen zu ZQC ist.

Fig. 2.
Zielaxen-Fehler (Kollimations-Fehler).

Es wird ein Punkt P angezielt, dessen Höhen-Winkel $DIP = h$ ist. Wäre die Ziel-Axe richtig, so würde P nach D projiziert werden; wegen des Fehlers c wird statt D die Projektion D' erhalten. PQ sei ein Parallelbogen zu ACB; derselbe kann wegen der Kleinheit von c näherungsweise als ein Grosskreisbogen rechtwinklig zu ZC betrachtet werden.

Es ist also das schmale Dreieck ZPQ, welches in Fig. 2. rechts nochmals besonders herausgezeichnet wurde, näherungsweise als rechtwinklig zu betrachten, und nach der Vorbereitungsformel [1] ist zu setzen:

$$c = Z \sin(90° - h) \quad \text{oder} \quad c = Z \cos h \tag{1}$$

Der dadurch bestimmte Winkel Z steht in Beziehung zu dem Fehler (c) der Horizontal-Projektion von P. Als Bogen erscheint Z in Fig. 2. unten, nämlich $DC = Z$ (ebenso wie eine geographische Länge auf der Erde entweder als Winkel am Pol oder als Bogen am Äquator dargestellt werden kann).

Nun kann man geradezu sagen: Der Bogen $DC = Z$ ist der Projektions-Fehler des Punktes P; indessen, da bei horizontaler Ziellinie ein *konstanter* Fehler $D'C = c$ entsteht, welcher in der *Differenz* zweier Projektionen sich aufhebt, wollen wir hier nur den veränderlichen Teil des Projektions-Fehlers DC näher betrachten, und wir setzen daher:

$$DC - D'C = Z - c = (c) \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt nun der veränderliche Teil des Projektions-Fehlers:

$$(c) = \frac{c}{\cos h} - c \tag{3}$$

Für kleine Höhen-Winkel h kann man dieses auch etwas umformen, mit $\cos h = 1 - 2 \sin^2 \frac{h}{2}$, genähert:

$$(c) = c\left(1 + 2 \sin^2 \frac{h}{2}\right) - c = 2\, c \sin^2 \frac{h}{2}$$

oder:

$$(c) = \frac{c\, h^2}{2\, \varrho} \tag{4}$$

Um zu überlegen, wie gross der Zielaxen-Fehler c etwa werden kann, denke man sich ein Fernrohr, dessen Brennweite $= 30^{cm}$ ist; steht dann das Fadenkreuz um $0{,}1^{mm}$ falsch, so ist $c = \frac{0{,}1}{300}\varrho' = 1{,}15'$.

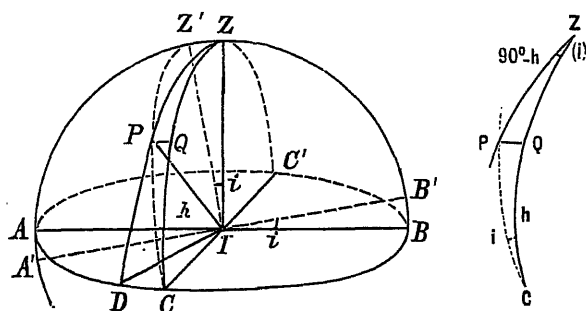
Zur weiteren Überlegung, ob ein gewisser Fehler c einen mehr oder weniger beträchtlichen Winkelfehler der Horizontal-Projektion erzeugt, dient folgende nach Formel (3) berechnete Tafel:

I. Fehler-Einfluss des Zielaxen-Fehlers (Kollimations-Fehlers) auf die Horizontal-Winkelmessung.

c	Höhen-Winkel h							
	1°	2°	3°	4°	5°	10°	20°	45°
10″	0,00″	0,01″	0,01″	0,02″	0,04″	0,15″	0,6″	4″
1′	0,01″	0,04″	0,08″	0,15″	0,23″	0,93″	3,9″	25″
2′	0,02″	0,07″	0,16″	0,29″	0,46″	1,85″	7,7″	50″
5′	0,05″	0,18″	0,41″	0,73″	1,15″	4,63″	19,3″	2′ 04″
10′	0,09″	0,37″	0,82″	1,46″	2,29″	9,26″	38,5″	4′ 09″

2) *Horizontal-Axen-Fehler.*

In Fig. 3. ist AB die richtige Lage der Horizontal-Axe, und $A'B'$ die um den Winkel i geneigte falsche Lage der Horizontal-Axe. Die Ziel-Axe bewegt sich daher beim Kippen des Fernrohrs in der Ebene CPZ' statt in der Ebene CQZ, wie es sein sollte.

Fig. 3.
Horizontal-Axen-Fehler.

Wird ein Punkt P angezielt, so wird er fälschlicherweise nach C projiziert, während er vom wahren Zenit Z aus nach D projiziert werden sollte, oder es ist $DC = (i)$ der zu findende Projektions-Fehler.

Dieser Wert (i) findet sich aber auch oben bei Z in dem Winkel $PZQ = (i)$, wie in der Nebenfigur von Fig. 3. rechts besonders angedeutet ist. Hier erscheint auch der Winkel $PCQ = i$, und da auch die Höhe $h = CQ$, und das Komplement $90° - h = QZ$ ist, haben wir aus der Nebenfigur von Fig. 3. nach der Vorbereitungs-Formel [1] in zweifacher Anwendung:

$$PQ = (i) \sin (90° - h) \quad \text{und} \quad PQ = i \sin h$$

$$(i) \cos h = i \sin h \quad , \quad (i) = i \tan h \qquad (5)$$

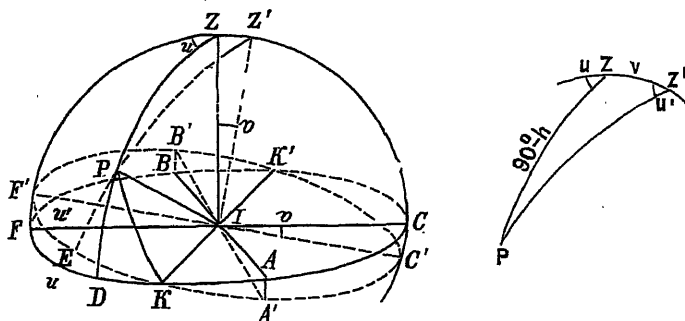
Hiernach ist folgendes berechnet:

II. Fehler-Einfluss des Horizontal-Axen-Fehlers i auf die Horizontal-Winkelmessung.

i	Höhen-Winkel h							
	1°	2°	3°	4°	5°	10°	20°	45°
10″	0,17″	0,35″	0,52″	0,70″	0,87″	1,8″	3,6″	10″
1′	1,05″	2,10″	3,14″	4,20″	5,25″	10,6″	21,8″	1′ 0″
2′	2,09″	4,19″	6,29″	8,39″	10,50″	21,2″	43,7″	2′ 0″
5′	5,24″	10,48″	15,72″	20,98″	26,25″	52,9″	1′49″	5′ 0″
10′	10,47″	20,95″	31,44″	41,96″	52,49″	1,46″	3′38″	10′ 0″

3) *Vertikal-Axen-Fehler oder Aufstellungs-Fehler v.*

Wir nehmen in Fig. 4. an, die Vertikal-Axe IZ' stehe schief, oder sie sei um den Winkel v gegen die wahre Vertikale IZ geneigt. In Folge hievon hat die (zur Vertikal-Axe rechtwinklige) Limbus-Ebene die Lage $F'KC'$ statt FKC, wobei der Winkel $F'IF$ beider Ebenen gleich dem Fehler v der Vertikal-Axe ist. Wird irgend ein Punkt P angezielt, so wird er von Z' aus nach E projiziert, während er von dem wahren Zenit Z aus nach D projiziert werden sollte.

Fig. 4.
Vertikal-Axen-Fehler oder Aufstellungs-Fehler v.

Der zu berechnende Projektions-Fehler ist also die Differenz (zunächst ohne Rücksicht auf das Vorzeichen):

$$FD - F'E \quad \text{oder} \quad u - u' = (v) \tag{6}$$

Die Winkel u und u', welche hier als Bögen erscheinen, kommen bei Z und bei Z' auch als Zenit-Winkel vor, wie in der Nebenfigur rechts bei Fig. 4. besonders angedeutet ist. Wir können daher mit Anwendung der Vorbereitungs-Formel [5] sofort angeben:

$$u - u' = v \sin u' \operatorname{cotg} (90° - h)$$

oder, weil hier u' und u auch verwechselt werden dürfen,:

$$u - u' = v \sin u \operatorname{tang} h = (v) \tag{7}$$

Es ist in mancher Beziehung von Wert, dieses Resultat (7) auch noch auf eine andere Art zu begründen, in folgender Weise: Wenn der Punkt P in Fig. 4. angezielt werden soll, so muss die Horizontal-Axe die Lage $A'B'$ haben, im Grundriss rechtwinklig zu IE, bzw. zu ID, wobei die Neigung gegen die wahreHorizontal-Ebene $= AIA' = i'$ sei. Man hat nun ein Dreieck KAA', welches bei A rechtwinklig ist, und dessen Kathete KA wieder $= u$ ist, weil $FD + DK = 90°$ und $DK + KA = 90°$. Es ist also:

$$AA' = K \sin KA, \quad \text{d. h.} \quad i' = v \sin u \tag{8}$$

Eine Horizontal-Axen-Neigung i' erzeugt aber nach (5) einen Fehler:

$$(i') = i' \operatorname{tang} h = v \sin u \operatorname{tang} h$$

Dieses stimmt mit dem früheren (7) überein, und die Formel (7) oder (8) sagt nun:

Der Vertikal-Axen-Fehler v giebt zunächst eine Komponente $v \sin u$ auf die Horizontal-Axe, und dieses $v \sin u$, als Horizontal-Axen-Fehler, erzeugt nach dem Gesetze (5) einen Projektions-Fehler $= (v \sin u) \operatorname{tang} h$.

Der Azimutal-Winkel u wird hiebei gezählt von der Anfangsrichtung IF an, in welcher die grösste Limbus-Neigung stattfindet.

Zusammen-Wirkung der drei Einzelfehler.

Wenn mit einem Theodolit gemessen wird, dessen Ziel-Axe den Fehler c hat, dessen Horizontal-Axe den Fehler i hat, und dessen Vertikal-Axe bei der Aufstellung eine Neigung v gegen die wahre Vertikale erhalten hat, so kombinieren sich die drei Einflüsse (c) (i) (v), und zwar ist der Gesamtfehler:

$$(s) = (c) + (i) + (v) \tag{9}$$

Die Berechtigung von (9) lässt sich so zeigen: Jedenfalls ist der Fehler (s) eine Funktion von c, i und v, welche verschwindet, wenn c, i und v einzeln $= 0$ werden. Denkt man sich diese Funktion mittelst des *Taylor*schen Satzes nach Potenzen von c, i, v entwickelt, so sind die drei ersten Glieder der Entwicklung die Werte (c), (i), (v); und die Gleichung (9) stellt einen Näherungswert des Gesamt-Projektions-Fehlers vor, mit demselben Recht, wie (c), (i) und (v) einzeln, unter Vernachlässigung der höheren Potenzen c^2, i^2 u. s. w., genügende Näherungswerte sind.

Wenn Glieder zweiter Ordnung in den Ausdrücken von (c), (i) oder (v) vorkämen, so würde die einfache Addierung nach (9) nicht zum Ausdruck des Gesamt-Projektions-Fehlers genügen, denn sonst würden die Produkte cv, ci, iv verloren gehen.

Fehler-Formel für einen gemessenen Winkel.

Die bisherigen Betrachtungen beziehen sich immer nur auf *einen* Zielpunkt P, und geben den Projektions-Fehler für denselben. Bei der Messung eines Winkels kommt noch ein zweiter Zielpunkt P' hinzu, und der Winkelfehler ist die Differenz der beim rechtseitigen und linkseitigen Zielstrahl begangenen Projektions-Fehler. Wenn h und h' die beiden Höhen-Winkel sind, und u und u' die Azimutal-Winkel, von der grössten Limbus-Neigung an gezählt, so hat man die Gesamtformel für den Winkelfehler Δ:

$$\Delta = c\,(sec\,h' - sec\,h) + i\,(tang\,h' - tang\,h) + v\,(tang\,h'\,sin\,u' - tang\,h\,sin\,u) \tag{10}$$

Wenn $h = h'$ ist, so fallen die zwei ersten Glieder fort; dieselben fallen auch dann fort, wenn mit zwei verschiedenen Fernrohrlagen gemessen wird, denn beim Durchschlagen ändert sich das Vorzeichen von c und von i. Für Messung mit Durchschlagen des Fernrohrs hat man also nur:

$$\Delta' = v\,(tang\,h'\,sin\,u' - tang\,h\,sin\,u) \tag{11}$$

Dieser Wert erreicht bei gleichen Werten h und h' sein Maximum in Bezug auf u und u', wenn $sin\,u' = -\,sin\,u$, oder wenn:

$$u' - u = \pm 180°$$

$u' - u$ ist der zu messende Winkel, es wird also für $h = h'$ der Fehler Δ' am grössten, wenn der zu messende Winkel nahezu 180° ist (was z. B. bei Polygonzügen der Fall ist). Nimmt man $h' = h$ und $u' - u = 180°$, so wird:

$$\Delta_{max} = 2\,v\,tang\,h\;,$$

wofür Zahlenwerte aus der Tafel II. S. 163 zu entnehmen sind.

Zusammenfassung der Resultate.

Der Zielaxen-Fehler (Kollimations-Fehler) c ist der wenigst schädliche aller Axen-Fehler, sein Einfluss ist bei einem einigermassen richtig behandelten Instrument verschwindend klein gegen die übrigen Fehler. Der Horizontal-Axen-Fehler i und der Aufstellungs-Fehler v haben bei kleinen Höhen-Winkeln unter 5° immer noch so

wenig Einfluss, dass man bei einem gut geprüften und berichtigten Instrument sie nicht zu fürchten braucht.

Messung mit durchgeschlagenem Fernrohr eliminiert zwar den Zielaxen-Fehler c, und den Horizontal-Axen-Fehler i, *nicht* aber den Fehler v der Vertikal-Axe, und da dieser Fehler unter Umständen die anderen Fehler überwiegt, ist das Durchschlagen des Fernrohrs zwar ein sehr wichtiges, aber nicht vollkommenes Mittel zur Fernhaltung von Winkelmessungs-Fehlern.

Wenn durchgeschlagen wird, hat man hauptsächlich auf die Horizontalstellung des Instrumentes zu achten, wobei es genügt, wenn die Blase der Libelle an irgend welcher Stelle der Libellen-Teilung stehen bleibt.

Anmerkung.

In der Feld- und Land-Messung werden die im Vorstehenden entwickelten Formeln selten unmittelbar gebraucht, und deswegen haben wir auch unterlassen, die Vorzeichen, welche immer eine besondere Überlegung verlangen, zu erörtern.

Wenn aber auch die entwickelten Formeln hauptsächlich nur mittelbar nützlich sind, indem sie manche Fingerzeige für die Praxis geben, so kommen doch auch Fälle unmittelbarer Anwendung vor. Z. B. bei den Hilfsmessungen für Centrierungen auf Kirchtürmen sind manchmal Steil-Zielungen, mit 45° und noch mehr, nicht zu vermeiden, und dann ist es wohl am Platz, die Reduktion für die Horizontal-Axen-Neigung i, nämlich nach (5) S. 163, zu benützen:

$$(i) = i \, tang \, h$$

Man kann hieran auch eine Nebenbetrachtung knüpfen, mit der Frage, ob man eine Turmhöhe H besser mit steilem Höhen-Winkel h und kurzer Entfernung a, oder mit flacherem Höhen-Winkel und längerer Entfernung nehmen soll. Ist δi der mittlere Fehler von i, und (δi) der entsprechende mittlere Fehler der Azimutal-Winkelmessung, so ist:

$$(\delta i) = \delta i \, tang \, h \quad , \quad tang \, h = \frac{H}{a}$$

also:

$$a \, (\delta i) = \delta i \times H$$

Hier ist $a(\delta i)$ die lineare Querabweichung der Projizierung, und diese ist also, soweit der Libellen-Fehler (δi) in Frage kommt, nur abhängig von der Turmhöhe H, und gar nicht von der Entfernung a. Es ist also für $a(\delta i)$ insofern gleichgültig, ob man eine kurze oder lange Entfernung a nimmt.

§ 54. Excentricität des Fernrohrs.

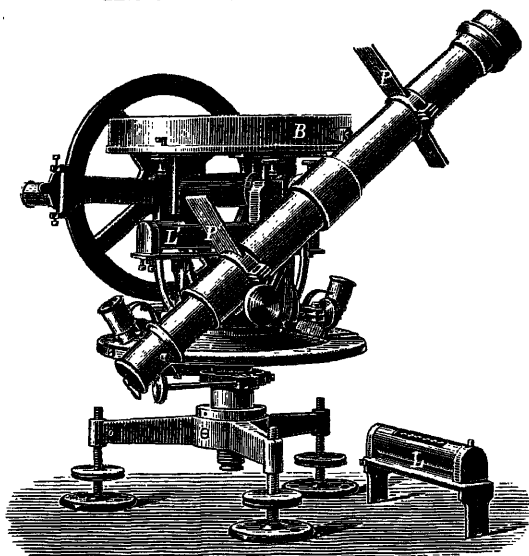
Es giebt Theodolite, bei welchen das Fernrohr nicht in der Mitte, sondern seitlich angebracht ist.

Ein solcher Theodolit ist in Fig. 1. S. 167 gezeichnet. Der Grund für die seitliche Anbringung des Fernrohrs besteht hier darin, dass dadurch bequemes Durchschlagen ohne hohe Träger, und Steil-Zielungen bis 60° und mehr, möglich gemacht werden.

Das Instrument Fig. 1. hat diese Anordnung deswegen, weil es gleichzeitig zu astronomischen Messungen und zu topographischen Aufnahmen (mit der aufgesetzten Bussole B) benützt worden ist.

(Weiteres hierüber siehe in des Verfassers „Grundzüge der astronomischen Zeit- und Orts-Bestimmung, Berlin 1885“, S. 38.)

Indem wir hier die Frage der Fernrohr-Excentricität weiter verfolgen, haben wir zuerst den Hauptsatz hiefür auszusprechen und zu beweisen, dass der Einfluss dieser Excentricität auf Horizontal-Winkel-Messung eliminiert wird, wenn man mit

Fig. 1.
Theodolit mit excentrischem Fernrohr.

(Hannov. Sammlung.)

beiden Fernrohr-Lagen misst (Durchschlagen) und aus den beiden hiebei erhaltenen Messungs-Ergebnissen das Mittel bildet.

Dieses lässt sich mit Fig. 2. leicht zeigen:

Fig. 2.
Eliminierung der Excentricität des Fernrohrs.

Wenn die Ziel-Axe des Fernrohrs gegen die Limbus-Mitte L eine Excentricität, etwa $= e$ hat, so berühren alle Ziel-Axen im Grundriss einen Kreis, der mit dem Halbmesser e um die Limbus-Mitte L gezogen ist.

Sind A und B zwei Zielpunkte, so ist der Winkel, den man messen will,:

$$ALB = \alpha$$

Wegen der Excentricität misst man aber in Lage I. den Winkel α' und in Lage II. den Winkel α''. Aus Fig. 2. entnimmt man:

$$\alpha' + \beta + \varphi = 180^\circ \qquad \alpha'' + \gamma + \psi = 180^\circ \tag{1}$$

$$\alpha + \gamma + \varphi = 180^\circ \qquad \alpha + \beta + \psi = 180^\circ \tag{2}$$

Aus diesen vier Gleichungen findet man:

$$\alpha' + \alpha'' = 2\,\alpha \quad \text{oder} \quad \alpha = \frac{\alpha' + \alpha''}{2} \tag{3}$$

Damit ist der oben ausgesprochene Satz bewiesen.

Die vier Gleichungen (1) und (2) geben auch die Differenzen von α , α' und α'', nämlich:

$$\alpha - \alpha' = \varphi - \psi \qquad \alpha - \alpha'' = \psi - \varphi \tag{4}$$

$$\alpha'' - \alpha' = 2\,(\varphi - \psi) \tag{5}$$

Die Parallaxen-Winkel φ und ψ bestimmen sich aus der Excentricität e und den Entfernungen der Zielpunkte A und B. Setzt man diese Zielweiten $= a$ und $= b$, so hat man:

$$\varphi = \frac{e}{a}\,\varrho \qquad \psi = \frac{e}{b}\,\varrho \tag{6}$$

Z. B.: $e = 0{,}1^m$ und $a = 1000^m$ giebt $\varphi = 21''$ (7)

Die Prüfung und Berichtigung der Axen-Fehler muss bei excentrischem Fernrohr teilweise ein wenig anders gemacht werden, als in § 51. angegeben ist.

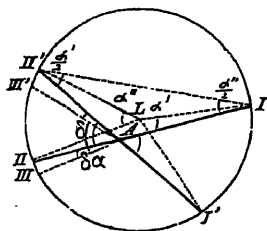
Die Untersuchung des Zielaxen-Fehlers nach Fig. 4. S. 154 mit Durchschlagen und Drehen um 180° kann auch bei excentrischem Fernrohr angewendet werden, wenn die Zielweite wenigstens 1 Kilometer ist, denn dann ist nach (6) und (7) der Winkel $\varphi = 21''$, und bei Feld- und Landmess-Instrumenten ist ein Zielaxen-Fehler von solcher Grösse ohne Belang, zumal das Durchschlagen auch den Zielaxen-Fehler eliminiert.

Hat man keinen genügend weiten Zielpunkt oder will man aus anderen Gründen die Untersuchung schärfer machen, so kann man *zwei* um $2e$ von einander abstehende Zielpunkte anwenden, oder andere durch einfache Überlegungen sich ergebende Abänderungen der Methoden von § 51 benützen.

§ 55. Excentricität der Alhidade.

In Fig. 1. ist L der Limbus-Mittelpunkt, welcher zugleich Drehpunkt der Alhidade sein soll.

Die Alhidade denken wir uns zunächst als eine mathematische Gerade, welche sich jedoch *nicht* um den Limbus-Mittelpunkt L, sondern um einen anderen Punkt A drehen soll; d. h. wir nehmen an, es bestehe eine Excentricität der Alhidade gegen den Limbus-Mittelpunkt.

Fig. 1.
Excentricität der Alhidade.

$II\,A\,II' = \alpha = III\,A\,III'$
$II'\,A\,III' = \delta = II\,A\,III.$

Die Alhidade ist doppel-armig, und trägt an den beiden Arm-Enden die Nonien oder Mikroskope I und II (wobei $I\,A\,II$ eine Gerade ist). Nachdem die Alhidade um einen Winkel α gedreht ist, habe sie die Lage $I'A\,II'$ (III und III' kommen erst später in Betracht).

Bei der Winkelmessung folgt die Alhidade jeder Drehung des Fernrohrs, es ist deswegen der Winkel $I A I' = \alpha$, welchen zwei Alhidaden-Lagen $A\,I$ und $A\,I'$ einschliessen, derjenige Winkel, welchen man mit dem Theodolit messen will. Am Limbus-Rande werden aber zwei Bögen II' und $II\,II'$ abgelesen, zu welchen *andere* Centriwinkel α' und α'' gehören.

Es wird sich zeigen lassen, dass α das arithmetische Mittel von α' und α'' ist, d. h.:

$$\alpha = \frac{\alpha' + \alpha''}{2} \tag{1}$$

Um dieses zu beweisen, betrachten wir die in Fig. 1. mit α' und $\frac{\alpha'}{2}$ eingeschriebenen Winkel, und finden, dass sie als Centriwinkel und Peripheriewinkel auf

dem gemeinsamen Bogen II' stehen. Ebenso verhält es sich mit α'' und $\frac{\alpha''}{2}$, welche auf dem gemeinsamen Bogen $II\,II'$ stehen. Zugleich ist α ein Aussenwinkel des Dreiecks $A\,I\,II'$, folglich ist:

$$\alpha = \frac{\alpha'}{2} + \frac{\alpha''}{2}$$

womit die Gleichung (1) bewiesen ist.

Wir gehen weiter zu der Annahme, dass die beiden Alhidaden-Arme I und II nicht genau diametral stehen, sondern in A eine kleine Knickung haben; oder es seien nun I und III die beiden Alhidaden-Enden, sowie I' und III' dieselben Alhidaden-Enden nach erfolgter Drehung um den Winkel α.

Es ist jedenfalls klar, dass der Winkel $III\,A\,III'$, welchen die beiden Arme $A\,III$ und $A\,III'$ einschliessen, wieder $= \alpha = II\,A\,II'$ ist, und es wird auch, praktisch genommen, keinem Zweifel unterliegen, dass die beiden kleinen *Bögen* $III\,II$ und $III'\,II'$, welche zu den zwei kleinen Winkeln δ gehören, ebenfalls gleich sind. Genau ist das nicht der Fall, weil A ein excentrischer Punkt ist, also die beiden δ nicht *Centri*winkel sind; allein die Differenz der beiden kleinen Bögen $III\,II$ und $III'\,II'$ kann höchstens betragen:

$$(III\,II - III'\,II')_{max} = (r \pm e)\,\delta - r\,\delta = \pm e\,\delta \qquad (2)$$

Dieses findet in der Richtung der Central-Linie $L\,A$ statt, und dieser Wert (2) ist für die gewöhnlichen Werte von e und δ verschwindend klein.

Wir haben also jetzt den wichtigsten Satz für die Alhidaden-Excentricität bewiesen, welcher sagt, dass der Einfluss dieser Excentricität unschädlich gemacht wird, wenn man an *zwei* Alhidaden-Armen, mit Nonien oder Mikroskopen, abliest, welche genau oder wenigstens nahezu um 180° gegen einander abstehen.

Elimination der Excentricität durch Durchschlagen.

Auch wenn nur *ein* Nonius (oder Mikroskop) angebracht ist, kann die Excentricität der Alhidade für Horizontal-Winkelmessung unschädlich gemacht werden durch Durchschlagen des Fernrohrs, und Messen in zwei Fernrohr-Lagen, was ja ohnehin für andere Zwecke erforderlich ist. Man überzeugt sich hievon durch Betrachtung von Fig. 1. S. 168, wobei I und I' die Ablesungen für die erste Fernrohr-Lage und II und II' die Ablesungen für die zweite Fernrohr-Lage vorstellen können.

Einfluss der Excentricität auf den Nonius.

In Fig. 1. S. 168 und in den zugehörigen Betrachtungen ist angenommen, dass die Alhidade eine mathematische Gerade sei, welche auch bei beliebig grosser Excentricität immer noch Ablesung am Limbus-Rand gestattet.

In Wirklichkeit ist die Alhidade meist eine metallene Scheibe, welche sich innerhalb des kreisförmigen Alhidaden-Randes drehen soll.

Daraus folgt nun sofort, dass die Excentricität nur ganz unbedeutend, vielleicht $0{,}01^{mm}$ bis $0{,}05^{mm}$ sein kann, denn sonst würde die Alhidade beim Umdrehen auf einer Seite klaffen und auf der anderen Seite pressen, wenn nicht etwa das Pressen durch nachträgliches Abdrehen beseitigt ist.

Bei sogenannten fliegenden Nonien (an Höhenkreisen), welche auf der Ebene

des Limbus flach aufliegen, könnte die Excentricität ganz erheblich sein, ohne dass sie sich durch Klaffen oder Reiben u. s. w. verriete.

Hier kommt die Frage ins Spiel, ob der excentrisch herumgeführte Nonius überall das ihm zugehörige Limbus-Intervall genau decken kann? Rückt der Nonius zu weit heraus, so erscheint er zu klein, rückt er zu weit hinein, so ist er zu gross. Man kann dieses leicht berechnen: Es sei N die Nonien-Länge in Graden, r der Halbmesser und e die Excentricität, dann handelt es sich um die Differenz:

$$(r+e)\frac{N}{\varrho^\circ} - r\frac{N}{\varrho^\circ} = e\frac{N}{\varrho^\circ}$$

Das ist das lineare Übergreifen oder Zurückbleiben des Nonius; der entsprechende Wert in Sekunden ist:

$$\Delta N = \frac{e}{r}\frac{N}{\varrho^\circ}\varrho'' = \frac{e}{r} N\,3600''$$

Wenn also z. B. ein Limbus in Sechstel-Grade $= 10'$ geteilt ist, und der Nonius $10''$ angiebt, $r = 100^{mm}$ und $e = 0{,}01^{mm}$, so wird:

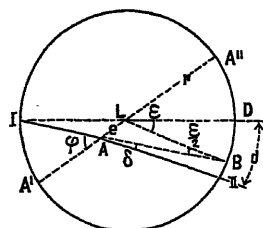
$$N = 590' = 9{,}83^\circ \quad , \quad \Delta N = \frac{9{,}83}{10000}\,3600'' = 3{,}5''$$

Dieses ist bereits an der Grenze des Zulässigen, man sieht also, wie sehr auch in Hinsicht auf die Nonien die Excentricität der Alhidade schädlich wirkt.

Bei Mikroskopen kommt hiebei immer nur *ein* Intervall des Limbus in Betracht, und deswegen ist ein schädlicher Einfluss der Alhidade in dieser Beziehung bei Mikroskopen kaum zu fürchten.

§ 56. Berechnung der Excentricität der Alhidade.

Obgleich wir im vorigen § 55. gesehen haben, dass die Alhidaden-Excentricität sich bei Theodoliten leicht eliminieren lässt, verfolgen wir die Excentricitäts-Verhältnisse doch noch weiter durch Rechnung, erstens, weil dadurch diese Verhältnisse im ganzen noch weiter aufgeklärt werden, und zweitens, weil sich damit auch ein erster Einblick in die Güte der Kreisteilung (§ 57.) ergeben wird.

Fig. 1.
$II - I - 180^\circ = \delta + \varepsilon$
Excentricität $BA = e$

$LA' = LA'' = r \quad , \quad LA = e.$

In Fig. 1. bedeutet wieder, wie bisher:

L den Limbus-Mittelpunkt,

A den Alhidaden-Drehpunkt,

$A\,I$ und $A\,II$ die beiden Alhidaden-Arme, welche nicht genau um 180° gegen einander stehen, sondern die Knickung δ bilden.

$A'A''$ ist die Zentral-Linie, welche durch die beiden Punkte A und L geht, und φ ist der Winkel, welchen bei irgend welcher Alhidaden-Stellung, der Arm $A\,I$ mit der Zentral-Linie $A\,A'$ bildet.

Dadurch ist die ganze Fig. 1. geometrisch bestimmt, namentlich auch der Winkel $\varepsilon = D\,L\,B$, um welchen die beiden Halbmesser $L\,I$ und $L\,B$ gegen 180° abstehen. Dabei ist B mit I und A auf einer Geraden, und im übrigen giebt das schmale Dreieck $L\,A\,B$, mit $L\,A = e$ und $L\,B = r$, die Proportion:

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} : e = \sin\varphi : r$$

oder, weil ε ein kleiner Winkel ist,:

$$\varepsilon = \frac{2e}{r} \varrho \sin \varphi = \varepsilon_m \sin \varphi \tag{1}$$

Dabei wurde zur Abkürzung gesetzt:

$$2 \frac{e}{r} \varrho = \varepsilon_m \tag{2}$$

d. h. es ist ε_m der grösste Wert von ε, welcher entsteht mit $\varphi = 90°$, oder wenn die Alhidade rechtwinklig zur Zentral-Linie $A'A''$ steht.

Schon eine sehr kleine Excentricität e erzeugt einen beträchtlichen Wert ε_m, z. B. $e = 0{,}01^{mm}$ mit $r = 100^{mm}$ giebt bereits $\varepsilon_m = \frac{0{,}02}{100} 206\,265 = 41''$.

Der Betrag d, um welchen die Ablesungs-Differenz $II - I$ beider Nonien von 180° verschieden ist, ergiebt sich aus Fig. 1. S. 170:

$$d = II - I - 180° = \delta + \varepsilon \tag{3}$$

Hier ist δ konstant, dagegen ε nach dem Gesetze der Gleichung (1) veränderlich, folglich auch d eine Funktion von φ.

Bezeichnen wir mit d_1 denjenigen Wert von d, welcher zu einem gewissen Werte φ gehört, und mit d_2 denjenigen Wert von d, welcher zu $\varphi \pm 180°$, d. h. zu einer Umstellung der Alhidade gehört, so haben wir:

$$\left.\begin{aligned} d_1 &= \delta + \varepsilon_m \sin \varphi &&= \delta + \varepsilon \\ d_2 &= \delta + \varepsilon_m \sin(\varphi \pm 180°) &&= \delta - \varepsilon \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Die Summe und die Differenz hievon geben:

$$\frac{d_1 + d_2}{2} = \delta \qquad \frac{d_1 - d_2}{2} = \varepsilon = \varepsilon_m \sin \varphi \tag{5}$$

Hiernach ist δ konstant, ε ist von φ, also von der Stellung der Alhidade abhängig. Zur Bestimmung von δ genügen daher streng genommen zwei zusammengehörige Werte d_1 und d_2, während zwei solche Werte d_1 und d_2 in Bezug auf ε wenig aussagen. Um die Veränderungen von ε zu untersuchen, macht man eine über den ganzen Limbus gleichförmig verteilte Beobachtungsreihe, wie folgendes einfache Beispiel zeigt:

Ein kleiner Theodolit mit einem Limbus von 10^{cm} Durchmesser wurde von 20° zu 20° an beiden Nonien abgelesen, und gab dabei folgendes:

Non. I.	Nonius II.	Non. I.	Nonius II.	d_1	d_2	$2\delta = d_1 + d_2$	$2\varepsilon = d_1 - d_2$	δ	ε
0°	180° 1,0′	180°	0° 1,5′	+1,0′	+1,5′	+2,5′	−0,5′	+1,25′	−0,25′
20	200 1,5	200	20 1,0	+1,5	+1,0	+2,5	+0,5	+1,25	+0,25
40	220 2,0	220	40 0,5	+2,0	+0,5	+2,5	+1,5	+1,25	+0,75
60	240 2,0	240	60 0,5	+2,0	+0,5	+2,5	+1,5	+1,25	+0,75
80	260 2,0	260	80 0,0	+2,0	0,0	+2,0	+2,0	+1,00	+1,00
100	280 2,5	280	100 0,0	+2,5	0,0	+2,5	+2,5	+1,25	+1,25
120	300 2,0	300	120 0,0	+2,0	0,0	+2,0	+2,0	+1,00	+1,00
140	320 2,0	320	140 1,0	+2,0	+1,0	+3,0	+1,0	+1,50	+0,50
160	340 1,5	340	160 0,5	+1,5	+0,5	+2,0	+1,0	+1,00	+0,50
$n = 9$							Mittel	+1,19′	

(6)

Hiedurch ist $\delta = +1{,}19'$ genügend bestimmt.

Was die Werte ε betrifft, so ist zuerst zu bemerken, dass deren Reihe, als Funktion von I. in der Tabelle (6) nur hälftig angegeben ist, nämlich von $I = 0°$ bis $I = 160°$. Die andere Hälfte von 180° bis 340° würde sich von der ersten Hälfte nur durch die Vorzeichen unterscheiden, nämlich $+0{,}25'$ $-0{,}25'$ $-0{,}75'$ u. s. w. und braucht deswegen nicht besonders hergesetzt zu werden.

Wir wollen nun darauf ausgehen, die Werte ε nach (5) als Funktion von ε_m und φ darzustellen; wir müssen zu diesem Zwecke setzen:

$$\varepsilon = \varepsilon_m \sin \varphi = \varepsilon_m \sin (I - \varphi_0) \tag{7}$$

wobei I, wie bisher, die Ablesung am Nonius I ist und φ_0 derjenige Wert von I, welcher der Central-Linie $A'A''$ in Fig. 1. S. 170 entspricht, oder für welchen $\varepsilon = 0$ wird.

Streng genommen würden *zwei* Werte ε genügen, um die beiden Konstanten ε_m und φ_0 der Gleichung (7) zu bestimmen; da wir 9 beobachtete Werte ε haben, ist eine Ausgleichung zu machen.

Die Fehler-Gleichungen sind zunächst nach (7):

$$v = \varepsilon_m \sin (I - \varphi_0) - \varepsilon \tag{8}$$

Hiebei ist: $\quad \sin (I - \varphi_0) = \sin I \cos \varphi_0 - \cos I \sin \varphi_0$

Daraus ergiebt sich:

$$v = a x + b y - \varepsilon \tag{9}$$

wobei die einzelnen Teile folgende Bedeutungen haben:

$$\text{Coëfficienten} \quad a = \sin I \qquad b = -\cos I \tag{10}$$

$$\text{Unbekannte} \quad x = \varepsilon_m \cos \varphi_0 \qquad y = \varepsilon_m \sin \varphi_0 \tag{11}$$

Hat man diese Hilfs-Unbekannten x und y bestimmt, so kann man daraus auch wieder die ursprünglichen Unbekannten φ_0 und ε_m finden mittelst der Gleichungen:

$$tang\, \varphi_0 = \frac{y}{x} \quad , \quad \varepsilon_m = \frac{y}{\sin \varphi_0} = \frac{x}{\cos \varphi_0} = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{12}$$

Die Fehler-Gleichungen (9) führen auf die Normal-Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} [a\,a]\, x + [a\,b]\, y - [a\,\varepsilon] = 0 \\ [a\,b]\, x + [b\,b]\, y - [b\,\varepsilon] = 0 \end{array}\right\} \tag{13}$$

Bei der einfachen Natur der Coëfficienten a und b nach (10) werden die Summen $[a\,a]$, $[a\,b]$ u. s. w. sehr einfach, nämlich, wenn n die Anzahl der gleichförmig auf den Halbkreis verteilten ε ist (in unserem Falle $n = 9$):

$$[a\,a] = \frac{n}{2} \qquad [a\,b] = 0 \qquad [b\,b] = \frac{n}{2} \tag{14}$$

(Der Beweis hiefür ist in Band I. „M. d. kl. Q." S. 90—91 gegeben.)

Damit werden die Normal-Gleichungen (13) sehr einfach, nämlich:

$$\frac{n}{2} x - [\varepsilon \sin I] = 0 \quad \text{und} \quad \frac{n}{2} y + [\varepsilon \cos I] = 0 \tag{15}$$

ferner nach (12) und (15):

$$tang\, \varphi_0 = \frac{-[\varepsilon \cos I]}{[\varepsilon \sin I]} \tag{16}$$

$$\varepsilon_m = \frac{2}{n} \frac{[-\varepsilon \cos I]}{\sin \varphi_0} = \frac{2}{n} \frac{[\varepsilon \sin I]}{\cos \varphi_0} \tag{17}$$

Der Quadrant von φ_0 bestimmt sich in (16) nach bekannten polygonometrischen Regeln, und ε_m ist stets positiv.

Man kann auch noch die nach der Ausgleichung übrig bleibende Quadratsumme $[vv]$ angeben; es ist nach Band I. S. 67, Formel (8):

$$[vv] = [ll] - \frac{[al]^2}{[aa]} - \frac{[bl.1]^2}{[bb.1]} \tag{18}$$

In unserem Falle ist jedoch $[ab] = 0$ (s. o. (14)), und deshalb wird zunächst $[bl.1] = [bl]$ und $[bb.1] = [bb]$, und wenn man auch im übrigen (9) und (10) berücksichtigt, so wird:

$$[vv] = [\varepsilon\varepsilon] - \frac{2}{n}[\varepsilon \sin I]^2 - \frac{2}{n}[\varepsilon \cos I]^2$$

oder wegen (17):

$$[vv] = [\varepsilon\varepsilon] - \frac{n}{2}\varepsilon_m^2 \tag{19}$$

Mittlerer Fehler eines beobachteten Wertes ε:

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-2}} \tag{20}$$

Die Gleichungen (16), (17), (19), (20) enthalten die ganze Auflösung der vorgelegten Aufgabe.

Die Ausrechnung nach den Formeln (16), (17), (19) zeigt folgende Tabelle:

I	vor der Ausgleichung				nach der Ausgleichung			
	ε	$\varepsilon \sin I$	$\varepsilon \cos I$	ε^2	$I - 5°30' = \varphi$	$1{,}070 \sin\varphi = \varepsilon'$	$\varepsilon' - \varepsilon = v$	v^2
0°	−0,25′	−0,000	−0,250	0,0625	− 5°30′	−0,10′	+0,15	0,0225
20	+0,25	+0,086	+0,235	0,0625	+14 30	+0,27	+0,02	0,0004
40	+0,75	0,482	0,575	0,5625	34 30	+0,61	−0,14	0,0196
60	+0,75	0,650	0,375	0,5625	54 30	+0,87	+0,12	0,0144
80	+1,00	0,985	0,174	1,0000	74 30	+1,03	+0,03	0,0009
100	+1,25	1,231	−0,217	1,5625	94 30	+1,07	−0,18	0,0324
120	+1,00	0,866	0,500	1,0000	114 30	+0,97	−0,03	0,0009
140	+0,50	0,321	0,383	0,2500	134 30	+0,76	+0,26	0,0676
160	+0,50	0,171	0,470	0,2500	154 30	+0,46	−0,04	0,0016
$n = 9$		+4,792	−0,461	5,3125				0,1603

$$\operatorname{tang}\varphi_0 = \frac{+0{,}461}{+4{,}792} \qquad \varphi = 5°\,30' \tag{21}$$

$$\varepsilon_m = \frac{1}{4{,}5}\,\frac{0{,}461}{\sin\varphi_0} = \frac{1}{4{,}5}\,\frac{4{,}792}{\cos\varphi_0} = 1{,}070 \tag{22}$$

Also die Ausgleichungs-Funktion nach (7):

$$\varepsilon = 1{,}070 \sin(I - 5°\,30') \tag{23}$$

Die hiernach berechneten Werte ε sind mit der Bezeichnung ε', zur Unterscheidung von den beobachteten ε, in obiger Tabelle eingesetzt. Ihre Vergleichung mit den beobachteten ε giebt die einzelnen v und dann $[vv]$.

Zur Probe hiefür hat man nach (19):

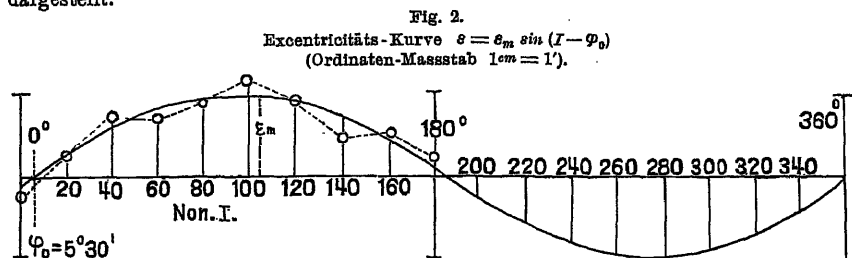
$$[vv] = 5{,}3125 - 4{,}5\,(1{,}070)^2 = 0{,}1605 \tag{24}$$

Endlich kann man daraus auch den mittleren Fehler eines beobachteten Wertes ε finden, nämlich:

$$m = \sqrt{\frac{0{,}16}{9-2}} = \pm 0{,}15' = \pm 9'' \tag{25}$$

Graphische Darstellung.

Die beobachteten und die ausgeglichenen Werte ε sind in Fig. 2. graphisch dargestellt.

Fig. 2.
Excentricitäts-Kurve $\varepsilon = \varepsilon_m \sin (I - \varphi_0)$
(Ordinaten-Massstab $1^{cm} = 1'$).

Die beobachteten ε sind nur von 0° bis 180° angegeben; von 180° bis 360° würden sie mit umgekehrten Zeichen wiederkehren. Die ausgeglichenen ε (d. h. ε' in der Tabelle S. 173) sind von 0° bis 360° gezeichnet, damit die Sinus-Linie deutlich hervortritt.

Der Wert $\varphi_0 = 5°30'$ entspricht dem Schnitt der Ausgleichungs-Kurve mit der Abscissen-Axe, und die grösste Ordinate $\varepsilon_m = 1{,}07'$ gehört zu der Abscisse $105°30'$.

Wir wissen jetzt, dass der excentrische Alhidaden-Drehpunkt A auf dem Limbus-Halbmesser LA liegt, welcher zu dem Teilstrich $5°30'$ gehört, und wir können auch die lineare Excentricität e selbst angeben, nämlich nach (2):

$$2 \frac{e}{r} \varrho = \varepsilon_m = 1{,}070'$$

Der Halbmesser ist $r = 50^{mm}$ und damit berechnet man:

$$e = \frac{\varepsilon_m}{2\varrho} r = 0{,}0078^{mm}$$

§ 57. Teilungsfehler des Limbus.

Wie alle mechanischen Operationen, so ist auch die Ausführung der Teilung eines Limbus-Kreises mit Fehlern behaftet. Man hat die Erfahrung gemacht, dass die Teilungsfehler sich in zwei Klassen einteilen lassen:

1) unregelmässige, an allen Stellen gleich wahrscheinlich positive oder negative Fehler,
2) regelmässige oder systematische, an gewissen Stellen des Kreises durchaus positive, an anderen Stellen durchaus negative Fehler.

Man kann sich die Erscheinung der regelmässigen Fehler-Verteilung etwa so erklären: Wenn der zu teilende Kreis centrisch über einen anderen Kreis, dessen Teilung als fehlerfrei vorausgesetzt werden mag, gelegt ist, so wird das Übertragen der Original-Teilung auf den neuen Kreis dadurch bewerkstelligt, dass eine Art von Alhidade auf die Striche des Originalkreises eingestellt wird, worauf ein mit der Alhidade verbundener Reisser entsprechende Striche auf dem neuen Kreis liefert. Wenn nun hiebei ein seitlicher Druck ausgeübt wird, schiefe Beleuchtung stattfindet u. s. w., so entstehen Teilungsfehler. Eine solche Fehler-Ursache wirkt gewöhnlich längere Zeit, sie verändert sich allmählich, und entsprechend ändern sich die seitlichen Abweichungen der Teilstriche.

Eine andere Fehler-Ursache bei der Teilung ist auch die ungleiche Erwärmung und dadurch bedingte ungleiche Ausdehnung der Kreise. Da die Wärme-Verhältnisse sich ebenfalls allmählich ändern, so müssen auch daraus allmählich sich ändernde Teilungsfehler entstehen.

Da eine Kreis-Teilung in sich selbst zurückkehrt, so kann man zunächst nicht von dem Teilungsfehler eines einzelnen Striches reden, sondern nur von dem Fehler der relativen Lage zweier Striche; man kann jedoch irgend einen Strich, z. B. den Nullstrich, als fehlerfrei annehmen, und alle beobachteten Fehler den anderen Strichen zuweisen; wenn man z. B. findet, dass die Halbmesser für die Striche 0° und 30° 10′ nicht einen Winkel von 30° 10′ einschliessen, sondern den Winkel 30° 10′ 1″, so sagt man, der Strich 30° 10′ hat den Fehler + 1″, obgleich man natürlich auch sagen könnte, der Nullstrich hat den Fehler — 1″.

Das einfachste Mittel, eine Teilung mit Nonien-Ablesung zu untersuchen, besteht darin, dass man die Nonienlänge auf der ganzen Teilung herumträgt, und mittelst der Überteilstriche des Nonius bestimmt, ob die Nonienlänge überall ein gleich grosses Stück der Teilung deckt.

Zeigen sich hiebei Ungleichheiten, so darf man dieselben jedoch nicht ohne Weiteres als Teilungsfehler betrachten, denn es ist hiebei auch die Excentricität wirksam (§ 55. S. 169). Jedenfalls giebt aber das Durchführen der Nonien einen ersten Aufschluss über die Teilung im ganzen, ob grobe Unregelmässigkeiten u. s. w. vorkommen.

Wir haben den *Ertel*schen Theodolit der Karlsruher Sammlung (Fig. III. S. 143) in dieser Weise untersucht, nämlich den Nonius *I.* und den gegenüberstehenden Nonius *III.* von 10° zu 10° der Teilung*) durchgeführt und beides doppelt gemacht, wie folgender Auszug aus der Beobachtungs-Tabelle zeigt, wobei $(10^{-} - 0^{-})$ die Differenz der Ablesungen am Anfangsstrich 0^{-} und am Endstrich 10^{-} des Nonius, d. h. die Nonienlänge bedeutet, der untere Zeiger $_1$ oder $_2$ bedeutet erste oder zweite Messung.

Nonius *I.*					Nonius *III.*				
Teil-strich	$(10^{-}-0^{-})_1 = N_1$	$(10^{-}-0^{-})_2 = N_2$	N_1-N_2	$(N_1-N_2)^2$	Teil-strich	$(10^{-}-0^{-})_1 = N_1$	$(10^{-}-0^{-})_2 = N_2$	N_1-N_2	$(N_1-N_2)^2$
0°	$-5^{=}$	$+5^{=}$	$-10^{=}$	100	200°	$+15^{=}$	$+10^{=}$	$+5^{=}$	25
10°	0	$+5^{=}$	-5^{-}	25	210°	$+5^{=}$	$+5^{=}$	$0^{=}$	0
20°	$-20^{=}$	$+10^{=}$	$-30^{=}$	900	220°	$+10^{=}$	$+15^{=}$	$-5^{=}$	25
30°	$-10^{=}$	$+20^{=}$	$-30^{=}$	900	230°	$+35^{=}$	$+15^{=}$	$+20^{=}$	400
40°	$-5^{=}$	$0^{=}$	$-5^{=}$	25	240°	$+10^{=}$	$+15^{=}$	$-5^{=}$	25
50°	$+10^{=}$	$+5^{=}$	$+5^{=}$	25	250°	$+20^{=}$	$+35^{=}$	$-15^{=}$	225
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
390°	$0^{=}$	$+10^{=}$	$-10^{=}$	100	190°	$+5^{=}$	$+10^{=}$	$-5^{=}$	25
Summe	$+170$	$+225^{=}$	$-55^{=}$	8175		$+71,5$	$+790^{=}$	$-75^{=}$	3475
Mittel	$+4,25^{=}$	$+5,62^{=}$		204,4		$+17,88^{=}$	$+19,75^{=}$		86,88 (1)
	$+4,93^{=}$					$+18,82^{=}$			

$$\left.\begin{array}{ll} \sqrt{204,4} = \pm 14,3^{=} & \sqrt{86,88} = 9,3 \\ \multicolumn{2}{c}{\sqrt{\dfrac{8175 + 3475}{80}} = 12,07^{=}} \end{array}\right\} \qquad (2)$$

*) Die Teilung ist centesimal. Wir schreiben $1^{\circ} = 1$ Centesimal-Grad $= 0^{\circ}54'$
$1^{-} = 1$ „ Minute $= 0' 32,4''$
$1^{=} = 1$ „ Sekunde $= 0,324''$.

Die hier mitgeteilten Ablesungsreihen sind im Jahr 1879, nach Anleitung des Verfassers, von dem Karlsruher Studierenden *Mühlenhardt* gemacht.

Aus den Einzel-Ablesungen (von denen hier nur etwa der sechste Teil zur Veranschaulichung hergesetzt ist) ergab sich, wie zu erwarten war, dass die *Ertel*sche Teilung keine groben Fehler hat. Dagegen ist der Nonius *I.* im Mittel um $4{,}9^{=}$ und der Nonius *III.* im Mittel um $18{,}8^{=}$ zu gross.

Aus den Wiederholungen finden wir die mittlere Differenz $N_1 - N_2$ im Mittel $= 12{,}07^{=}$. In jeder Differenz kommen vier Einzel-Ablesungen vor, es ist also der mittlere Fehler einer Nonien-Ablesung:

$$a = \sqrt{\frac{12{,}07^2}{4}} = 6{,}03^{=} \pm 1{,}95'' \qquad (3)$$

Dieses ist gelegentlich ein Beweis, dass die Nonien-Ablesung einer grösseren Genauigkeit fähig ist, als seit Erfindung der Schrauben-Mikroskope manchmal angenommen wird.

Teilungsfehler diametraler Striche.

Wenn man eine Ausgleichung der gleichförmig über den ganzen Kreis verteilten Diametral-Ablesungen durchgeführt hat, wie wir an einem kleinen Beispiel § 56. S. 171 gezeigt haben, so kann man aus den übrigbleibenden Fehlern v einen Schluss auf die Teilungsfehler ziehen, im wesentlichen in dem Sinn, dass jene übrigbleibenden Fehler v, soweit sie nicht durch reine Ablesungsfehler zu erklären sind, in Teilungsfehlern ihren Grund haben.

Um die Teilungsfehler von den Ablesenfehlern zu trennen, hat man auf die Bedeutung von ε nach (3), (4) und (5) § 56. S. 171 zurückzugehen:

$$d_1 = II_1 - I_1 - 180^\circ \quad , \quad d_2 = II_2 - I_2 - 180^\circ \qquad (4)$$

Diese Gleichungen gelten zunächst ohne Rücksicht auf Teilungsfehler. Wir wollen nun die Teilungsfehler in Rechnung nehmen, und durch das vorgesetzte Zeichen t jeweils einen Teilungsfehler oder einen Teilungsfehler-Einfluss andeuten; damit geht (4) über in:

$$d_1 + td_1 = (II_1 + tII_1) - (I_1 + tI_1) - 180^\circ \ , \ d_2 + td_2 = (II_2 + tII_2) - (I_2 + tI_2) - 180^\circ \qquad (5)$$

Da aber d_1 und d_2 sich auf diametrales Umstellen der Alhidade beziehen sollen, so kommt die Ablesung II_2 sehr nahe an die Stelle von I_1, und I_2 an die Stelle von II_1. Man darf deswegen setzen:

$$t\,II_2 = t\,I_1 \quad \text{und} \quad t\,I_2 = t\,II_1 \qquad (6)$$

Wenn man dieses (6) in (5) berücksichtigt, und dann mit Rücksicht auf (4) subtrahiert, so findet man:

$$\frac{t\,d_1 - t\,d_2}{2} = t\,II_1 - t\,I_1 \qquad (7)$$

Dabei ist:

$$\frac{d_1 - d_2}{2} = \varepsilon \qquad (8)$$

Man kann also mit dem Zeichen t auch statt (7) schreiben:

$$t\varepsilon = t\,II - t\,I \qquad (9)$$

d. h. ein einzelner Wert ε enthält die Differenz der Teilungsfehler für die beiden in ε wirksamen Diametral-Striche. Andererseits enthält jedes ε die Zusammenwirkung von vier Ablesefehlern, nach (4) und (8):

$$\varepsilon = \frac{(II_1 - I_1) - (II_2 - I_2)}{2} \quad , \quad m_\varepsilon = \frac{\sqrt{2\,a^2 + 2\,a^2}}{2} = a \qquad (10)$$

Hiernach darf angenommen werden:

$$m^2 = 2\,t^2 + a^2 \quad , \quad t = \sqrt{\frac{m^2 - a^2}{2}} \qquad (11)$$

Dabei ist m der mittlere Fehler nach der Ausgleichung ((20) § 56. S. 173), t der mittlere Teilungsfehler eines Striches, und a der mittlere Ablesungsfehler an einem Nonius oder Mikroskop.

Zugleich ist für die Zulässigkeit der Gleichung (11) zu bemerken, dass ein mehrfacher Zeichenwechsel der Teilungsfehler t vorausgesetzt wird.

Um die Formel (11) auf unseren *Ertel*schen Theodolit anzuwenden, mag es genügen, hier mitzuteilen, dass eine Excentricitäts-Ausgleichung genau nach dem Muster des kleinen Beispiels § 56. S. 171—174 gemacht worden ist, welche für die Teilstriche 0° 10° 20° ... 190° folgende übrigbleibende Fehler geliefert hat (in Centesimal-Sekunden):

— 2,6=	— 3,4=	+ 5,7=	+ 2,0=	+ 5,0=	— 0,5=	— 0,5=	— 12,8=	— 7,0=	— 4,2=
+ 2,4	+ 7,2	+ 4,6	+ 0,9	+ 2,3	+ 1,9	— 1,6	+ 7,0	— 3,1	— 10,5

Die Quadratsumme dieser Werte ist 570,68, also der mittlere Fehler:

$$m = \sqrt{\frac{570{,}68}{20-2}} = \pm 5{,}63^{=} \quad \text{(Centes.-Sekunden)} \qquad (12)$$

Um die Gleichung (11) anzuwenden, brauchen wir den mittleren Ablesefehler $a = \pm 6{,}03^{=}$ nach (3); indessen kommt dieser hier nicht unmittelbar zur Anwendung, weil die Ablesungen, welche in die Ausgleichung eingingen, sämtlich Mittel aus je vier Wiederholungen waren (Ablesungen am Anfangsstrich des Nonius und am Endstrich, und beides wiederholt). Es ist also hier nur zu nehmen:

$$a = \frac{6{,}03}{\sqrt{4}} = 3{,}015^{=} \qquad (13)$$

Setzt man diese Werte (12) und (13) in (11), so wird:

$$t = \sqrt{\frac{5{,}63^2 - 3{,}015^2}{2}} = \pm 3{,}36^{=} \quad \text{oder} \quad = \pm 1{,}1'' \qquad (14)$$

oder in Worten: Der mittlere Teilungsfehler des *Ertel*schen Theodolits Fig. IV. S. 144 ist nur etwa 3 Centesimal-Sekunden oder 1 Sexagesimal-Sekunde.

Bestimmung der Teilungsfehler durch Repetitions-Messung.

Wenn man einen Winkel, der durch Repetition im ganzen Kreis aufgeht, z. B. den Winkel 45° oder 60°, durch Repetition im ganzen Kreis herum misst, so kann man dadurch die Teilungsfehler an den benützten Kreisstellen bestimmen.

Man denke sich z. B. einen Winkel von 60° (oder sehr nahe = 60°) 6mal gemessen:

Messung von	0°	bis	60°	$\alpha_1 + t\,60 - t\,0$
„ „	60	„	120	$\alpha_2 + t\,120 - t\,60$
„ „	120	„	180	$\alpha_3 + t\,180 - t\,120$
....	..		..	.. .. ..
„ „	300	„	360	$\alpha_6 + t\,0 - t\,300$
			Mittel	$\alpha + 0 - 0$

Das arithmetische Mittel ist von Teilungsfehlern frei; subtrahiert man also

ses Mittel von den 6 einzelnen Messungen, so bekommt man, da $t\,0 = 0$ zu setzen , die Teilungsfehler für die 5 Teilstriche 60° 120° 180° 240° 300°.

Übrigens ist es nur nötig, den *halben* Kreis von 0° bis 180° in dieser Weise durchlaufen, weil man immer an *zwei* gegenüberliegenden Nonien oder Mikroskopen iest; und die Teilungsfehler, welche man so erhält, gelten dann für die Mittel je eier Diametral-Striche.

Ein Beispiel einer solchen Untersuchung entlehnen wir von *Helmert*, welcher sselbe in der „Zeitschr. f. Verm. 1875", S. 327—341, mitgeteilt hat. Es handelt h um einen Theodolit von *Starke* und *Kammerer* mit 16^{cm} Kreisdurchmesser, von ' zu 10' geteilt, mit zwei Mikroskopen mit 50facher Vergrösserung. Die Haupt-ılenwerte sind folgende:

I. Der mittlere zufällige Einstellungs- und Ablesefehler eines Mikroskops:

$$\mu_e = \pm 1{,}61'' \qquad (15)$$

II. Der zufällige Teilungsfehler der Striche des Horizontalkreises:

$$\mu_t = \pm 0{,}33'' \qquad (16)$$

III. Teilungsfehler diametraler Striche:

$$\mu_\Delta = \pm 2{,}71'' \qquad (17)$$

IV. Systematische Teilungsfehler wurden durch Repetitions-Messung mit Winkeln von 45,9° und 47,2° bestimmt. Folgendes sind die Haupt-Resultate:

Teilstriche *I*		*II*	*Teilungsfehler für das Mittel der Striche* $\frac{I+II}{2}$	
0°	und	180°	— 3,7″	Mittelwert ± 3″ (18)
30°	„	210°	— 2,8″	
60°	„	240°	+ 5,9″	
90°	„	270°	— 0,6″	
120°	„	300°	— 2,3″	
150°	„	330°	— 2,2″	

§ 58. Repetitions-Messung.

Nachdem die Konstruktion eines Theodolits im allgemeinen erkannt ist, ist es ch leicht, zu begreifen, wie man einen Horizontal-Winkel mit dem Theodolit messen nn: Man zielt einen Punkt links an, und einen zweiten Punkt rechts, liest beidemal ide Nonien oder Mikroskope ab, und hat den Winkel als Differenz zwischen den ›lesungen links und rechts. Das Ganze wird mit durchgeschlagenem Fernrohr wieder-lt, und aus den Ergebnissen beider Fernrohr-Lagen wird das Mittel genommen.

Indem wir die Einzelheiten dieser Messungs-Art, welche auch auf mehr als ·ei Zielpunkte ausgedehnt werden kann, bei der Triangulierung und bei der Polygon-essung u. s. w. noch besonders behandeln werden, beschäftigen wir uns hier mit einer essungs-Anordnung ganz besonderer Art, welche man *Repetitions-Messung* nennt.

Es wird dazu ein Theodolit mit doppeltem Axen-System erfordert, das wir reits bei § 47. S. 136 beschrieben haben.

Die Messung geschieht in folgender Weise:

1) Man stellt bei festem Limbus das Fernrohr auf den linksseitigen Zielpunkt L und liest den Wert a_0 ab.

2) Man stellt bei unverändertem Limbus das Fernrohr auf den rechtseitigen Zielpunkt *R* und liest den Wert a_1 ab.

3) Man dreht den Limbus samt der Alhidade soweit zurück, dass abermals *L* angezielt wird; wozu die Einstellung an der Hemmung und an der Mikrometer-Schraube des Limbus gemacht wird.

4) Man stellt bei festem Limbus, nachdem die Alhidade vom Limbus gelöst ist, das Fernrohr zum zweiten Mal auf *R* und findet bei der Ablesung den Wert a_2.

Hat man dieses $n$mal wiederholt, wobei die Ablesungen $a_0\ a_1\ a_2\ a_3\ ..\ a_{n-1}\ a_n$ seien, so erhält man aus je zwei aufeinander folgenden Ablesungen einen Wert des Winkels, nämlich:

$$\begin{aligned} a_1 - a_0 &= A_1 \\ a_2 - a_1 &= A_2 \\ a_3 - a_2 &= A_3 \\ \dots&\dots \\ a_n - a_{n-1} &= A_n \end{aligned}$$

Da bei der Summierung die Zwischenwerte a_1, a_2 .. a_{n-1} herausfallen, so wird das arithmetische Mittel:

$$\frac{a_n - a_0}{n} = A \tag{1}$$

Die an einem zweiten Nonius gemachten Ablesungen werden ebenso behandelt.

Man pflegt hiebei den Nonius *I.* auf 0° 0′ 0″ zu stellen (oder wenigstens nahezu auf diesen Wert), und damit erhält man eine Messung, welche durch folgendes Beispiel erläutert wird:

Horizontal-Winkelmessung mit 5facher Repetition.

Nr.	Nonius *I.*	Nonius *II.*	
0.	0° 0′ 0″	179° 59′ 50″	
1.	130° 41′ 20″		
2.	(261° 23′ 40″)		
3.	(32° 5′ 20″)		
4.	(162° 47′ 20″)		
5.	293° 28′ 20″	113° 28′ 0″	
5fach (293°+360°):	653° 28′ 20″	653° 28′ 10″	Differenzen 5. — 0.
10fach:	1306° 56′ 30″		
Resultat:	130° 41′ 39″		

Die an *einem* Nonius gemachten Zwischen-Ablesungen 1. 2. 3. 4 wurden bei der Berechnung des Winkels nicht benützt, und brauchen deswegen nicht gemacht zu werden. Die *erste* Zwischen-Ablesung dagegen (1. = 130° 41′ 20″) wird wenigstens an *einem* Nonius gemacht, damit kein Zweifel entsteht, ob während der Repetitionen der Nonius durch 360° gegangen ist, ob also am Schlusse 360°, 720° . . . zuzuzählen ist. Auch ist die erste Zwischen-Ablesung 1. erwünscht, damit man aus ihrer Vergleichung mit dem Resultat sehen kann, ob kein grober Fehler im Verlauf der Messung vorgekommen ist.

Repetition mit Durchschlagen.

Wenn die Zahl der Repetitionen eine gerade ist, so kann man nach der ersten [H]älfte das Fernrohr durchschlagen, wie folgendes Beispiel zeigt:

	Nr.	Nonius *I.*	Nonius *II.*
	0.	0° 0′ 0″	179° 59′ 50″
	1.	148° 50′ 40″	
	2.	(297° 41′ 20″)	
		(Durchschlagen)	
	3.	(86° 32′ 30″)	
	4.	235° 23′ 0″	55° 23′ 10″
4fach (235° + 360°):		595° 23′ 0″	595° 23′ 20″
		595° 23′ 10″	
Resultat:		148° 50′ 47,5″	

Repetition mit Zwischen-Ablesungen.

Wenn die Zwischen-Ablesungen 1. 2. 3. . . . an beiden Nonien ebenso genau [w]ie die Anfangs- und die End-Ablesungen gemacht sind, so darf man nicht schlecht[h]in nach der Formel (1) rechnen, wenn man nicht einen Teil der Messungen verloren [g]eben will. Die Ausnützung der Zwischen-Ablesungen ist aber schwierig, weil man [d]abei die mittleren Fehler des Zielens und des Ablesens (oder wenigstens deren Ver[h]ältnis) kennen muss. Bei einem zwölfzölligen Theodolit, mit welchem je die fünfte [A]blesung gemacht wurde, rechnete *Bessel* („Gradmessung in Ostpreussen" S. 77) nach [f]olgenden Formeln:

$$\left.\begin{array}{llll}
\text{für } n = 5 & A = \dfrac{a_5 - a_0}{5} \ldots\ldots & \text{Gewicht} = & 1{,}8 \\[2ex]
\;\;\text{„} \;\; n = 10 & A = \dfrac{a_{10} - a_0}{10} \ldots\ldots & \text{„} \quad = & 4{,}8 \\[2ex]
\;\;\text{„} \;\; n = 15 & A = \dfrac{5\,(a_{15} - a_0) + (a_{10} - a_5)}{80} \ldots & \text{„} \quad = & 8{,}2 \\[2ex]
\;\;\text{„} \;\; n = 20 & A = \dfrac{4\,(a_{20} - a_0) + (a_{15} - a_5)}{90} \ldots & \text{„} \quad = & 11{,}7 \\[2ex]
\;\;\text{„} \;\; n = 25 & A = \dfrac{19\,(a_{25} - a_0) + 5\,(a_{20} - a_5) + (a_{15} - a_{10})}{555} & \text{„} \quad = & 15{,}2
\end{array}\right\} \quad (2)$$

Die Begründung dieser Formeln steht im Zusammenhang mit der nachfolgenden [F]ehler-Theorie der Repetitions-Messung. Wir lassen uns jedoch auf die Begründung [d]er vorstehenden Formeln nicht ein, weil, statt der Repetition mit Zwischen-Ablesungen, [e]s vielmehr zu empfehlen ist, nach 5 oder 10 Repetitionen die Messung abzuschliessen, [u]nd unabhängig von neuem zu beginnen.

(Zudem haben sich die Gewichts-Annahmen, welche den vorstehenden *Bessel*-chen Formeln zu Grunde liegen, später durchaus nicht bewährt, wie mitgeteilt wird [i]n der „Gradmessung in Ostpreussen" S. 136—137, und in dem Werk: „Die Königl. [P]reuss. Landes-Triangulation, Haupt-Dreiecke I. Teil" (Berlin 1870) S. 45.)

Fehler-Theorie der Repetitions-Messung.

Es sei α der mittlere Einstell- oder Zielfehler des Fernrohrs und β der mittlere Fehler der Ablesung an der Teilung für das Mittel aus beiden Nonien.

Wenn man einen Winkel einfach misst, indem man links einstellt, dann rechts einstellt, und jedesmal abliest, so kommen hiebei zwei unabhängige Zielfehler α und zwei unabhängige Ablesefehler β in Betracht, und der mittlere Fehler des Winkels ist demnach:

$$M_1 = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \beta^2} = \sqrt{2(\alpha^2 + \beta^2)}$$

Wiederholt man dieses $n$mal unabhängig und nimmt das Mittel, so wird der mittlere Fehler dieses Mittels durch Division mit $\sqrt{n}$ erhalten, also:

$$M_n = \frac{M_1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{2}{n}(\alpha^2 + \beta^2)} \tag{3}$$

Misst man dagegen denselben Winkel durch $n$fache Repetition ohne Zwischen-Ablesungen, so ist die Differenz $a_n - a_0$ zwischen der letzten und ersten Ablesung, behaftet mit den Fehlern von $2n$ Einstellungen, aber nur von 2 Ablesungen. Der mittlere Fehler der Differenz $a_n - a_0$ ist daher:

$$M' = \sqrt{2n\,\alpha^2 + 2\,\beta^2}$$

Aus der Differenz $a_n - a_0$ berechnet man den Winkel α selbst durch Division mit n, und der mittlere Fehler M_r der Repetitions-Messung α wird entsprechend aus M' berechnet:

$$M_r = \frac{M'}{n} = \sqrt{\frac{2}{n}\left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{n}\right)} \tag{4}$$

Die Vergleichung der zwei Ausdrücke (3) und (4) zeigt deutlich, dass der Repetitionsfehler M_r kleiner ist als M_n, und zwar umsomehr, je grösser der Ablesefehler β im Vergleich mit dem Einstellfehler α ist. Da ausserdem bei der Repetition die Arbeit der Zwischen-Ablesungen fortfällt, so ist hiernach die Repetition im Vorzug vor der einfachen Messung.

Um Zahlenwerte einzuführen, braucht man bei (3) nur $\alpha^2 + \beta^2$ zusammen zu bestimmen, während man diese Grössen für die Einführung in (4) getrennt haben muss.

Es sind zwei ältere hierauf bezügliche Untersuchungen vorhanden, nämlich von *Struve*, mitgeteilt in den „Astron. Nachr. 2. Band (1824)" S. 431 - 440, 451—454, 457—464 und von *Bessel* in den „Astr. Nachr. 11. Band (1834)" S. 269—290, sowie „Gradmessung in Ostpreussen" S. 73.

Struve fand den Zielfehler $\alpha = \pm 1{,}06''$ und den Ablesefehler an *einem* Nonius $\beta_1 = \pm 1{,}04''$, also für das Mittel aus beiden Nonien $\beta = \beta_1 : \sqrt{2} = \pm 0{,}74''$.

Bessel fand $\alpha = \pm 0{,}84''$ und $\beta_4 = \pm 1{,}87''$ für das Mittel aus 4 Nonien, also für 2 Nonien: $\beta = \beta_4 \sqrt{2} = \pm 2{,}64''$. (Hiezu gehört die schon oben bei den *Bessel*schen Formeln (2) gemachte Anmerkung über die später erfolgte Änderung dieser Annahmen für α und für β.)

Auch einzelne Resultate von § 57., (3) , (14) , (15) bis (18), S. 176—178, sind zur Vergleichung hier beizuziehen.

Um zu einer summarischen Vergleichung der Genauigkeit der einfachen Winkel-Messung und der Repetitions-Messung zu gelangen, nehmen wir in runden Zahlen

$\alpha = \pm 1''$ und $\beta = \pm 2''$ einschliesslich Teilungsfehler. Damit gehen die Formeln (3) und (4) über in:

$$M_n = \sqrt{\frac{10}{n}} \qquad M_r = \sqrt{\frac{2}{n}\left(1 + \frac{4}{n}\right)} \tag{5}$$

damit erhält man folgende Vergleichung:

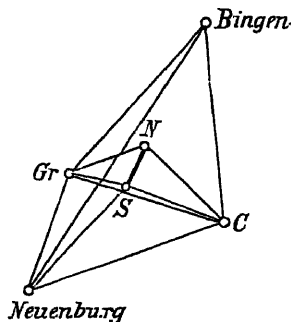
Anzahl:	Mittlerer Winkelfehler	
	n unabhängige Wiederholungen:	n fache Repetition:
$n = 1$	$M_n = \pm 3{,}2''$	$M_r = \pm 3{,}2''$
$n = 5$	$M_n = \pm 1{,}4''$	$M_r = \pm 0{,}9''$
$n = 10$	$M_n = \pm 1{,}0''$	$M_r = \pm 0{,}5''$

(6)

Konstante Fehler der Repetitions-Messung.

Die grosse Genauigkeit der Repetitions-Messung entsprechend der Formel (4) und der Tabelle (6) wird in der Praxis nur teilweise bestätigt. Man hat gefunden, dass die Repetitions-Messung mit kleinen konstanten Fehlern behaftet ist, welche durch die Reibung zwischen dem Limbus und der Alhidade und ähnliche Umstände wohl erklärlich sind.

Im Jahr 1824 hat *Struve* in den „Astr. Nachrichten" 2. Band, S. 434 hierauf aufmerksam gemacht, und als Beispiel mitgeteilt, dass er bei der Repetition *mit* der Teilung und *gegen* die Teilung eine konstante Differenz von etwa 2″ fand.

Fig. 1.
Badisches Basis-Netz.
(Massstab 1 : 400 000.)

Gr. = Griesheim C = Castelberg
Basis SN = 2124,6499 m.

Wir haben diese Sache durch zahlreiche Zusammenstellungen von Repetitions-Messungen der badischen Triangulierung weiter verfolgt.

Die Messungen, welche mit Instrumenten von der Art Fig. III. S. 143 für das Basis-Netz Fig. 1. grösstenteils in der Zeit von 1844—1845 von den Beobachtern *Klose* und *Rheiner* gemacht wurden, sind in der Tabelle S. 183 zusammengestellt. Dabei ist jeder Einzelwert, z. B. 45,28230, selbst wieder ein Mittel aus 2—3 Resultaten je 6facher Repetitionen.

Die Winkel sind in neuer Teilung (Centesimal-Teilung) angegeben.

Mit A und A' sind solche zusammengehörige Winkel bezeichnet, deren Summe = 400 Grad neue Teilung sein soll. Die Abweichung der Summe $A + A'$ gegen 400 Grad zeigt also den doppelten konstanten Repetitions-Fehler.

Standpunkt	Zielpunkte links	Zielpunkte rechts	Repetitions-Messung von links nach rechts A	Repetitions-Messung von rechts nach links A'	Summe $A + A'$ $-400°$
			°	°	
Bingen	C.	Neu.	45,28230	354,71728	— 4,2=
„	N.	Gr.	10,39364	389,60621	— 1,5
„	C.	Gr.	55,67538	344,32392	— 7,0
Castelberg	Neu.	S.	41,54462	358,45503	— 3,5
„	S.	N.	24,81295	375,18736	+ 3,1
„	N.	Bi.	115,41660	284,58272	— 6,8
„	Neu.	N.	66,35745	333,64196	— 5,9
„	N.	Bi.	49,05891	350,94090	— 1,9
„	S.	Bi.	73,87096	326,12807	— 9,7
Neuenburg	Gr.	Bi.	16,13034	383,86965	— 0,1
„	Gr.	S.	27,57810	372,42122	— 6,8
„	S.	C.	27,85187	372,14782	— 3,1
„	Bi.	C.	39,30021	360,69980	+ 0,1
„	Gr.	C.	55,42971	344,56973	— 5,6
„	Bi.	S.	11,44816	388,55170	— 1,4
Griesheim	Bi.	N.	36,04531	363,95495	+ 2,6
„	N.	S.	32,05925	367,94077	+ 0,2
„	S.	N.	105,37100	294,62938	+ 3,8
„	Bi.	S.	68,10403	331,89535	— 6,2
Nördlicher Basis-Endpunkt N.	C.	S.	86,76009	313,23962	— 2,9
	S.	Gr.	54,01913	345,97967	— 12,0
	C.	Gr.	140,78031	259,21974	+ 0,5
Südlicher Basis-Endpunkt S.	Gr.	N.	113,92008	286,07934	— 5,8
	N.	C.	88,42678	311,57228	— 9,4
	Gr.	C.	202,34733	197,65213	— 5,4
„	Neu.	Gr.	67,04999	332,94991	— 1,0
„	Neu.	N.	180,97011	219,02950	— 3,9
					—104,1
					+ 10,3
					— 93,8
				Mittel	— 3,47= — 1,12″ (7)

Unter diesen 27 Fällen ist die Summe $A + A'$ in 21 Fällen negativ und nur 6mal positiv. Der konstante Repetitionsfehler ist für diese Messungen im Mittel nur 0,56″. Misst man, wie bei dem badischen Basis-Netz geschah, alle Winkel in zweifacher Weise, A und A', so ist das Mittel von den konstanten Repetitionsfehlern hinreichend befreit.

Auch ohne weitere Berechnungen zeigen die vorstehenden Zahlenwerte auf einen Blick, welch schöne Resultate durch die Repetitions-Messung erreicht werden können.

Einfluss des Vertikal-Axenfehlers auf die Repetitions-Messung.

Bei der Repetitions-Messung kommen zwei vertikale Axen in Betracht, nämlich die Limbus-Axe und die Alhidaden-Axe. Es hat gewisse Schwierigkeit, diese beiden

Axen genau identisch zu machen, und es entsteht die Frage, ob man die Libellen-Axe rechtwinklig zur einen oder zur andern stellen, und entsprechend bei der Messung die eine oder die andere vertikal machen soll. Wir betrachten diese zwei Fälle getrennt:

1) Die Limbus-Axe ist vertikal. Die Alhidaden-Axe beschreibt im Verlauf der Repetition eine Kegelfläche um die Limbus-Axe, und wenn v der Winkel beider Axen ist, so ist die Neigung der Alhidaden-Axe gegen die Vertikale, worauf es hauptsächlich ankommt, unter allen Umständen $= v$, und wenn man bei der Repetition im ganzen Kreis herumkommt, so nimmt auch das Azimut der Alhidaden-Axe nach und nach jeden Wert an, und es ist deswegen zu vermuten, dass der von diesem Azimut abhängige Einfluss des Fehlers v auf die Resultate der Einzelmessungen verschieden ausfallen wird, so dass er im arithmetischen Mittel nicht einseitig wirken kann.

2) Die Alhidaden-Axe ist am Anfang der Messung vertikal, und die Limbus-Axe, welche mit der Alhidaden-Axe den Winkel v macht, ist somit nicht vertikal. Im Verlaufe der Messung beschreibt die Alhidaden-Axe einen Kegel um die schief stehende Limbus-Axe und nimmt somit nach und nach alle Neigungen zwischen 0 und $2v$ gegen die Vertikale an, es ist also die Maximal-Neigung $2v$ doppelt so gross als die Neigung v beim Falle 1). Ferner kann das Azimut der Alhidaden-Axe nicht alle Werte von 0 bis 360° durchlaufen, sondern nur Werte zwischen einem Intervall von 180°.

Wir stellen eine Berechnung an für den Einfluss des Fehlers v auf die Repetitions-Messung, unter Voraussetzung des unter 1) angegebenen Falles, dass die Limbus-Axe vertikal ist. (Nach *Helmert:* „Über das Vertikal-Axen-System des Repetitions-Theodolits". Zeitschr. f. Verm. 1876 S. 296 und 1877 S. 32.)

Wenn die Limbus-Axe vertikal gestellt wird, so wird die Alhidaden-Axe beim Umdrehen um die vertikale Limbus-Axe eine Kegelfläche beschreiben und stets einen Winkel v mit der wahren Vertikalen bilden. Wird ein Zielpunkt genommen, der den Höhen-Winkel h hat, so ist der zugehörige Projektions-Fehler nach (7) § 53. S. 164:

$$(v) = v \sin u \tan h \tag{8}$$

Dabei ist u der Azimutal-Winkel der Ziellinie, gezählt von der Richtung der grössten Neigung der schiefen Limbus-Ebene (vgl. Fig. 4. § 53. S. 164). Es ändert an der Sache nichts, wenn wir statt u den Komplement-Winkel nehmen:

$$90° - u = \varphi \tag{9}$$

Damit wird (8):

$$(v) = v \tan h \cos \varphi \tag{10}$$

Wird ein zweiter Zielpunkt, rechts vom ersten, genommen, welcher den Höhen-Winkel h' hat, und gegen den ersten Zielpunkt in horizontalem Sinn den Winkel A macht, so ist der dazu gehörige Projektions-Fehler entsprechend (10):

$$(v') = v \tan h' \cos (\varphi + A) \tag{11}$$

Die Differenz der Ausdrücke (10) und (11) ist der Fehler des einfach gemessenen Winkels A, also:

$$\Delta_1 A = v (\cos (\varphi + A) \tan h' - \cos \varphi \tan h) \tag{12}$$

Wird nun repetiert, so erhält man nach und nach folgendes:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_2 A &= v (\cos (\varphi + 2A) \tan h' - \cos (\varphi + A) \tan h) \\ \Delta_3 A &= v (\cos (\varphi + 3A) \tan h' - \cos (\varphi + 2A) \tan h) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Delta_n A &= v (\cos (\varphi + nA) \tan h' - \cos (\varphi + (n-1) A) \tan h) \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Der Fehler ΔA des durch $n$fache Repetition erhaltenen Winkels A ist das arithmetische Mittel:

$$\Delta A = \frac{\Delta_1 A + \Delta_2 A + \Delta_3 A + \dots \Delta_n A}{n} \tag{14}$$

Zur Summierung von (12) und (13) betrachten wir die Summe der ersten Glieder, und die Summe der zweiten Glieder getrennt, und setzen:

$$\Delta A = \frac{v\, S' \, tang\, h' - v\, S\, tang\, h}{n} \tag{15}$$

Zunächst werde die zweite Summe S näher betrachtet, nämlich:

$$S = cos\, \varphi + cos\, (\varphi + A) + cos\, (\varphi + 2\, A) + \dots cos\, (\varphi + [n-1]\, A) \tag{16}$$

Nach Andeutung von Fig. 2. kann man diese Summe S betrachten als die Projektion eines regelmässigen Polygons

(0) (1) (2) (3) . . . (n)

Dieses Polygon, dessen Seiten $(0)(1) = (1)(2) = \dots$ alle $= 1$ gesetzt sind, wird auf die X-Axe eines Coordinaten-Systems projiziert, wobei die erste Seite (0)(1) das Azimut φ hat. Der Centriwinkel ist $= A$, und daraus ergiebt sich für die zweite Seite (1)(2) das Azimut $\varphi + A$, für die dritte Seite $\varphi + 2\, A$ u. s. f.

Fig. 2.
Hilfsfigur zu Gleichung (16).

Da die Sehne $(0)(1) = 1$ gesetzt ist, so ist der Kreishalbmesser $r = \frac{1}{2}\, cosec\, \frac{A}{2}$, und die Sehne (0)($n$) berechnet sich daraus $2\, r\, sin\, \frac{n\, A}{2} = sin\, \frac{n\, A}{2}\, cosec\, \frac{A}{2}$. Das zur Projektion der Sehne (0)(n) erforderliche Azimut dieser Sehne (0)(n) findet sich durch mehrfache Zusammensetzung $= \varphi + (n-1)\, \frac{A}{2}$, folglich ist die Summe (14) nun ausgedrückt durch:

$$S = sin\, n\, \frac{A}{2}\, cosec\, \frac{A}{2}\, cos\left(\varphi + (n-1)\, \frac{A}{2}\right) \tag{17}$$

Dieses gehört zur Summe der zweiten Glieder von (12) und (13). Wir haben in (15) den Faktor für die Summe der ersten Glieder von (12) und (13) entsprechend mit S' bezeichnet und finden, dass S' sich von S nur dadurch unterscheidet, dass überall $\varphi + A$ an Stelle von φ tritt. Es ist also:

$$S' = sin\, n\, \frac{A}{2}\, cosec\, \frac{A}{2}\, cos\left(\varphi + (n+1)\, \frac{A}{2}\right) \tag{18}$$

Nun kann man aus (15) (17) und (18) unser Resultat bilden:

$$\Delta A = \frac{v}{n}\, \frac{sin\, n\, \frac{A}{2}}{sin\, \frac{A}{2}} \left\{ cos\left(\varphi + (n+1)\, \frac{A}{2}\right) tang\, h' - cos\left(\varphi + (n-1)\, \frac{A}{2}\right) tang\, h \right\} \tag{19}$$

Wenn hier $n\, A = 360°$ oder $720°$ u. s. w. ist, d. h. wenn der zu messende Winkel A im ganzen Kreis aufgeht, so dass die Repetition wieder auf den Anfangspunkt zurückkehrt, so wird in (19) in dem Faktor vor der Klammer $sin\, n\, \frac{A}{2} = 0$, also

$\Delta A = 0$; d. h. in diesem Falle (welchem ein *geschlossenes* regelmässiges Polygon Fig. 2. entspricht) wird der Vertikal-Axenfehler v eliminiert.

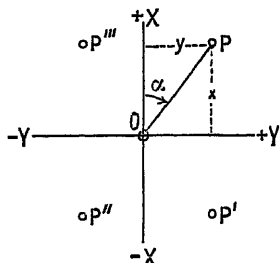
Kapitel VII.

Coordinaten- und Azimut-Rechnung.

§ 59. Erklärungen und Vorbereitungen.

Die Lage eines Punktes in einer Ebene ist bestimmt durch seine rechtwinkligen Coordinaten y und x.

Man giebt den Coordinaten algebraische Vorzeichen $+$ und $-$ zur Unterscheidung der Richtungen, nach welchen sie auf den Coordinaten-Axen abzumessen sind. Z. B. in Fig. 1. hat der Punkt P die Coordinaten $+y$ und $+x$, P' hat $+y$ und $-x$, P'' hat $-y$ und $-x$ u. s. w.

Fig. 1.
Rechtwinkliges Coordinaten-System.

Die *Richtung* eines vom Coordinaten-Ursprung O (Fig. 1.) ausgehenden Strahls OP ist bestimmt durch den Winkel α, um welchen man die $+X$-Axe in dem Sinn von $+X$ über $+Y$ drehen muss, um sie auf jenen Strahl OP zu bringen.

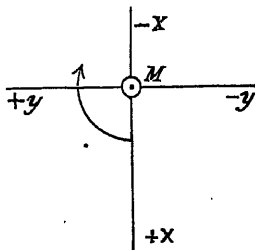
Man nennt diesen Winkel α *Richtungswinkel,* *) oder *ebenes Azimut*; oder auch schlechthin *Azimut* (wenn keine Verwechslung mit dem Azimut der Erdmessung und der Astronomie zu fürchten ist).

Ein Azimut liegt nach dieser Erklärung immer zwischen den Grenzen 0° und 360°; da aber eine Drehung um 360° vorwärts oder rückwärts die Lage eines Strahles nicht ändert, so ist auch die Zufügung eines beliebigen ganzen Vielfachen von $\pm 360°$ zu jedem Azimut gestattet, ohne dass dadurch der Wert des Azimutes für die hier in Frage kommenden Zwecke geändert würde.

In der Landmessung pflegt man ein Coordinaten-System fast immer so zu legen, dass $+x$ nach Norden und $+y$ nach Osten gerichtet ist; und die Azimut-Zählung geht dann von Nord über Ost. **)

Ausserdem kommen für besondere Zwecke auch örtliche Systeme vor, welche gar nicht nach den Himmelsrichtungen gelegt sind, sondern nach irgend welchen an-

Fig. 2.
Badisches Coordinaten-System.

---

*) Bei der preussischen Kataster-Vermessung ist hiefür die Benennung *Neigungswinkel* oder kurz *Neigung* eingeführt.

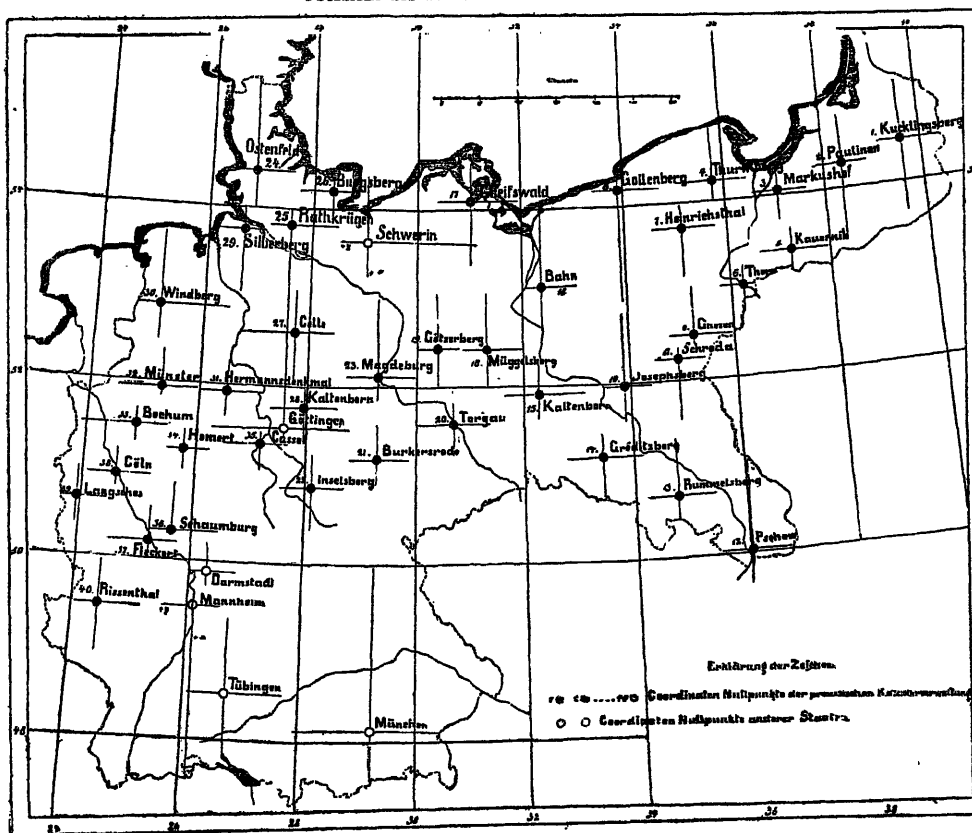
**) Eine Ausnahme hievon macht in Deutschland nur das badische Coordinaten-System Fig. 2., welches mit dem Ursprung Mannheim, $+X$ nach Süden und $+Y$ nach Westen zählt, und entsprechend die Azimute von Süden über Westen.

deren Rücksichten, z. B. $+x$ nach der Hauptverstreckung einer Eisenbahn u. s. w. In solchen Fällen soll man aber doch immer die Axen so legen, dass von $+x$ nach $+y$ die Drehung im Sinne des Uhrzeigers geht, denn dann sind alle unsere Formeln gültig.

Ausgeschlossen ist in der Landmessung die in der analytischen Geometrie gebräuchliche Lage mit $+X$ nach rechts und $+Y$ nach oben, weil hiebei die Drehung von $+X$ nach $+Y$ nicht gleich wäre mit der sonst allgemein als positiv geltenden Drehung im Sinne des Uhrzeigers, nach welcher auch alle Winkel-Messinstrumente geteilt sind.

Die Coordinaten-Systeme des Deutschen Reiches.

Rechtwinklige Coordinaten-Systeme, nicht bloss auf Feld-Marken und Städte, sondern auf ganze Länder mit Hunderten von Quadrat-Meilen ausgedehnt, wurden zuerst in Süddeutschland angelegt, in München, Tübingen, Mannheim, Darmstadt, ferner Kassel, Göttingen, später auch in Preussen mit 40 Systemen*). Alle diese Systeme sind in Fig. 3. zusammengestellt.

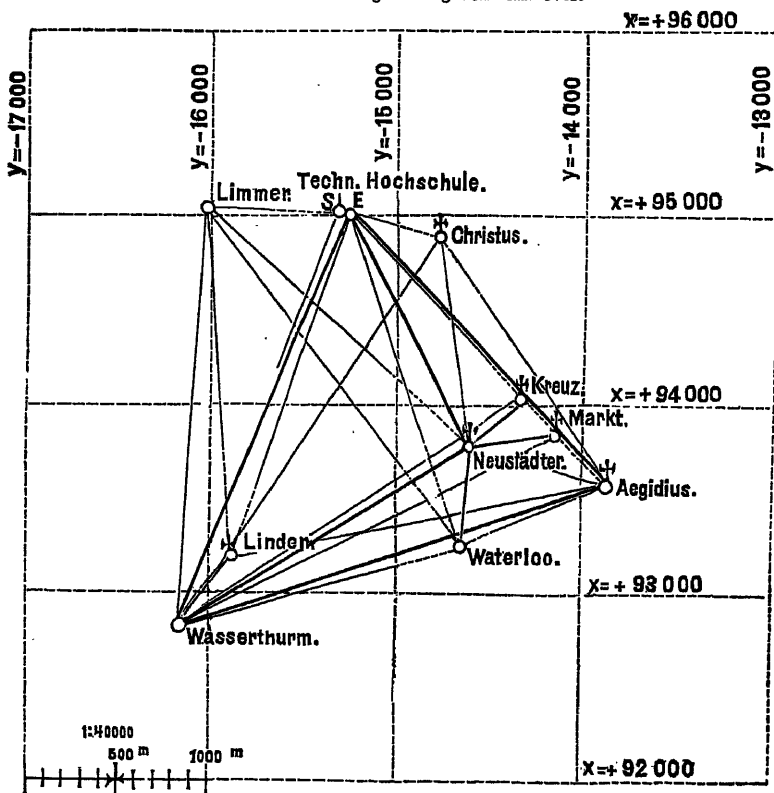
Fig. 3.
Übersicht der deutschen Coordinaten-Systeme.

*) Weiteres über die 40 Preussischen Coordinaten-Systeme ist mitgeteilt in der Anweisung IX. vom 25. Okt. 1881 S. 337—348, vgl. auch „Zeitschr. f. Verm. 1883“ S. 21—22.

Dieses sind allerdings keine *ebenen* Coordinaten-Systeme, weil auf so weite Ausdehnung die Erdkrümmung nicht vernachlässigt werden darf, sondern es ist die Erdkrümmung nach der *Soldner*schen Methode berücksichtigt (mit Ausnahme von Göttingen, welches *Gauss*sche „konforme" Coordinaten hat); indessen in kleinen Bezirken dürfen diese Coordinaten völlig wie ebene Coordinaten behandelt werden.

Die meisten Zahlen-Beispiele in den nachfolgenden Abschnitten dieses Buches beziehen sich auf das althannoversche *Gauss*sche Coordinaten-System mit dem Ursprung Göttingen, $+X$ nach Norden, $+Y$ nach Osten (vgl. Band I. § 60. S. 146). Obgleich dieses Coordinaten-System in seiner Gesamtausdehnung die Erdkrümmung berücksichtigt, können wir doch bei der Triangulierung der Stadt Hannover und deren Umgebung die Coordinaten schlechthin als *ebene* rechtwinklige Coordinaten behandeln, wie in der Folge geschehen wird.

Wir geben in der nachfolgenden Fig. 4. sofort auch eine Übersicht einer Triangulierung von Hannover, welche von uns 1883—1884 für Schul-Zwecke angelegt wurde, mit den zwei von Bd. I. S. 146 und 151 erhaltenen Basis-Punkten:

Ägidius, Turmmitte	$y = -13879{,}79^m$	$x = +93575{,}89^m$
Wasserturm, Flaggenstange	$-16145{,}76$	$-92808{,}28.$

Fig. 4.
Übersicht einer Triangulierung von Hannover.

§ 60. Grundformeln der Coordinaten- und Azimut-Rechnung.

Einige einfache Formeln kommen bei den Berechnungen des Landmessers täglich vor, es kommt darauf an, sich über dieselbe von Anfang völlig klar zu werden.

In Fig. 1. sind zwei Punkte P und P' durch Coordinaten gegeben:

$$\left.\begin{array}{l} P \text{ habe die Coordinaten } y \; x \\ P' \quad " \quad " \quad " \quad y' \; x' \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Fig. 1.

In § 59. S. 186 wurde nur von dem Azimut eines vom Ursprung ausgehenden Strahles gesprochen; man teilt aber auch jedem anderen Strahl ein Azimut zu, und definiert dasselbe so: Wenn von einem Punkte P ein Strahl PP' ausgeht, so erhält man das Azimut dieses Strahles, wenn man durch P einen Strahl PQ parallel und gleichlaufend mit der $+X$-Axe zieht, und denselben im positiven Sinn so lange dreht, bis er mit dem Strahl PP' zusammenfällt. Der Betrag dieser Drehung ist das Azimut des Strahles PP'.

Da durch zwei Punkte *zwei* Strahlen bestimmt sind, giebt es auch zwei entsprechende Azimute. In Fig. 1. ist angedeutet:

$$\left.\begin{array}{l} \text{der Strahl von } P \text{ nach } P' \text{ hat das Azimut } \alpha \\ \quad " \quad " \quad " \quad P' \quad " \quad P \quad " \quad " \quad " \quad \alpha' \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Die Azimute α und α' eines Strahls und seines Gegenstrahls unterscheiden sich immer um 180°, d. h.:

$$\alpha' = \alpha \pm 180° \qquad (3)$$

Die Willkür $+180°$ oder $-180°$ stimmt mit der Thatsache, dass eine Drehung um 360° die Lage eines Strahles nicht ändert. In den Azimut-Rechnungen sind die folgenden, algebraisch sonderbar aussehenden, Gleichungen gültig:

$$+180° = -180° \quad , \quad +360° = 0 \quad , \quad -360° = 0 \qquad (4)$$

Häufig bezeichnen wir ein Azimut durch zwei Buchstaben in einer Klammer, z. B. ist (PP') das Azimut des von P nach P' gehenden Strahles, und $(P'P)$ das Azimut des von P' nach P gehenden Strahles. Dabei ist wieder:

$$(PP') = (P'P) \pm 180° \qquad (5)$$

In Fig. 1. sind die Azimute zweifach bezeichnet, es ist:

$$(PP') = \alpha \qquad (P'P) = \alpha' \qquad (6)$$

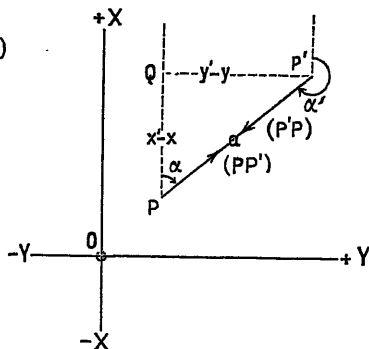
Zugleich beziehen sich die Pfeil-Zeichen auf die Richtung, in welcher die Azimute gelten.

Auch die Entfernung beider Punkte P und P', welche man sonst mit PP' bezeichnet, ist in Fig. 1. nochmals besonders mit a benannt.

Nach diesen Erklärungen entnehmen wir aus Fig. 1. folgende zwei Gleichungen:

$$y' - y = a \sin \alpha \qquad x' - x = a \cos \alpha \qquad (7)$$

oder mit Anwendung der zweiten Bezeichnungs-Art:

$$y' - y = PP' \sin (PP') \qquad x' - x = PP' \cos (PP') \qquad (7')$$

Diese Gleichungen haben allgemeine Gültigkeit für alle Fälle der Vorzeichen von $y'-y$ und $x'-x$ und des Quadranten von α, bzw. (PP'), wenn die Entfernung a bzw. PP' immer positiv genommen wird, und wenn *sin* und *cos* in den 4 Quadranten mit ihren Vorzeichen gezählt werden, nämlich:

	Quadrant			
	I	*II*	*III*	*IV*
sin	+	+	—	—
cos	+	—	—	+

Beispiele hiefür:

I. Quadrant 0° bis 90°	*II.* Quadrant 90° bis 180°
$\sin 25° = +\sin 25°$	$\sin 108° = +\cos 18°$
$\cos 25° = +\cos 25°$	$\cos 108° = -\sin 18°$
III. Quadrant 180° bis 270°	*IV.* Quadrant 270° bis 360°
$\sin 220° = -\sin 40°$	$\sin 307° = -\cos 37°$
$\cos 220° = -\cos 40°$	$\cos 307° = +\sin 37°$

Durch Umkehrung der Strahlen-Richtung kann man aus Fig. 1. S. 189 auch noch folgende weitere Gleichungen entnehmen:

$$y-y' = a \sin \alpha' \qquad x-x' = a \cos \alpha' \qquad (8)$$

oder:

$$y-y' = P'P \sin (P'P) \qquad x-x' = P'P \cos P'P \qquad (8')$$

Wir nehmen hiezu ein Zahlen-Beispiel nach Fig. 4. § 59. S. 188:

Gegeben sind die Coordinaten des Punktes

Technische Hochschule, Eisenplatte E, $y = -15\,266{,}91^m$ $x = +95\,002{,}25^m$ (9)

Die Entfernung von E nach der Waterloo-Säule ist: $a = 1851{,}02^m$ (10)

Das Azimut von E nach der Waterloo-Säule: $\alpha = 160°\,46'\,46''$ (11)

Gesucht sind die Coordinaten y' und x' der Waterloo-Säule.

	$\log a$	3.267 411	$\log a$	3.267 411
	$\log \sin \alpha$	9.517 467	$\log \cos \alpha$	9.975 091 n
	$\log a \sin \alpha$	2.784 878	$\log a \cos \alpha$	3.242 502 n
	$a \sin \alpha =$	+ 609,37	$\log a \cos \alpha =$	— 1747,84 (12)
Hiezu (9):	$y =$	— 15 266,91	$x =$	+ 95 002,25
Waterloo:	$y' =$	— 14 657,54^m	$x' =$	+ 93 254,41^m (13)

Die Umkehrung dieser Aufgabe in allgemeinen Zeichen ist:

Es sind die Coordinaten zweier Punkte gegeben:

Punkt P mit Coordinaten y und x \
„ P' „ „ y' „ x' } (14)

Es soll das Azimut von P nach P', d. h. $(PP') = \alpha$, und die Entfernung $PP' = a$ berechnet werden.

Hiezu geben die Gleichungen (7):

$$\tan \alpha = \frac{y'-y}{x'-x} \qquad (15)$$

$$a = \frac{y'-y}{\sin \alpha} \quad \text{oder} \quad a = \frac{x'-x}{\cos \alpha} \qquad (16)$$

Diese einfachen Gleichungen veranlassen zu verschiedenen Überlegungen:

Die Gleichung (15) an und für sich ist für α *zweideutig*, denn wenn irgend ein Wert α der Gleichung genügt, so genügt auch der Wert $\alpha \pm 180°$ derselben Gleichung (15).

Es besteht aber in den zwei Gleichungen (16) eine Nebenbedingung, nämlich, dass die Entfernung a stets positiv aus den beiden Gleichungen (16) hervorgehen soll, dass also $\sin \alpha$ das Vorzeichen von $y' - y$ und $\cos \alpha$ das Vorzeichen von $x' - x$ haben muss.

Man leitet hieraus die mechanische Regel ab:

$$\left.\begin{array}{lcccc} \alpha \text{ liegt im Quadranten:} & I & II & III & IV \\ \text{wenn der Bruch } \dfrac{y'-y}{x'-x} \text{ die Vorzeichen hat:} & \dfrac{+}{+} & \dfrac{+}{-} & \dfrac{-}{-} & \dfrac{-}{+} \end{array}\right\} \quad (17)$$

(Vgl. hiezu auch die Anmerkung I. am Schlusse dieses §.)

Hiernach berechnen wir die Umkehrung des Beispiels (9) bis (13), nach den Formeln (15) und (16):

Es sind die Coordinaten der technischen Hochschule und der Waterloo-Säule gegeben; es soll das Azimut und die Entfernung von Techn. Hochschule nach Waterloo-Säule berechnet werden:

Punkt jenseits: P' Waterloo-Säule	$y' = -14\,657{,}54$		$x' = +93\,254{,}41$
„ „ P Techn. Hochsch.	$y = -15\,266{,}91$		$x = +95\,002{,}25$
Differenzen:	$y' - y = +609{,}37$		$x' - x = -1747{,}84$ (18)

$$\begin{array}{ll} \log\,(y'-y) & 2.784\,881 \\ \log\,(x'-x) & 3.242\,502\,n \\ \hline \log\,\operatorname{tang}\alpha & 9.542\,379\,n \end{array} \qquad (19)$$

Ehe man hiezu α aufsucht, überlegt man den Quadranten nach (17). Wir haben diesesmal:

$$\frac{y'-y}{x'-x} = \frac{+}{-}\,, \quad \text{also den } II. \text{ Quadranten.}$$

Hier ist α zu betrachten als $90° + \alpha'$, wenn α' ein spitzer Winkel ist. Man geht mit 9.542 379 in die *Cotang*-Spalte der Tafel ein und findet daselbst: $\alpha' = 70°\ 46'\ 46''$, also:

$$\alpha = 90° + \alpha' = 160°\ 46'\ 46'' \qquad (20)$$

Die Weiterrechnung nach den *beiden* Formeln (16) giebt:

$$\begin{array}{ll} \log\,(y'-y) & 2.784\,881 \\ \log \sin\alpha & 9.517\,467 \\ \hline \log a & 3.267\,414 \\ a = 1851{,}04^m & \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \log\,(x'-x) & 3.242\,502\,n \\ \log \cos\alpha & 9.975\,091\,n \\ \hline \log a & 3.267\,411 \\ a = 1851{,}02^m & \end{array} \qquad \begin{array}{r} \\ \\ (21) \\ (22) \end{array}$$

Diese beiden Resultate stimmen nicht genau überein; das zweite $a = 1851{,}02^m$ ist das schärfere.

Dieses giebt zu einer weiteren Betrachtung Veranlassung:

Von den beiden Funktionen $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ ist hier immer eine erheblich genauer, und zugleich bequemer, als die andere, nämlich diejenige, welche in der Logarithmen-Tafel *rechts* steht, und diese gehört immer zum *grösseren* der beiden Werte $y' - y$ und $x' - x$.

D. h. also: man rechnet die Hypotenuse a genauer und bequemer aus der *grösseren* Kathete $y' - y$ oder $x' - x$. Dieses ist an und für sich sehr begreiflich, und wird so bewiesen:

Unsere trigonometrischen Tafeln haben folgende Einrichtung:

links *log sin*	*log tang*	*log cotg*	*rechts* *log cos*
. . .	. . .	. . .	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .
log cos	*log cotg*	*log tang*	*log sin*

Die Spalte *rechts* ist *cos* oder *sin*, je nachdem die Überschrift oder die Unterschrift gilt, oder je nachdem der Winkel α kleiner als 45° oder grösser als 45° ist, d. h. wenn $y'-y < x'-x$ oder $y'-y > x'-x$. Man soll also mit *cos* rechnen, wenn $x'-x$ das grössere; und mit *sin*, wenn $y'-y$ das grössere ist.

Um die Wahl *sin* oder *cos* von vornherein unbestimmt zu lassen, lassen wir zwischen $\log\sin\,(y'-y)$ und $\log\sin\,(x'-x)$ zunächst eine Linie frei, und füllen dieselbe nachher mit der dekadischen Ergänzung von Spalte rechts aus, unbekümmert, ob das *sin* oder *cos* ist, und nehmen das dann zu dem grösseren der beiden darüber und darunter stehenden Logarithmen.

Die Ausrechnung des vorigen Beispiels nach dieser Anordnung gestaltet sich so:

Punkt jenseits P' Waterloo-Säule	$y' = -14\,657{,}54$	$x' = +93\,254{,}41$
„ diesseits P Techn. Hochschule	$y = -15\,266{,}91$	$x = +95\,002{,}25$
Differenzen	$y'-y = +609{,}37$	$x'-x = -1747{,}84$ (23)

$\log\,(y'-y)$	2.784 881	
Ergänzung $\log\,(\sin\alpha$ oder $\cos\alpha)$	0.024 909	zum grösseren, giebt $\log a$
$\log\,(x'-x)$	3.242 502 *n*	
$\log tang\,\alpha$	9.542 379 *n*	$\alpha = 160°\ 46'\ 46''$ (24)
$\log a$	3.267 411	$a = 1851{,}02^m$ (25)

Dieses stimmt mit (20), (21) und (22), wie es sein soll.

Wenn es sich um Entfernungen allein, ohne Azimute handelt, so kann man auch nach der Formel rechnen:

$$a = \sqrt{(y'-y)^2 + (x'-x)^2} \tag{26}$$

welche durch Quadrieren und Addieren von (7) entsteht, oder auch unmittelbar aus Fig. 1. S. 189 abgelesen werden kann. Dabei ist vorausgesetzt, dass man eine Quadrattafel zur Verfügung habe, denn andernfalls ist die logarithmische Rechnung mit dem Azimut als Hilfswinkel vorzuziehen.

Kontroll-Rechnung für das Azimut.

Bei der Preussischen Kataster-Vermessung ist folgende Kontroll-Rechnung der Azimute im Gebrauch:

$$tang\,\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (\text{wobei } \Delta y = y'-y \text{ und } \Delta x = x'-x)$$

$$tang\,(45°+\alpha) = \frac{tang\,45° + tang\,\alpha}{1 - tang\,45°\,tang\,\alpha} = \frac{1+tang\,\alpha}{1-tang\,\alpha}$$

$$tang\,(45°+\alpha) = \frac{1+\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}{1-\dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{\Delta x + \Delta y}{\Delta x - \Delta y}$$

Für das vorstehende Beispiel (23) giebt dieses:

$$
\begin{array}{rll}
x' - x = \varDelta x = -1747{,}84 & & \\
y' - y = \varDelta y = +\ \ 609{,}37 & & \\
\hline
\varDelta x + \varDelta y = -1138{,}47 & \log\,(\varDelta x + \varDelta y) & 3.056\,322\,n \\
\varDelta x - \varDelta y = -2357{,}21 & \log\,(\varDelta x - \varDelta y) & 3.372\,398\,n \\
\cline{2-3}
 & \log tang\,(45^\circ + \alpha) & 9.683\,924
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
45^\circ + \alpha &= 205^\circ\, 46'\, 46'' \\
\alpha &= 160^\circ\, 46'\, 46''
\end{aligned} \qquad (27)
$$

Dieses stimmt mit (24), wie es sein soll.

Diese Probe ist in manchen Fällen erwünscht, indessen werden dadurch die Subtractionen $y' - y = \varDelta y$ und $x' - x = \varDelta x$ nicht controlliert.

Anmerkungen.

I. Um bei der Azimut-Rechnung nach der Formel (15) S. 190 mit der Regel (17) S. 191 ganz sicher zu gehen, haben wir folgende Hilfs-Regeln für das Gedächtnis gebildet:

1) Hat man in dem Bruch $\frac{y' - y}{x' - x}$ die Vorzeichen $\frac{+}{+}$, so liegt (PP') im ersten Quadranten und Alles ist einfach.

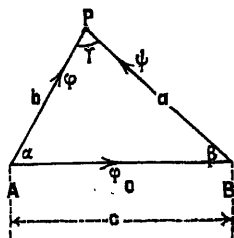
2) Hat man die Vorzeichen $\frac{-}{-}$, so liegt (PP') im dritten Quadranten, man verfährt dann zuerst wie bei 1), und schlägt zu dem so erhaltenen Wert 1) noch 180° zu.

3) Hat man $\frac{+}{-}$ oder $\frac{-}{+}$, so schlägt man jedenfalls den fraglichen Logarithmus als *log cotang* auf, statt als *log tang*, wie seine Benennung zunächst verlangen würde. Zu dem so erhaltenen Winkelwert addiert man noch Neunzig oder Zweihundertundsiebzig Grade, je nachdem das Zeichen — im Nenner oder im Zähler des Bruches $\frac{y' - y}{x' - x}$ stand.

Dieses giebt folgende Tabelle:

Gerade Fälle:	$\frac{+}{+}$	$\frac{-}{-}$	*Ungerade Fälle:*	$\frac{+}{-}$	$\frac{-}{+}$
tang bleibt, Zuschlag von	0°	180°	*tang* geht über in *cotang*, Zuschlag von	90°	270°
			— im Nenner giebt Neunzig Grad — im Zähler giebt Zweihundertsiebzig Grad.		

II. Wenn man veranlasst ist, eine Figur mit eingeschriebenen Bezeichnungen für Winkel und Azimute zu benützen, so nimmt man für die Winkelhervorhebung bekanntlich Bogenstücke; die Azimute kann man zwar auch so bezeichnen, z. B. in Fig. 1. S. 189 sind auf diese Weise die Azimute $(PP') = \alpha$ und $(P'P) = \alpha'$ angedeutet. Sobald man aber einigermassen mit den Azimut-Rechnungen vertraut ist, nimmt man die einfachere und übersichtlichere Bezeichnung durch Pfeile. Z. B. in nebenstehender Fig. 2. (welche von Band I. S. 303 wieder hergesetzt ist) sind die Azimute von A nach P mit φ und von B nach P mit ψ durch Pfeile hervorgehoben, und man kann daraus unmittelbar z. B. folgende Gleichungen ablesen:

Fig. 2.

$$y_p = y_a + b \sin \varphi \text{ oder } = y_b + a \sin \psi$$
$$x_p = x_a + b \cos \varphi \text{ oder } = x_b + a \cos \psi$$
$$\psi = (BP) = (BA) + \beta$$
$$\varphi = (AP) = (AB) - \alpha$$
$$\gamma = (PA) - (PB)$$
$$= (\varphi \pm 180^\circ) - (\psi \pm 180^\circ) = \varphi - \psi \quad \text{u. s. w.}$$

Die Coordinaten selbst braucht man nicht in die Figur einzuzeichnen.

Es ist übrigens von grosser Wichtigkeit, die Rechnungen mit Coordinaten und Azimuten von dem Anblick einer Figur möglichst unabhängig zu machen, obgleich natürlich der Anfänger sehr wohl daran thut, eine Figur aufzuzeichnen, sei es mit dem Maassstab und Transporteur, oder wenigstens nach nahezu richtigen Verhältnissen, so dass die Vorzeichen der Coordinaten-Differenzen, die Quadranten der Azimute, und Ähnliches, controlliert werden können.

Die Formeln gelten aber ganz allgemein für alle in einer Figur darstellbaren Verhältnisse, und erst wenn bei den häufig vorkommenden Rechnungen das Gängelband der jeweiligen Figurenaufzeichnung abgeworfen ist, kann von Rechenpraxis die Rede sein. Dagegen ist natürlich ein Uebersichtsnetz für jede grössere polygonometrische und trigonometrische Messung nötig, woraus der Zusammenhang der Züge und der Dreiecke ersehen wird, und welches zeigt, was überhaupt zu rechnen ist.

III. *Logarithmentafeln.* Zu den Berechnungen der Feld- und Landmessung braucht man eine fünfstellige und eine sechsstellige logarithmisch-trigonometrische Tafel, eine siebenstellige Tafel ist hier selten erforderlich. Eine vierstellige Tafel ist für kleine Nebenrechnungen nützlich.

Während an fünfstelligen Tafeln kein Mangel ist, haben wir nur *eine* bequeme sechsstellige Tafel (für alte Teilung), nämlich „Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit sechs Decimalstellen von *Bremiker*, Berlin," welche sehr zu empfehlen ist.

Vor 10—20 Jahren war siebenstellige logarithmische Rechnung allgemein üblich, auch in Fällen, wo 6 und 5 Stellen ausreichten. Die Reaction gegen solche Ziffernverschwendung ist aber jetzt teilweise ins Gegenteil umgeschlagen, und es wird die fünfstellige Rechnung teilweise zu sehr gepflegt. Man soll in der Rechnung in der Regel eine Stelle mehr führen, als der sachlichen Genauigkeit der einzelnen Zahl entspricht, und deswegen ist z. B. Triangulierung immer mindestens sechsstellig zu rechnen.

IV. *Rechenformulare.* Für alle grösseren Berechnungen ist die Benützung vorgedruckter Formulare sehr nützlich.

Alle Behörden haben solche Schemate im Gebrauch, und in grossen Vermessungen sind dieselben der Ordnung wegen unerlässlich. Es ist darin jeder Zahl und jedem Logarithmus zum Voraus sein bestimmter Platz angewiesen.

Für eigene Zwecke kann man sich leicht solche Schemate durch Autographie herstellen. (Liniierung und Druck am besten *roth* auf weissem Papier, damit sich die schwarze Schrift gut abhebt, wie z. B. neuerdings bei der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme.)

Gute Rechenschemate entstehen aus langjähriger Rechenpraxis.

Die Preussische Kataster-Verwaltung hat 24 Formulare im Format 22 × 36 cm, welche auch öffentlich zu haben sind, von der *Reichsdruckerei* zu Berlin, S. W. Oranienstrasse 90/91. (100 Bogen = 1,80 *M*, Mindestabgabe 25 Bogen.)

Diese Formulare wurden eingeführt und werden durch Beispiele und Regeln erklärt in der „Anweisung IX. vom 25. Oktober 1881“ (vgl. Zeitschr. f. Verm. 1884, S. 19—35).

§ 61. Umformung der Coordinaten.

Fig. 1. Umformung der Coordinaten.

In Fig. 1. ist zunächst ein Coordinaten-System X, Y gegeben und in demselben ein Punkt A mit den Coordinaten $x = a$, $y = b$. Dieser Punkt A wird als Ursprung eines neuen Systems X', Y' genommen, wobei die $+X'$-Axe das Azimut ε im alten System hat.

Wenn nun irgend ein Punkt die Coordinaten x, y im alten System und die Coordinaten x', y' im neuen System hat, so bestehen (wie die analytische Geometrie beweist), folgende Gleichungen:

$$y = b + x' \sin\varepsilon + y' \cos\varepsilon \qquad (1)$$
$$x = a + x' \cos\varepsilon - y' \sin\varepsilon \qquad (2)$$

Die Auflösung dieser Gleichungen nach y' und nach x' giebt:

$$y' = (y - b)\cos\varepsilon - (x - a)\sin\varepsilon \qquad (3)$$
$$x' = (y - b)\sin\varepsilon - (x - a)\cos\varepsilon \qquad (4)$$

Wir machen hiezu folgende Anwendung, mit Fig. 2.:

Die Punkte A und B sind durch ihre Coordinaten gegeben:

Punkt A. $\quad y_a = +43\,112{,}24 \qquad x_a = -47\,215{,}57 \qquad (5)$

Punkt B. $\quad y_b = +43\,064{,}22 \qquad x_b = -47\,083{,}19 \qquad (6)$

Fig. 2.

Die Linie AB hat als Aufnahmslinie einer Stückvermessung gedient, und dabei wurde der Punkt P bestimmt durch:

$$AQ = x' = +21{,}24 \qquad QP = 16{,}29\ ,\ y' = -16{,}29 \qquad (7)$$

Es sollen die Coordinaten x und y des Punktes P im ursprünglichen System berechnet werden.

Hiezu berechnet man zuerst aus (5) und (6):

$$\operatorname{tang}(AB) = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \qquad (AB) = \varepsilon = 340^\circ\, 3'\, 44'' \qquad (8)$$

In (1) und (2) ist zu nehmen aus (5):

$$b = +43\,112{,}24 \qquad a = -47\,215{,}57 \qquad (9)$$

Setzt man dieses (9) nebst (8) und (7) in (1) und (2), so findet man:

Punkt P. $\quad y = +43\,089{,}68 \qquad x = -47\,201{,}16 \qquad (10)$

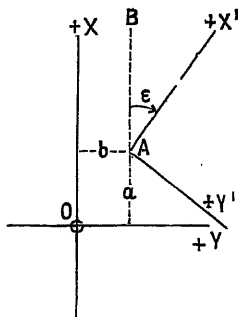
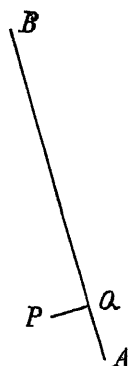
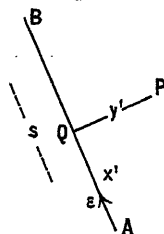
Wir haben hiebei unmittelbar nach den Formeln (1) und (2) gerechnet, man kann aber auch statt des Azimutes ε die Entfernung s einführen, denn es ist nach Fig. 3:

$$\sin\varepsilon = \frac{y_b - y_a}{s} \qquad \cos\varepsilon = \frac{x_b - x_a}{s}$$

Fig. 3.

also nach (1) und (2) mit Fig. 3.:

$$y = y_a + \frac{x'}{s}(y_b - y_a) + \frac{y'}{s}(x_b - x_a) \qquad (11)$$
$$x = x_a + \frac{x'}{s}(x_b - x_a) - \frac{y'}{s}(y_b - y_a) \qquad (12)$$

Ob man hiernach oder unmittelbar nach (1) und (2) rechnen will, wird davon abhängen, ob man das Azimut $(AB) = \varepsilon$ oder die Entfernung $AB = s$ näher zur Hand hat.

dem Falle unseres vorstehenden Beispiels (5)—(10) ist $log\, s = 2.148\,664$, an dieselben Resultate wie (10) bekommt (vgl. hiezu *F. G. Gauss*, die Tei- Grundstücke, S. 8).

Bestimmung von a, b und ε zur Verbindung zweier Systeme.

s seien zwei Punkte P_1 und P_2 in beiden Coordinatensystemen durch Co- gegeben; es sollen daraus die Constanten a, b und ε der Umwandlungsformeln (2) berechnet werden.

en beiden Punkten entsprechen nach (1) und (2) folgende Gleichungen:

Punkt P_1 — Punkt P_2

$$\left.\begin{array}{ll} y_1 = b + x_1' \sin\varepsilon + y_1' \cos\varepsilon & y_2 = b + x_2' \sin\varepsilon + y_2' \cos\varepsilon \\ x_1 = a + x_1' \cos\varepsilon - y_1' \sin\varepsilon & x_2 = a + x_2' \cos\varepsilon - y_2' \sin\varepsilon \end{array}\right\} \quad (13)$$

urch Subtraction findet man:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 - y_2 = (x_1' - x_2') \sin\varepsilon + (y_1' - y_2') \cos\varepsilon \\ x_1 - x_2 = (x_1' - x_2') \cos\varepsilon - (y_1' - y_2') \sin\varepsilon \end{array}\right\} \quad (14)$$

iese zwei Gleichungen kann man nach $\sin\varepsilon$ und $\cos\varepsilon$ auflösen:

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{(y_1 - y_2)(x_1' - x_2') - (x_1 - x_2)(y_1' - y_2')}{r^2} & \text{wo } r^2 = (y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 \\ \frac{(x_1 - x_2)(x_1' - x_2') + (y_1 - y_2)(y_1' - y_2')}{r^2} & \text{oder } r^2 = (y_1' - y_2')^2 + (x_1' - x_2')^2 \end{array}\right\} (15)$$

urch Division findet man auch $tang\,\varepsilon$, und durch weitere goniometrische Um- überzeugt man sich, dass ε eine Azimut-Differenz ist, nämlich:

$$\varepsilon = (P_1\, P_2) - (P_1'\, P_2') \quad (16)$$

$$tang\,(P_1\, P_2) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad tang\,(P_1' P_2') = \frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'} \quad (17)$$

iese geometrisch zu deutende Auflösung hätte man unmittelbar wählen können; ien es wenigstens theoretisch nützlich, auch die Entwicklung (14) und (15) ; zudem kann die Berechnung von ε aus (15) als Probe benützt werden.

achdem ε gefunden ist, hat man auch a und b zweifach aus (14).

ls Beispiel für solche Coordinaten-Umwandlung können wir die Vermessung nover nehmen. Das alte von *Gauss* angelegte System mit dem Ursprung n wurde später in 31 Einzelsysteme zerlegt, wobei die Verdrehung ε in jedem gleich der Meridian-Convergenz des neuen Ursprungs gegen Göttingen wurde. am auch noch eine von der *Gauss*schen conformen Projection herrührende sänderung v in Betracht, so dass z. B. für die Stadt Hannover, mit dem rsprung Osterwald, die Coordinaten-Umwandlung sich so gestaltet:

$$\left.\begin{array}{l} \text{und } x \quad \textit{Gauss}\text{sche Coordinaten mit dem Ursprung Göttingen} \\ \text{und } x' \quad \text{Hannoversche Stadt-Coordinaten mit dem Ursprung Osterwald} \\ = 0^\circ\ 17'\ 14{,}226'' = \text{Meridian-Convergenz} \\ = \text{Vergrösserungs-Verhältnis in Osterwald} \\ = -24\,622{,}61 \qquad a = +103\,661{,}85 \text{ Coordinaten von Osterwald.} \end{array}\right\} (18)$$

$$\left.\begin{array}{l} = (y - b)\frac{\cos\varepsilon}{v} - (x - a)\frac{\sin\varepsilon}{v} \\ = (y - b)\frac{\sin\varepsilon}{v} + (x - a)\frac{\cos\varepsilon}{v} \end{array}\right\} (19)$$

$$\left.\begin{array}{l} - b = \quad y' v \cos\varepsilon + x' v \sin\varepsilon \\ - a = - y' v \sin\varepsilon + x' v \cos\varepsilon \end{array}\right\} (20)$$

Hiebei ist:

$\log \sin \varepsilon$	7.700 1885.0	$\log \cos \varepsilon$	9.999 9945·2	
$\log v$	0.000 0032·3	$\log v$	0.000 0032·3	
$\log \frac{\sin \varepsilon}{v}$	7.700 1852·7	$\log \frac{\cos \varepsilon}{v}$	9.999 9912·9	(21)
$\log v \sin \varepsilon$	7.700 1917·3	$\log v \cos \varepsilon$	9.999 9977 5	(22)

Zu einem Zahlenbeispiel nehmen wir den Ägidius-Turm in Hannover. Derselbe hat in zwei Systemen folgende Coordinaten:

Ursprung Göttingen, Ägidius $y = -13879{,}79^m \quad x = +93575{,}89^m$ (23

Ursprung Osterwald, „ $y' = +10793{,}18^m \quad x' = -10031{,}89^m$ (24)

Bei der Berechnung nach (19) und (20) mit den Constanten (18), (21) und (22) wird man die Werte (23) und (24) in Übereinstimmung finden.

§ 62. Bogen-Schnitt.

Fig. 1.
Bogen-Schnitt.

In Fig. 1. sind zwei Punkte A und B fest gegeben, und ein dritter Punkt P wird festgelegt durch Messung der zwei Entfernungen $AP = b$ und $BP = a$. In der Zeichnung beschreibt man Kreisbögen um A und B mit den Halbmessern b und a und erhält P als Schnitt dieser Kreisbögen.

In der Rechnung gestaltet sich die Aufgabe so:

Zwei Punkte A und B sind durch ihre Coordinaten gegeben, ein dritter Punkt P wird bestimmt durch die beiden Entfernungen $AP = b$ und $BP = a$; es sollen die Coordinaten $x\, y$ von P berechnet werden.

Da die Seite $AB = c$ aus den Coordinaten von A und B berechnet werden kann, hat man alle drei Seiten $c\ a\ b$ des Dreiecks, kann daraus die Winkel berechnen:

$$\tan g \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \quad \text{wo} \quad s = \frac{a+b+c}{2}$$

und entsprechend für β und γ.

Dann kann man weiter wie bei Triangulierung (§ 65.) verfahren.

Eine zweite Lösung ist folgende (nach *F. G. Gauss*, die Teilung der Grundstücke, Berlin 1878, S. 8 und Anweisung IX. vom 25. Okt. 1881, Formular 15. S. 289):

Nach Fig. 1. ist:

$$b^2 = h^2 + p^2 \qquad a^2 = h^2 + q^2$$

folglich:

$$p^2 - q^2 = b^2 - a^2 \tag{1}$$

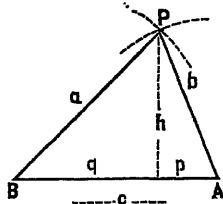
$$\text{oder} \quad (p-q)(p+q) = (b-a)(b+a) \quad \text{und} \quad p+q = c$$

also:

$$\left.\begin{aligned} \frac{p+q}{2} &= \frac{c}{2} \\ \frac{p-q}{2} &= \frac{(b+a)(b-a)}{2c} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

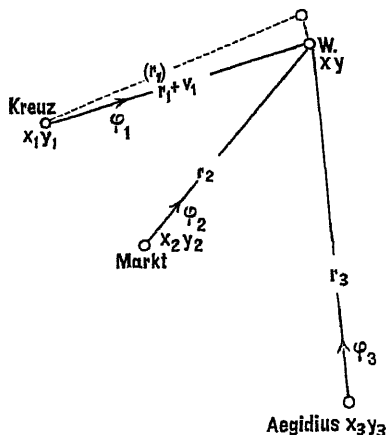
Hieraus p und q selbst, und dann h mit Probe:

$$h = \sqrt{b^2 - p^2} \quad \text{oder} \quad = \sqrt{a^2 - q^2} \tag{3}$$

Mit p und h ist nun der Punkt P durch rechtwinklige Coordinaten gegen AB festgelegt, und es gelten daher für die Coordinaten x und y des Punktes P dieselben

Formeln, welche im vorigen § 61. (11) und (12) mit anderen Bezeichnungen aufgestellt sind, d. h. mit Übergang zu unseren neuen Bezeichnungen in Fig. 1. S. 197 haben wir:

$$y = y_a + \frac{p}{c}(y_b - y_a) + \frac{h}{c}(x_b - x_a) \tag{5}$$

$$x = x_a + \frac{p}{c}(x_b - x_a) - \frac{h}{c}(y_b - y_a) \tag{6}$$

Fig. 2.
Bogen-Schnitt mit Ausgleichung.

Bogen-Schnitte mit Ausgleichung.

Häufig hat man mehr als zwei Entfernungen gemessen, und dann tritt Ausgleichung ein.

In Fig. 2. seien die drei Punkte *K.* *M.* und *A.* durch Coordinaten gegeben, und der Punkt *W.* wird festgelegt durch Messen der drei Entfernungen r_1 r_2 r_3.

x_0, y_0 seien Näherungs-Coordinaten von *W.*; x, y die endgültigen Coordinaten, δx und δy seien die Verbesserungen, also:

$$x = x_0 + \delta x \qquad y = y_0 + \delta y \tag{7}$$

Bezeichnet man ferner mit (r_1) die Entfernung des Näherungspunktes von *K.* (Kreuz) und mit v_1 die Verbesserung der gemessenen Entfernung r_1, so bestehen die Gleichungen:

$$(r_1)^2 = (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 \tag{8}$$

$$(r_1 + v_1)^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x_0 - x_1 + \delta x)^2 + (y_0 - y_1 + \delta y)^2$$

$$(r_1 + v_1)^2 = (x_0 - x_1)^2 + 2\,\delta x\,(x_0 - x_1) + (y_0 - y_1)^2 + 2\,\delta y\,(y_0 - y_1)$$

Hiebei sind $(\delta x)^2$ und $(\delta y)^2$ vernachlässigt. Weiter wird, wegen (8):

$$(r_1 + v_1)^2 = (r_1)^2 + 2\,\delta x\,(x_0 - x_1) + 2\,\delta y\,(y_0 - y_1)$$

$$= (r_1)^2 \left(1 + 2\,\delta x \frac{x_0 - x_1}{(r_1)^2} + 2\,\delta y \frac{y_0 - y_1}{(r_1)^2}\right)$$

$$r_1 + v_1 = (r_1) \left(1 + \delta x \frac{x_0 - x_1}{(r_1)^2} + \delta y \frac{y_0 - y_1}{(r_1)^2}\right)$$

Führt man noch das Azimut φ_1 nach Fig. 2. ein, so hat man:

$$r_1 + v_1 = (r_1) + \delta x \cos\varphi + \delta y \sin\varphi$$

$$v_1 = \cos\varphi\,\delta x + \sin\varphi\,\delta y + (r_1) - r_1 \tag{9}$$

Dieses ist eine Fehlergleichung von der Form:

$$v_1 = a_1\,\delta x + b_1\,\delta y + l_1 \tag{10}$$

Für den zweiten und dritten Strahl u. s. w. hat man entsprechende Fehlergleichungen, welche nun alle zusammen nach der Methode der kleinsten Quadrate aufgelöst werden. Welche Gewichte man hiebei den einzelnen Entfernungsmessungen giebt, hängt von den Umständen ab. Im Falle unmittelbarer Lattenmessung wird man wohl die mittleren Fehler den Entfernungs-Wurzeln proportional, also die Gewichte den Entfernungen umgekehrt proportional setzen.

Im Anschluss an Fig. 2. nehmen wir ein Zahlenbeispiel, welches uns gelegentlich vorgekommen ist.

Die gegebenen Coordinaten von K, M und A und die Näherungs-Coordinaten von W sind:

Kreuz-Turm, $K.$	$y_1 = -14331^m$	$x_1 = +94017^m$	
Markt-Turm, $M.$	$y_2 = -14154^m$	$x_2 = +93837^m$	
Ägidius-Turm, $A.$	$y_3 = -13880^m$	$x_3 = +93576^m$	
Wettersäule, $W.$	$(y) = -13920^m$	$(x) = +94110^m$ Näherung	(11)

Man berechnet hieraus die drei Azimute φ und die drei Näherungs-Entfernungen (r), welch' letztere mit den gemessenen Entfernungen r verglichen werden:

		Näherung:	*Beobachtung:*	*Differenz:*
$K.$	$\varphi_1 = 76°\,55'$	$(r_1) = 422^m$	$r_1 = 425^m$	$l_1 = -\;3^m$
$M.$	$\varphi_2 = 40°\,36'$	$(r_2) = 360^m$	$r_2 = 385^m$	$l_2 = -25^m$
$A.$	$\varphi_3 = 355°\,43'$	$(r_3) = 535^m$	$r_3 = 540^m$	$l_3 = -\;5^m$

Die hier als beobachtet aufgeführten r sind aus einem gedruckten Plane der Stadt Hannover in 1 : 11200 abgestochen, aus welchem auch die Näherungs-Coordinaten y_0 und x_0 entnommen sind; und es handelt sich nun darum, mit den drei Entfernungen die Näherungs-Coordinaten zu verbessern. Die Gewichte werden gleich angenommen, und damit erhält man nach (9) und (10) die drei Fehlergleichungen:

$$v_1 = +0{,}23\,\delta x + 0{,}97\,\delta y - 3$$
$$v_2 = +0{,}77\,\delta x + 0{,}64\,\delta y - 25$$
$$v_3 = +1{,}00\,\delta x - 0{,}07\,\delta y - 5$$

Normalgleichungen:

$$\underline{+1{,}64}\,\delta x + 0{,}64\,\delta y - 24{,}94 = 0 \qquad \delta y = +\;8^m \quad \pm 14^m$$
$$\underline{+1{,}35}\,\delta y - 18{,}56 = 0 \qquad \delta x = +12^m \quad \pm 13^m$$
$$\underline{+659{,}0} = [ll] \qquad m = \sqrt{\frac{219}{1}} = \pm 15^m$$

Fügt man diese δy und δx zu den Näherungs-Coordinaten hinzu, so hat man das Resultat:

Wettersäule $W.$	$y = -13912^m$	$x = +94122^m$
	$\pm\;14^m$	$\pm\;13^m$

§ 63. Diagonalen-Schnitt.

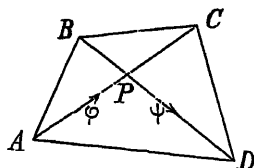
Fig. 1. Diagonalen-Schnitt P.

In Fig. 1. sind vier Punkte A, B, C, D dargestellt, deren Coordinaten gegeben sind; es sollen von dem Diagonalen-Schnittpunkt P die Coordinaten x, y berechnet werden.

Sind φ und ψ die Azimute (AC) und (BD), so hat man:

$$tang\,\varphi = \frac{y_c - y_a}{x_c - x_a} \qquad tang\,\psi = \frac{y_d - y_b}{x_d - y_b} \tag{1}$$

Die Gleichungen der Geraden AC und BD im Sinne der analytischen Geometrie sind:

$$y - y_a = (x - x_a)\,tang\,\varphi \quad , \quad y - y_b = (x - x_b)\,tang\,\psi \tag{2}$$

Löst man diese zwei Gleichungen nach den laufenden Coordinaten x und y auf, so hat man damit die gesuchten Coordinaten des Schnittpunkts P.

Wenn man zu diesem Zweck die beiden Gleichungen (2) subtrahiert, so fällt y fort, und die Auflösung nach x giebt dann:

$$x = \frac{(y_b - y_a) + x_a \, tang \, \varphi - x_b \, tang \, \psi}{tang \, \varphi - tang \, \psi} \tag{3}$$

Diese Form ist jedoch zur Ausrechnung nicht zu empfehlen, weil die Coordinaten x_a und x_b, welche meist sehr grosse Zahlen sind, selbst in die Rechnung eingehen; es ist besser, nur mit Coordinaten-*Differenzen* zu rechnen, und deshalb die Gleichung (3) so umzuformen:

$$x - x_a = \frac{(y_b - y_a) - (x_b - x_a) \, tang \, \psi}{tang \, \varphi - tang \, \psi} \tag{4}$$

und hiezu nach (2):

$$y - y_a = (x - x_a) \, tang \, \varphi \tag{5}$$

Auf gleiche Weise kann man aus (3) auch bilden:

$$x - x_b = \frac{(y_b - y_a) - (x_b - x_a) \, tang \, \varphi}{tang \, \varphi - tang \, \psi} \tag{6}$$

und

$$y - y_b = (x - x_b) \, tang \, \psi \tag{7}$$

Die Azimute φ und ψ selbst braucht man hiebei nicht, sondern nur $tang \, \varphi$ und $tang \, \psi$.

Die Formeln (1) , (4) , (5) , (6) , (7), welche die ganze Rechnungs-Vorschrift enthalten, gelten natürlich nicht bloss für den Schnitt eigentlicher sogen. *Diagonalen*, wie in Fig. 1., sondern auch für den Schnitt der Verlängerungen zweier Seiten, wie z. B. in dem Viereck Fig. 3. S. 67, für den Schnittpunkt (n).

Wir wollen jenen Fall S. 67 nach unseren neuen Formeln behandeln, und bringen die Bezeichnungen von S. 67 mit den neuen Bezeichnungen Fig. 1. S. 199 so in Beziehung:

(2)	A	$y_a = + 97{,}860$	$x_a = + \ 35{,}620$
(1)	B	$y_b = \ 0{,}000$	$x_b = \ 0{,}000$
(3)	C	$y_c = + 52{,}460$	$x_c = + 104{,}700$
(4)	D	$y_d = + \ 5{,}710$	$x_d = + \ 68{,}100$

Nach (1) berechnet man:

$$tang \, \varphi = - 0{,}657\,210 \qquad tang \, \psi = + 0{,}083\,847$$

$$tang \, \varphi - tang \, \psi = - 0{,}741\,057$$

und die Weiter-Rechnung nach (4) bis (7) giebt mit Proben:

$$y = + 13{,}721 \qquad x = + 163{,}644 \tag{8}$$

Dieses stimmt mit dem früheren (8a) S. 68 insofern genügend, als auf S. 68 überall nur mit Abrundung auf 0,01 gerechnet wurde.

Dieses giebt auch Veranlassung, die Berechnungsart von S. 67—68 mit den neuen Formeln zu vergleichen:

Wir rechneten früher, S. 67, zuerst alle Azimute und Azimut-Differenzen, d. h. Winkel, und dazu die bekannten Entfernungen, d. h. die Vierecksseiten; dann genügte der Sinus-Satz, um auch die Abstände des Schnittpunktes (n) von allen vier Ecken (1) , (2) , (3) , (4) zu bestimmen, und auch die Coordinaten von (n) mit zahlreichen Proben zu berechnen, d. h. wir rechneten dann nach den Triangulierungsformeln von § 65.

Wir glauben, dass in den meisten Fällen ein solches Verfahren besser ist als die Anwendung der Formeln (4)—(7), denn die Entfernungen und die Azimute braucht man gewöhnlich ohnehin, auch lassen sich Azimute und Entfernungen stets summarisch durch die Zeichnung kontrollieren, was bei den Bestandteilen der Formeln (4)—(7) nicht der Fall ist.

Kapitel VIII.

Triangulierung.

§ 64. Allgemeines.

Fig. 1.

Wenn von einem Dreieck ABP (Fig. 1.) eine Seite $AB = c$ und die Winkel α, β, γ (oder wenigstens zwei Winkel) gemessen sind, so kann man die beiden anderen Seiten a und b berechnen:

$$a = \frac{c}{\sin\gamma} \sin\alpha \qquad b = \frac{c}{\sin\gamma} \sin\beta$$

Wenn man an die Seite a oder b als Basis weitere Dreiecke ansetzt, so kann man auf diese dasselbe Verfahren anwenden.

Oder mit anderen Worten:

Wenn mehrere Punkte einer Ebene so unter sich durch Gerade verbunden sind, dass ein System von Dreiecken entsteht, von denen jedes mit einem Nachbardreieck mindestens *eine* Seite gemein hat, so lässt sich die Gestalt des dadurch entstandenen Dreiecksnetzes lediglich durch Messung von Winkeln bestimmen, und die Messung *einer* Seite als Basis genügt zur Bestimmung aller Dimensionen des Netzes.

Dieses ist der Grundgedanke der „*Triangulierung*", welche als Erfindung dem Niederländer *Snellius* im Jahr 1615 zugeschrieben wird.

Man pflegt die Triangulierungen in Ordnungen einzuteilen, etwa so:

I.	Ordnung	mit	Dreiecksseiten	von	20^{km}	bis	50^{km} und darüber,
II.	„	„	„	„	10^{km}	„	20^{km}
III.	„	„	„	„	3^{km}	„	10^{km}
IV.	„	„	„	„	1^{km}	„	3^{km}

(s. Anweisung IX. v. 25. Oktober 1881, S. 6.)

I. und II. Ordnung heissen auch Haupt-Triangulierung, III. und IV. Ordnung heissen Klein-Triangulierung, doch sind solche Einteilungen und Benennungen ziemlich schwankend.

Obgleich die Haupt-Triangulierungen mit Basis-Messungen erst in unserem III. Bande behandelt werden sollen, geben wir doch zur Gewinnung eines ersten Überblicks in den nachfolgenden Fig. 2. und Fig. 3. eine Andeutung der neuesten Triangulierungen unserer Landes-Aufnahme in der Provinz Hannover.

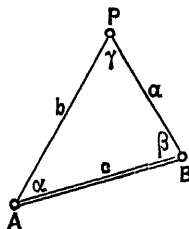



Fig. 2. zeigt die Basis von Meppen, welche 7039^m lang, im Jahre 1883 gemessen wurde.

Durch vier Dreiecke wird daraus die 34563^m lange Seite Windberg – Hesepe abgeleitet, welche dann mit Quekenberg ein Dreieck I. Ordnung bildet.

Man kann mit den Mitteln der heutigen Wissenschaft und Technik solche Linien sehr genau messen, jedenfalls auf 1 : 200 000 der Länge genau, und auch noch genauer, und hiernach ist also z. B. die Meppener Basis (welche wir nur in runder Zahl = 7039^m angegeben haben) auf wenige Centimeter genau bestimmt.

Fig. 2.

Basis von Meppen, 1883.

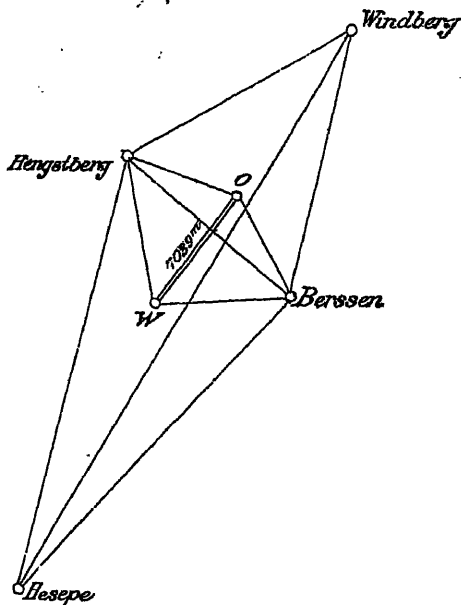
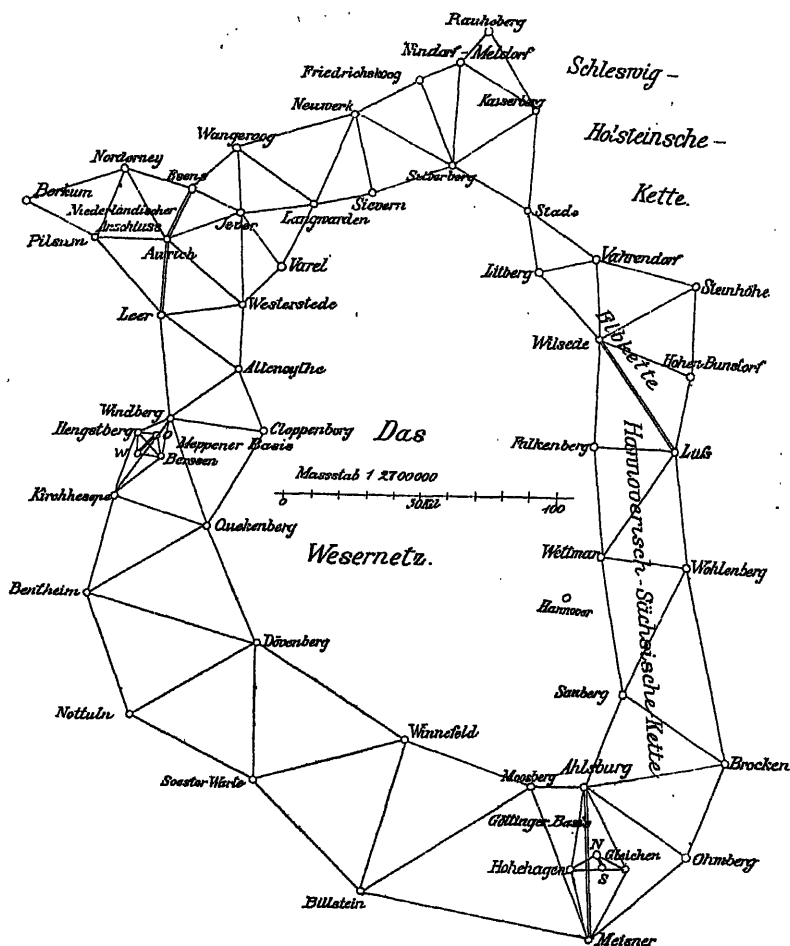
(Massstab 1 : 400 000.)

Obgleich die genaue Messung einer solchen Grundlinie eine schwierige und mühsame Arbeit ist, indem z. B. die zweimalige Messung der Basis bei Meppen (hin und her) im Jahr 1883 mit den Neben-Arbeiten etwa drei Wochen Zeit in Anspruch nahm, so sieht man doch durch Vergleichung von Fig. 1. und Fig. 2., welch bedeutende Vorteile die Triangulierung im Vergleich mit der unmittelbaren Messung aller Linien bietet. Aus *einer* einzigen unmittelbar gemessenen, nur wenige Kilometer langen Linie, und mit Zuziehung von Winkeln, deren Messung mit dem Theodolit viel rascher und bequemer vor sich geht als die Längen-Messung, kann man grosse Entfernungen von mehreren Hundert von Kilometern durch trigonometrische Rechnung ableiten.

Fig. 3. zeigt im westlichen Teil die Meppener Basis wieder in kleinerem Massstabe, und die weiteren sich darin anschliessenden Dreiecke und Dreiecks-Ketten.

Fig. 3.

Umfangs-Ketten der Haupt-Triangulierung von Hannover.

Preussische Landes-Aufnahme 1883.

(Massstab 1 : 2 700 000.)

Im südlichen Teil von Fig. 3. haben wir in ähnlicher Weise die 5^{km} lange *Göttinger* Basis (gemessen 1880), und im Nord-Osten befindet sich noch eine dritte solche Basis, die Braaker Basis, gemessen 1871, welche jedoch in unserer Fig. 3. nicht mehr dargestellt ist.

Verschiedene Dreiecks-Ketten verbinden diese drei Grundlinien und bilden einen festen umschliessenden Rahmen, für das „Wesernetz", welches seinerseits wieder aus Dreiecken besteht, jedoch in Fig. 3. nicht mehr ausgezeichnet ist.

Da wir auch über die Anlage von Coordinaten-Systemen schon in § 59. S. 187 das Nötigste gesagt haben, können wir nun zur Behandlung von *Klein-Triangulierungen* übergehen, bei welchen immer vorausgesetzt wird, dass mindestens zwei Punkte von vorhergehenden Triangulierungs-Arbeiten nach Coordinaten gegeben sind, und dass es genügt, mit *ebenen* Dreiecken und mit *ebenen* rechtwinkligen Coordinaten zu rechnen.

§ 65. Grundaufgabe der Triangulierungs-Berechnung.

Ehe wir zu den Einzelheiten der Triangulierungen in Hinsicht auf Winkelmessung, Signalstellung, Berechnung und Ausgleichung u. s. w. übergehen, behandeln wir eine mathematische Grundaufgabe, durch deren fortgesetzte Anwendung man ganze Dreiecksnetze berechnen kann.

In Fig. 1. (S. 205) sind die beiden Punkte A und B durch ihre Coordinaten gegeben, in einem an AB sich anschliessenden Dreieck ABP wurden die Winkel α, β, γ, oder wenigstens zwei dieser Winkel, gemessen; es sollen die Coordinaten x, y des Punktes P berechnet werden.

Wenn alle drei Winkel α, β, γ gemessen sind, so wird ihre Summe $\alpha+\beta+\gamma$ nicht genau auf 180° stimmen, man verteilt dann den Widerspruch gleich auf die drei Winkel.

Die trigonometrische Berechnung beginnt mit der Berechnung des Azimutes und der Länge der Basis AB, nämlich nach den Grundformeln (15) und (16) § 60. S. 190:

$$tang\,(AB) = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \tag{1}$$

$$AB = c = \frac{y_b - y_a}{sin\,(AB)} \quad \text{oder} \quad = \frac{x_b - x_a}{cos\,(AB)} \tag{2}$$

Der Sinus-Satz giebt die beiden anderen Seiten, nämlich:

$$AP = b = \frac{c}{sin\,\gamma}\,sin\,\beta \quad , \quad BP = a = \frac{c}{sin\,\gamma}\,sin\,\alpha \tag{3}$$

Aus dem Azimut (AB) der Basis AB und den beiden Winkeln α und β findet man auch die Azimute der beiden andern Seiten, nämlich:

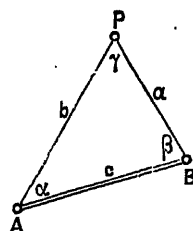
$$\left.\begin{array}{ll} (AP) = (AB) - \alpha & (BP) = (BA) + \beta \\ & \text{oder} \quad = (AB) \pm 180° + \beta \\ \text{(links Subtraktion)} & \text{(rechts Addition)} \end{array}\right\} \tag{4}$$

Dann folgen die Coordinaten von P nach den Grundgleichungen (7) oder (7') von § 60. S. 189 zweifach:

$$\text{von } A \text{ aus:} \quad y = y_a + AP\,sin\,(AP) \qquad x = x_a + AP\,cos\,(AP) \tag{5}$$

$$\text{von } B \text{ aus:} \quad y = y_b + BP\,sin\,(BP) \qquad x = x_b + BP\,cos\,(BP) \tag{6}$$

Wir nehmen hiezu ein Zahlen-Beispiel, welches ungefähr der beigegebenen Fig. 1. entspricht.

Fig. 1.

Gemessene Winkel		*Ausgeglichene Winkel*
$(\alpha) = 40^\circ\ 27'\ 23''$	Punkt A	$\alpha = 40^\circ\ 27'\ 19''$
$(\gamma) = 70^\circ\ 36'\ 24''$	Punkt P	$\gamma = 70^\circ\ 36'\ 20''$
$(\beta) = 68^\circ\ 56'\ 25''$	Punkt B	$\beta = 68^\circ\ 56'\ 21''$
$180^\circ\ 0'\ 12''$		$180^\circ\ 0'\ 0''$

Gegebene Coordinaten

Punkt B	$y_b = +5480{,}26^m$	$x_b = -63843{,}22^m$
Punkt A	$y_a = +3418{,}45^m$	$x_a = +64524{,}94^m$
Coordinaten-Differenzen	$y_b - y_a = +2061{,}81^m$	$x_b - x_a = +\ 681{,}72^m$

	$log\ (y_b - y_a)$	3.314 249
	compl. $log \left\{ \begin{matrix} sin\ (AB) \\ \text{oder}\ cos\ (AB) \end{matrix} \right\}$	0.022 529 zur grösseren Kathete
	$log\ (x_b - x_a)$	2.833 606
$(AB) = 71^\circ\ 42'\ 14''$	$log\ tang\ (AB)$	0.480 643
$-\alpha = -40^\circ\ 27'\ 19''$	$log\ AB$	3.336 778
$(AP) = 31^\circ\ 14'\ 55''$	$log\ sin\ \gamma$	9.974 629
	$log\,(AB : sin\ \gamma)$	3.362 149

$(BA) = 251^\circ\ 42'\ 14''$
$+\beta = +\ 68^\circ\ 56'\ 21''$
$(BP) = 320\ 38'\ 35''$

$log\,(AB : sin\ \gamma)$	3.362 149
$log\ sin\ \beta$	9.969 975
$log\ AP$	3.332 124

$log\,(AB : sin\ \gamma)$	3.362 149
$log\ sin\ \alpha$	9.812 147
$log\ BP$	3.174 296

$log\ AP$	3.332 124	$log\ AP$	3.332 124
$log\ sin\ (AP)$	9.714 960	$log\ cos\ (AP)$	9.931 928
$AP\ sin(AP)$	3.047 084	$AP\ cos(AP)$	3.264 052
$+1114{,}51$		$+\ 1836{,}76$	
$y_a = +3418{,}45$		$x_a = +64524{,}94$	
$y = +4532{,}96$		$x = -62688{,}18$	

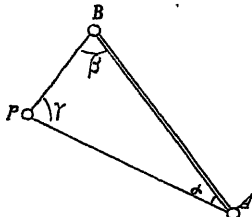
$log\ BP$	3.174 296	$log\ BP$	3.174 296
$log\ sin\ (BP)$	$9.802\ 192_n$	$log\ cos\ (BP)$	9.888 298
$BP\ sin(BP)$	$2.976\ 488_n$	$BP\ cos(BP)$	3.062 594
$-\ 947{,}30$		$+\ 1155{,}03$	
$y_b = +5480{,}26$		$x_b = -63843{,}22$	
$y = +4532{,}96$		$x = -62688{,}19$	

Man hat also in hinreichender Übereinstimmung von beiden Seiten das Resultat:

Punkt P: $y = +4532{,}96^m$ $x = -62688{,}18^m$.

Anmerkung.

Die Formeln, welche wir im Vorstehenden entwickelt und durch ein Zahlen-Beispiel erläutert haben, gelten *allgemein*, wenn nur die Bezeichnungen der Ecken

Fig. 2.

A, B, P und der Winkel α, β, γ des Dreiecks ein- für allemal den Formeln entsprechen, nämlich so:

Man denke sich auf die Basis so gestellt, dass man den nun zu bestimmenden Punkt P vor sich hat, dann nenne man den *linken* Basis-Endpunkt A und den rechten Basis-Endpunkt B, und entsprechend die Winkel α und β. Der dritte Punkt heisst dann jedenfalls P und hat den Winkel γ.

Dieser Regel entspricht z. B. auch Fig. 2.

§ 66. Aufstellung des Theodolits und der Signale.

Die Aufstellung des Theodolits im Felde geschieht bei Klein-Triangulierung auf einem hölzernen Stativ. Wenn man es machen kann, ist natürlich die Aufstellung auf einem steinernen Pfeiler, wie bei Triangulierung I. Ordnung, vorzuziehen.

Die Stativ-Platte soll man für sich mit einer Dosen-Libelle nahezu horizontal stellen, so dass die drei Spitzen der Stellschrauben sehr nahe gleich hoch stehen. Dadurch wird jedes Bestreben des Theodolits, während der Dauer der Messung auf seiner Unterlage zu rutschen oder sich zu drehen, vermieden.

Bei Sonnenschein ist ein Sonnenschirm anzuwenden.

Die Bezeichnung der Zielpunkte geschieht bei Klein-Triangulierung einfach durch starke Stäbe oder Stangen von 5—10^{cm} Durchmesser. Wenn man dieselben mit Ölfarbe weiss und rot anstreicht, und mit einer Fahne versieht, so genügen dieselben auf Entfernungen von 5—10 Kilometern. Die Signalfahne dient hiebei nicht zum Anzielen selbst, sondern nur zum Auffinden des Signals.

Fig. 1.
Pyramiden-Signal.

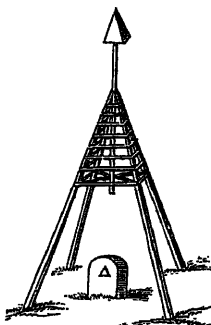



Fig. 1. zeigt ein kleines Pyramiden-Signal, welches bei der Württembergischen Triangulierung auf Punkten zweiten Rangs angewendet wurde.

Während man die Stangen-Signale jedesmal entfernen muss, wenn auf dem Punkte Winkel gemessen werden sollen, damit die Limbusmitte in die Vertikale gebracht werden kann, welche vorher die Stangenmitte einnahm, kann man unter einem solchen Pyramiden-Signal das Stativ sammt dem Theodolit aufstellen, ohne das Signal jedesmal wegzunehmen.

In Fig. 1. ist zugleich unter der Pyramide der zur dauernden Punktbezeichnung dienende Signalstein angedeutet, und zwar bezeichnet der Stein von Fig. 1. nach Württembergischer Methode den trigonometrischen Punkt in der Art, dass eine Stange von gewöhnlicher Dicke (etwa 7^{cm}) auf der Seite des Steins, welche das Zeichen △ hat, den Stein berührend, einzustecken ist, worauf die Stangenmitte als trigonometrischer Punkt gilt.

Eine ähnliche Anordnung der Signalsteine zeigt auch Fig. 2. (S. 206) nach badischem System.

Der eigentliche Triangulierungspunkt, in welchen die Signalstange eingesteckt wird, und über welchem der Theodolit centrisch aufgestellt wird, befindet sich 30^{cm} (= 1 bad. Fuss) nördlich vom Stein, woselbst das Zeichen △ eingehauen ist.

Dieses Verfahren hat den Vorzug, dass der eigentliche Triangulierungspunkt gleich gut für den Theodolit wie für eine Bake zugänglich ist.

Bei der trigonometrischen Abteilung der preussischen Landes-Aufnahme werden die trigonometrischen Punkte durch Steine und untergelegte Platten bezeichnet und versichert, wie in Fig. 3. angedeutet ist. Als trigonometrischer Punkt gilt die *Mitte* des Steins, senkrecht über der Mitte der untergelegten Platte, woselbst das Zeichen + eingehauen ist.

Fig. 2.
Signal-Stein der badischen Triangulierung
(Massstab 1 : 50.)

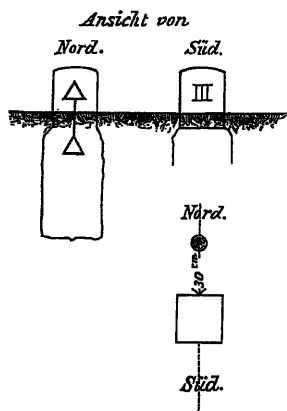
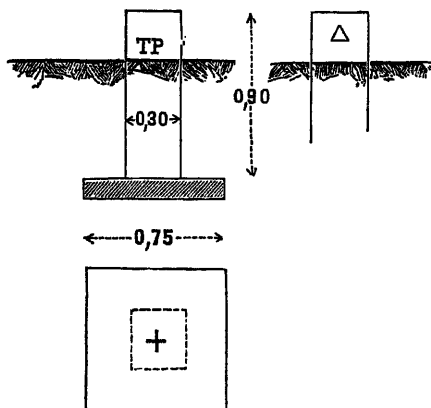



Fig. 3.
Trigonometrischer Punkt I. Ordnung.
Preussische Landes-Aufnahme.
(Massstab 1 : 40.)

Die Zeichnung Fig. 3. gilt für einen Punkt I. Ordnung; für die II. und III. Ordnung hat man ähnliche Bezeichnung, jedoch mit anderen Dimensionen, nämlich:

Ordnung	*Dicke* des Steins	*Höhe* des Steins	*Breite* der Platte	*Dicke* der Platte
I.	0,30^m	0,90^m	0,75^m	0,10^m
II.	0,16^m	0,90^m	0,60^m	0,10^m
III.	0,16^m	0,90^m	0,30^m	0,10^m

Ausserdem sind noch kleine Festlegungssteine im Gebrauch von 0,15^m Dicke und 0,5^m Höhe, ohne Unterlagsplatte, jedoch mit oben eingegossenem Bolzen.

Wenn man über einem solchen Steine ein Baken-Signal *centrisch* anbringen will, so wird die Einrichtung etwas kompliziert, wie die Fig. 4. (S. 208) zeigt, welche ein Signal der Rheinischen Kataster-Vermessung zeigt.

Hiebei ist B eine 1^m lange Basaltsäule, welche nur wenig über den Boden hervorragt, und in der Mitte das Zeichen + hat. Darunter befindet sich zur Versicherung eine Thonröhre T. Vier Pfosten A und A' sind seitwärts geschlagen, durch Bretter $C\,C'$ verbunden, die Stange S centrisch gesetzt, und seitwärts mit $D\,D'$ vierfach verstrebt.

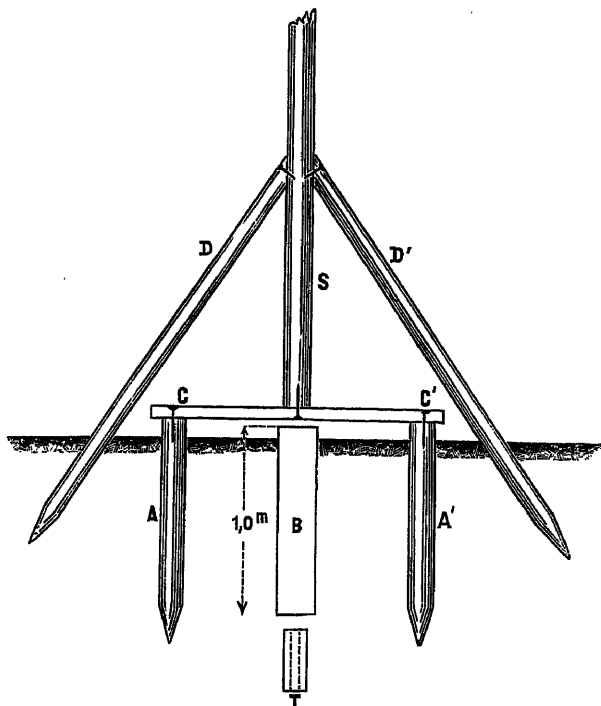
Um eine Bake gut centrisch über der Mitte eines Steines aufzurichten, hat man häufig auch das Mittel gewählt, den Stein oben mit einem cylindrischen Loche zu versehen, in welches der Bakenfuss einpasst. Solche Steine sahen wir z. B. im früher Kurhessischen Gebiete westlich von Hannover.

In Hessen-Darmstadt hatte man noch ein anderes Mittel: man stellte die Stange

zwar neben den Stein, aber *schief*, so dass der eigentliche Zielpunkt, welcher oben durch zwei Querhölzer bezeichnet war, in die Lotlinie der Steinmitte eingerichtet werden konnte. Das hat aber offenbar manches gegen sich.

Alle diese centrischen Baken-Aufstellungen sind mehr oder weniger mit Unsicherheiten behaftet und sind für die Messungen störend, wenn man wiederholt auf einem Punkte messen und in der Zwischenzeit ein Signal haben will.

Um genau zu sein, muss man die mit der Zeit unvermeidlichen Verrückungen immer wieder verbessern oder dieselben bestimmen und in Rechnung bringen. Wenn man nun aber überhaupt einmal Centrierungsrechnungen macht, so ist es gleichgültig, ob die Excentricität sehr klein oder auch etwas grösser ist.

Fig. 4.
Centrisches Baken-Signal über einem Stein.
(Massstab 1 : 40.)

Nach solchen Überlegungen haben wir z. B. bei einer Triangulierung von Linden bei Hannover im Sommer 1887 auf centrische Bakenstellung überhaupt verzichtet. Die Versteinung geschah nach Fig. 3., und die Baken, 5^{cm} dick, 4^{m} lang, von $0{,}5^{m}$ zu $0{,}5^{m}$ weiss und rot mit Ölfarbe angestrichen, oben mit Fahne versehen, wurden etwa 1^{m} seitwärts in den Boden eingegraben und unten verstrebt.

(Über die Centrirungsberechnungen für solche Fälle wird in § 70. gehandelt werden.)

Heliotrop. Auf Entfernungen von 5—10^{km} reichen die angegebenen Signal-Hilfsmittel aus. Auf weitere Entfernungen, und vielleicht auch schon über 5^{km}, wird das Heliotrop angewendet, über welches erst in unserem III. Bande gehandelt werden soll.

§ 67. Winkel-Messung.

Die gebräuchlichste Art der Winkel-Messung für Triangulierung II. bis IV. Ordnung besteht in folgendem: Man stellt alle Zielpunkte der Reihe nach von links nach rechts ein, und liest bei jedem beide Nonien oder Mikroskope ab; hierauf schlägt man das Fernrohr durch, und wiederholt die Einstellungen und Ablesungen in umgekehrter Reihenfolge.

Dadurch bekommt man für jeden Zielpunkt vier Ablesungen, welche in ein Mittel vereinigt werden. Die Zusammenstellung der Ablesungs-Mittel für alle Zielpunkte heisst ein „*Satz*" von Messungen.

Für Triangulierungen misst man nun immer mehr als einen Satz, häufig vier Sätze, und verstellt dann vor Beginn eines neuen Satzes den Limbus des Theodolits.

Wenn nur zwei Sätze beabsichtigt sind, verstellt man um 90°, wenn vier Sätze gemessen werden sollen, verstellt man zwischen je zweien Sätzen um 45° u. s. f.

Man kann auch zwischen beiden Hälften eines Satzes den Limbus verstellen, d. h. zwischen Hingang und Rückgang, um noch mehr zur Elimination der Teilungs-Fehler beizutragen. Man nennt solche Messungen „Richtungs-Beobachtungen" im Gegensatz zu reinen „*Winkel*-Beobachtungen" (im engeren Sinn verstanden), bei welchen nur *zwei* Zielpunkte in je einem Satze vorkommen

Auf S. 210 geben wir ein vollständiges Zahlen-Beispiel von Richtungs-Messungen in zwei Sätzen.

Hiezu sind noch einige Bemerkungen zu machen:

Spalte (1). Der nahe Zielpunkt Centrum (Flaggenstange) ist in den Satz mit aufgenommen, wegen der späteren Centrierungs-Berechnung, welche in § 70. behandelt werden wird. Bei so nahen Zielpunkten (Entfernung = $0{,}980^m$) kann man nicht durch das Fernrohr sehen, sondern nur über die Mittellinie des Fernrohrs hinweg, oder über ein besonders hiefür angebrachtes Visier und Korn, wie bei einem Geschütz. Die Winkel-Ablesungen können dann wohl Abweichungen von 5′ zeigen, was auf sehr kurze Entfernung unschädlich ist.

Spalte (2). Die erste Ablesung 22° 40′ 20″ ist willkürlich, bezw. zufällig. Es ist aber nützlich, die erste Ablesung *ungefähr* gleich dem Azimut des ersten Zielpunkts zu machen.

Dieses kann man in den Messungen wohl einrichten, wenn man die auf gegebenen Punkten bekannten trigonometrischen Azimute sich zur Messung notiert, und den Limbus darnach einstellt. Auf einem neuen Punkte kann man eine etwa dorthin gehende Vorwärtsrichtung nehmen. Oder allgemeiner: Es ist sehr rätlich, vor Beginn der Messungen aus den Anschluss-Azimuten, aus den bei der Recognoscierung beiläufig auf 1′ gemachten Messungen u. s. w., die nötigen Richtungen auf etwa 1′ genau in das Übersichtsnetz einzuschreiben. Dieses trifft zusammen mit der schon aus anderen Gründen, Centrierung u. s w., auszuführenden vorläufigen Berechnung des ganzen Netzes.

Man kann sich auch eines Kompasses bedienen, welcher die Azimute auf etwa 1° genau giebt, und hat dann jedenfalls die Sicherheit, dass die Ordnung der Ziel-Punkte von Nord an, sogleich richtig wird, und keiner nachherigen Umstellung mehr bedarf.

Die kleine Mühe, welche zur genäherten trigonometrischen Orientierung der Richtungs-Messungen erforderlich ist, lohnt sich durch die Übersichtlichkeit aller Tabellen reichlich.

Richtungs-Beobachtungen

Standpunkt Wasserturm Linden

Zielpunkt	Fernrohr-Lage *I* (Hingang)		Fernrohr-Lage *II* (Rückgang)	
	Nonius *I*	Nonius *II*	Nonius *I*	Nonius *II*
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Satz 1.				
Technische Hochschule S.	22° 40′ 20″	202° 40′ 10″	202° 40′ 50″	22° 39′ 30″
Christus-Turm	35 36 30	215 36 10	215 36 40	35 35 50
Neustädter-Turm . . .	60 2 30	240 2 20	240 2 40	60 1 50
Ägidius-Turm	73 28 10	253 27 40	253 28 0	73 27 50
Waterloo-Säule	75 30 20	255 30 0	255 30 0	75 30 10
Centrum	223 40	43 40	43 45	223 45
Satz 2.				
Technische Hochschule S.	112° 41′ 0″	40′ 40″	292° 40′ 20″	41′ 0″
Christus-Turm	125 37 10	36 50	305 36 30	37 20
Neustädter-Turm . . .	150 3 20	3 10	330 2 40	3 50
Ägidius-Turm	163 29 10	28 40	343 28 20	29 20
Waterloo-Säule	165 31 10	30 40	345 30 20	31 20
Centrum	313 35	35	133 40	40

In diesem Beispiele ist die Orientierung nach Azimuten nur roh genommen (die Verschiebung beträgt etwa 2° 10′). Das Beispiel ist so gewählt, dass nicht die Vermutung erzeugt wird, die Messungen *müssen* nach Azimuten orientiert sein.

Spalte (3). Bei den Ablesungen am Nonius *II* lässt man oft die ganzen Grade beim Ablesen und beim Schreiben fort, da man dieselben jedenfalls aus Spalte (2) und Spalte (4) bekommt. In unserem Beispiel wurden die ganzen Grade beim ersten Satz überall geschrieben, dagegen beim zweiten Satz zum Teil weggelassen.

Spalte (4) und (5). Die Zahlen dieser Spalten werden in der Aufeinanderfolge von unten nach oben erhalten, was auch die Bemerkungen „Hingang" und „Rückgang" bei den Überschriften angedeutet ist.

Spalte (6) und (7). Zur Mittelbildung werden die ganzen Grade und Zehner-Minuten nicht addiert, wir rechnen nur die Summe der überschiessenden Minuten, z. B. 40′ 50″. Die nun folgende Division durch 4 ist zwar eine leichte Sache, welche man im Kopfe machen kann: $\frac{40' \; 50''}{4} = 10' \; 12{,}5''$, allein für so *häufiges* Vorkommen dieser Division haben wir eine kleine Hilfstafel nützlich gefunden, welche auf S. [6] des Anhangs mitgeteilt ist. Einen Abdruck dieser Hilfstafel pflegen wir allen unseren Winkelmessbüchern beizulegen.

Spalte (8). Der erste Wert der reduzierten Mittel ist wieder mehr oder weniger willkürlich. Oft setzt man diesen ersten Wert = 0° 0′ 0″ und hat dann den ersten

...it einem Nonien-Theodolit.

...i Hannover. 24. Mai 1883.

Summe	Mittel	Reduziertes Mittel	Bemerkungen.
(6)	(7)	(8)	(9)
40′ 50″	22° 40′ 12,5″		
25 10	35 36 17,5		
9 20	60 2 20,0		
31 40	73 27 55,0		
0 30	75 30 7,5		
10 0	223 42 30,0		Excentricität $e = 0{,}980^m$
			Mittel aus beiden Sätzen:
3′ 0″	112° 40′ 45,0″	22° 40′ 12,5″	22° 40′ 12,5″
27 50	125 36 57,5	35 36 25,0	35 36 21,2
13 0	150 3 15,0	60 2 42,5	60 2 31,2
35 30	163 28 52,5	73 28 20,0	73 28 7,5
3 30	165 30 52,5	75 30 20,0	75 30 13,7
30 0	313 37 30,0 (— 32,5″)	223 36 57,5	223 40

Wert der Spalte (7) (22° 40′ 12,5″) von allen folgenden abzuziehen, um die übrigen Werte der Spalte (8) zu erhalten.

Auch kann man im *ersten* Satz die Berechnung eines besonderen reduzierten Mittels ganz unterlassen, muss dann aber im zweiten Satz und in folgenden Sätzen den ersten Wert von Satz (1) festhalten.

Dieses ist in unserem obigen Beispiel geschehen, es sollte der zweite Satz wieder mit 22° 40′ 12,5″ beginnen, d. h. es mussten alle Werte des Satzes (2) um 32,5″ vermindert werden, wodurch alles Übrige bestimmt ist.

Das Mittel aus beiden Sätzen haben wir sofort auch ausgerechnet und in die letzte Spalte (9), welche hiezu Raum bot, eingesetzt. Bei nur *zwei* Sätzen kann man das wohl so machen. Die Mittelbildung aus mehreren Sätzen und was sonst noch dazu zu sagen ist, werden wir in § 69. kennen lernen.

Spalte (9). Unter die Bemerkungen gehört namentlich alles, was sich auf Centrierungen bezieht, ein Handriss nach dem Taschen-Compass beiläufig orientiert, und für späteres genaues Aufzeichnen mit eingeschriebenen Maassen, etwa nach Art von Fig. 3. § 70. (Wenn die Centrierungen umständlich werden, genügt die Spalte „Bemerkungen“ natürlich hiezu nicht.)

Bemerkungen über Witterung, Beleuchtung der Zielpunkte u. s. w. sollen nur *ausnahmsweise* gemacht werden. Solche Bemerkungen werden meist bei der Berechnung nicht benützt, und erst *nachher* etwa zur Begründung von Ausscheidungen u. s. w. hervorgeholt.

Anordnung der Sätze. Man soll nicht zu viele Zielpunkte in einen Satz zusammen nehmen, 4—6, höchstens 8, weil das Instrument unmöglich sehr lange unverrückt bleiben kann. Um dann verschiedene Sätze zusammen zu fügen, wähle man einen oder zwei Hauptpunkte aus, welche in *allen* Sätzen vorkommen.

Die Ausgleichung wird sich bei einigem Geschick immer ohne viel Theorie bewirken lassen. Sind die Sätze sehr zerstreut, was vorkommen kann, wegen schlechter Beleuchtung, mangelnder Baken u. s. w., so kann man das Näherungsverfahren anwenden, welches in unserem Band I. § 76. S. 228—231 beschrieben wurde. (Die Anordnung der Linien und Spalten ist dort umgekehrt gegen die Anordnung in den betreffenden Kataster-Formularen der Anweisung IX. vom 25. Oktober 1881.)

Richtungs-Messungen mit dem Mikroskop-Theodolit.

Das Beispiel S. 210—211 gilt für Nonien-Ablesung. Hat man Mikroskop-Ablesung und stellt immer nur *einen* Strich (den linkseitigen) ein, so ändert sich an dem Schema von S. 210 nichts, als dass die Ablesungen nicht mehr rund auf 10″, sondern auf einzelne Sekunden ausgehen, was jedoch das Ganze nicht beeinflusst. (*Doppel*-Sekunden wenden wir nicht an. Vgl. S. 149.)

Nun ist es aber sehr zu empfehlen, mit dem Schrauben-Mikroskop nicht blos auf den linkseitigen Strich, sondern auch auf den rechtseitigen Strich einzustellen. Auch dieses ändert an der Gesamt-Anordnung nichts, und das Schema S. 210 bleibt dasselbe, nur braucht man für jede Einstellung zwei Linien statt einer.

Will man aber noch die Stimmungs-Korrektion nach (4) S. 151 berücksichtigen, so wird die Sache komplizierter. Wir werden das besonders im nachfolgenden § 68. behandeln.

Repetitions-Messung.

Nachdem das Nötigste über Repetitions-Messung bereits in § 58. S. 178—186 gesagt ist, wollen wir hier nur *einen* Umstand behandeln: Auf Türmen und anderen beschränkten Orten ist es oft unmöglich, einen Theodolit für Richtungs-Messungen aufzustellen, weil man weder herumgehen noch auch sich so weit hinausbiegen kann, um Alles einzustellen und abzulesen. Hier leistet die Repetitions-Methode vorzügliche Dienste, denn man kann damit z. B. auf einer steinernen Fensterbrüstung, welche nur von einer Seite her zugänglich ist, vorzüglich messen. Auch können Repetitions-Instrumente verhältnismässig leichter gebaut und leichter transportabel sein als Richtungs-Instrumente.

Beispielshalber erwähnen wir von einer Triangulierung von Linden bei Hannover, dass zwei hochgelegene Punkte mit vortrefflicher Umschau vorhanden waren, auf welchen das sonst gebrauchte Mikroskop-Richtungs-Instrument (S. 144) nicht benützt werden konnte, nämlich die Altane vor dem Hauptturm der technischen Hochschule mit eiserner Brüstungs-Platte, und der Wasserkunst-Turm bei Herrenhausen wegen schwieriger Besteigungsverhältnisse. Hier wurde der auf S. 142 gezeichnete Repetitions-Theodolit angewendet, die Winkel in allen Kombinationen gemessen, und nach den Formeln ausgeglichen, welche wir in Band I. S. 223 (8) entwickelt haben.

Es zeigte sich zugleich, dass diese Messungen bei geringem Zeitaufwand verhältnismässig sehr genau sind (mittlerer Fehler eines Winkels nach der Ausgleichung, etwa $= \pm 1''$), wodurch die schon auf S. 183 angedeutete Ansicht weiter bestätigt wird, dass die Repetition für viele Zwecke ein treffliches, nicht immer genügend gewürdigtes Hilfsmittel ist.

§ 68. Stimmungs-Korrektion der Mikroskope.

Wenn man die Ablesungen an einem Mikroskop-Theodolit theoretisch scharf ausnützen will, so hat man die kleine Korrektion $\varDelta$ in Rechnung zu nehmen, welche wir in § 49. S. 150—151 betrachtet haben.

Die Korrektion $\varDelta$ entspricht der Formel (4) S. 151, oder besonders für unseren Theodolit S. 144, dessen Teilungs-Intervall $t = 5' = 300''$ ist, hat man:

$$\varDelta = \delta \left(0{,}5 - \frac{a}{300}\right) \text{ in Sekunden,}$$

dabei ist δ der Mittelwert von $l - r$.

Zunächst wurde ein Hilfstäfelchen berechnet für $\delta = +1''$:

Stimmungs-Korrektion $\varDelta$ für $\delta = +1''$:

a	0″	10″	20″	30″	40″	50″
0′	+ 0,50″	+ 0,47″	+ 0,43″	+ 0,40″	+ 0,37″	+ 0,33″
1′	+ 0,30	+ 0,27	+ 0,23	+ 0,20	+ 0,17	+ 0,13
2′	+ 0,10	+ 0,07	+ 0,03	0,00	— 0,03	— 0,07
3′	— 0,10	— 0,13	— 0,17	— 0,20	— 0,23	— 0,27
4′	— 0,30	— 0,33	— 0,37	— 0,40	— 0,43	— 0,47

(1)

Nach diesem kommt es darauf an, den Wert δ, d. h. den Mittelwert von $l - r$ zu bestimmen. Das geschieht aus den Messungen selbst. Mit Trennung nach Stationen und Beobachtern (*J.* und *P.*) fanden wir aus den ersten 4 Stationen:

Station	*Mikroskop A*		*Mikroskop B*	
	J.	*P.*	*J.*	*P.*
Wasserturm	$\delta =$ + 1,70″	+ 1,28″	+ 1,31″	+ 1,03″
Tönjesberg	$\delta =$ + 1,26	+ 1,29	+ 0,86	+ 0,84
Bahnhof	$\delta =$ + 1,52	+ 2,09	+ 1,22	+ 0,15
Badenstedter Weg	$\delta =$ + 1,71	+ 1,78	+ 1,35	+ 0,00
Mittel	+ 1,55″	+ 1,61″	+ 1,18″	+ 0,50″
	+ 1,58″		+ 0,84″	

Andere Mittelbildung mit Rücksicht auf die Einstellungszahlen:

$$\delta_A = +1{,}52'' \qquad \delta_B = +0{,}94'' \tag{2}$$

Hiemit wurden besondere Hilfstäfelchen nach Art von (1) berechnet, und darnach die Korrektionen δ alle einzeln in Rechnung gebracht.

Obgleich letzteres fast nur bei Triangulierungen erster Ordnung geschieht, geben wir hier doch, zur Veranschaulichung der Arbeit, welche dadurch entsteht, ein Beispiel aus der Lindener Triangulierung, die wir 1887 so durchgeführt haben:

Standpunkt Badenstedter

Ziel-Punkt	Fernrohr-Lage I (Hingang)								
	Kreis	Mikroskop A			Kreis	Mikroskop B			Mittel
		l	r	$l-r$		l	r	$l-r$	
Kunst	9° 55′	3′ 58″	3′ 58″	0,0″	10° 0′	1′ 27″	1′ 24″	+3,0″	
	$\frac{l+r}{2} = a =$ 3 58,0				$\frac{l+r}{2} = a =$ 1 25,5				
	$\varDelta = -$ 0,5				$\varDelta = +$ 0,2				
	9° 58′ 57,5″				10° 1′ 25,7″				10° 0′ 11,6″
Wasserturm	79° 40′	4′ 57″	4′ 52,5″	+4,5″	45″	2′ 12″	2′ 12″	0,0″	
	$\frac{l+r}{2} = a =$ 4 54,7				$\frac{l+r}{2} = a =$ 2 12,0				
	$\varDelta = -$ 0,7				$\varDelta = +$ 0,1				
	79° 44′ 54,0″				47′ 12,1″				79° 46′ 3,05″

Wenn die Werte $l-r$ nicht bedeutend sind, so machen die Verbesserungen $\varDelta$ m Schluss-Ergebnis, d. h. im Mittel aus mehreren Sätzen so wenig aus, dass es sich aum der Mühe lohnt, die Rechnung so fein zu führen.

In unserem Falle ergab sich der mittlere Fehler einer Richtung in einem Satz und $= \pm 2''$ (s. d. folg. (9) S. 217) und der mittlere Fehler einer ausgeglichenen ichtung im Netz $= \pm 1{,}6''$, und die mittlere Korrektion δ *einer* Ablesung $= 0{,}3''$. ede Hauptrichtung ist in 8 Sätzen mit 32 Ablesungen gemessen, es ist also der Einluss von δ auf eine Hauptrichtung nur $= 0{,}3'' : \sqrt{32} = \pm 0{,}05''$. Hiernach lässt sich eurteilen, dass die Berücksichtigung dieser kleinen Korrektion selten nötig ist.

§ 69. Berechnung voller Richtungs-Sätze.

Hat man mehrere volle Sätze nach der Art des Beispiels S. 210—211 gemessen, so ildet man aus allen ein Mittel, wie auch auf S. 211 mit zwei Sätzen sofort geschehen ist.

Hat man mehr Sätze, z. B. 4, 6 oder 8 u. s. w., so geht es nicht mehr an, die Mittelbildung sofort in dem Feldschreibbuche zu vollziehen; man schreibt dann die Sätze inzeln heraus, und stellt sie zusammen (Formular 2. der Anweisung IX. vom 25. Okt. 1881).

Wir zeigen dies an einem Beispiele:

Standpunkt: Badenstedter Weg.

Ziel-Punkt	Satz 1.	Satz 2.	Satz 3.	Satz 4.	Summe S	Mittel A
P^0 Kunst . . .	9° 59′ 35,2″	18,2″	30,4″	38,1″	121,9″	30,5″
P' Martin . . .	69 2 52,0	28,2	39,8	51,7	171,7	42,9
P'' Wasserturm	79 45 26,6	5,8	17,3	26,6	76,3	19,1
P''' Tönjesberg	140 42 42,3	25,2	38,5	44,1	150,1	37,5
Summe S' . . .	156,1	77,4	126,0	160,5	520,0	
Mittel B	39,0	19,3	31,5	40,1		

(1)

Veg. **20. Juli 1887.**

Fernrohr-Lage *II* (Rückgang)									Mittel	Gesamt-Mittel
Kreis	Mikroskop *A*			Kreis	Mikroskop *B*					
	l	r	$l-r$		l	r	$l-r$			
55′	2′ 22″	2′ 22,5″	— 0,5″	9° 57′	4′ 57″	4′ 56″	+ 1,0″			
$\frac{l+r}{2}=a=$ 2 22,2				$\frac{l+r}{2}=a=$ 4 56,5						
$\Delta=+$ 0,1				$\Delta=-$ 0,5						
57′ 22,3″				59′ 56,0″					58′ 39,15″	9° 59′ 25,37″
40′	3′ 14″	3′ 10″	+ 4,0″	79° 45′	0′ 38″	0′ 38″	0,0″			
$\frac{l+r}{2}=a=$ 3 12,0				$\frac{l+r}{2}=a=$ 0 38,0						
$\Delta=-$ 0,2				$\Delta=+$ 0,3						
43′ 11,8″				45′ 38,3″					44′ 25,05″	79° 45′ 14,05″

(Fortsetzung von S. 214.)

Zur Weiterbenützung hat man also das Resultat:

Kunst	9°	59′	30,5″	(2)
Martin	69	2	42,9	
Wasserturm . .	79	45	19,1	
Tönjesberg . .	140	42	37,5	

Die Summe S' diene zunächst zur Probe, indem die Quersumme der S' mit der Columnensumme der S, d. h. 520,0 gleich sein muss. Von einer weiteren Benützung der Summen S' und der zugehörigen Mittel B wird nachher die Rede sein.

Wir haben in der Tabelle (1) S. 214 die vier Sätze weder auf einen Strahl $= 0° 0' 0{,}0''$, noch überhaupt auf einen Strahl mit gemeinsamem Wert reduziert. Wir wollen nun die erste Richtung Kunst in allen vier Sätzen genähert auf ihr Azimut reduzieren, d. h. dieselbe $= 10° 0' 0{,}0''$ setzen, und haben dann folgendes:

Verschiebung Tabelle (1): Ziel-Punkt	+ 24,8″ Satz 1.	+41,8″ Satz 2.	+29,6″ Satz 3.	+21,9″ Satz 4.	Summe S	Mittel A
P^0 Kunst . . .	10° 0′ 0,0″	0,0″	0,0″	0,0″	0,0″	0,0″
P' Martin . . .	69 3 16,8	10,0	9,4	13,6	49,8	12,4
P'' Wasserturm	79 45 51,4	47,6	46,9	48,5	194,4	48,6
P''' Tönjesberg	140 43 7,1	7,0	8,1	6,0	28,2	7,0
Summe S' . . .	75,3	64,6	64,4	68,1	272,4	
Mittel B	18,8	16,2	16,1	17,0		

(3)

Die Tabelle (3) giebt das Resultat:

Kunst	10°	0′	0,0″	(4)
Martin . . .	69	3	12,4	
Wasserturm . .	79	45	48,6	
Tönjesberg . .	140	43	7,0	

Dieses unterscheidet sich von (2) nur durch eine Verschiebung von 29,5″. Im übrigen hat die Tabelle (3) vor der Tabelle (1) aber den Vorzug, dass man in (3) die Genauigkeit besser beurteilen kann, denn nachdem alles auf Kunst = 10° 0′ 0,0″ reduziert ist, zeigen die Abweichungen in den übrigen Linien die Messungsfehler an.

Wenn man aber den *mittleren Fehler* *) einer Richtung berechnen will, so genügt die Zusammenschiebung der Sätze auf einen Zielpunkt mit gleicher Richtung nicht, dagegen kann man ohne weitere Mühe, als bei (3) erforderlich war, statt (3) eine neue Tabelle (5) bilden, welche zur Berechnung des mittleren Fehlers geeignet ist, wenn man in der Tabelle (1) die Mittel B ins Auge fasst, und nun so verschiebt, dass diese Mittel B in allen Sätzen *gleich* werden. Man kann dabei irgend einen Wert B zur Bequemlichkeit lassen, z. B. den ersten 39,0, und hat dann Folgendes:

Verschiebung Tabelle (1): Ziel-Punkt	0,0″ Satz 1.	+19,7″ Satz 2.	+7,5″ Satz 3.	−1,1″ Satz 4.	Summe S	Mittel A
P^0 Kunst . . .	9° 59′ 35,2″	37,9″	37,9″	37,0″	148,0″	37,0″
P' Martin . . .	69 2 52,0	47,9	47,3	50,6	197,8	49,4
P'' Wasserturm	79 45 26,6	25,5	24,8	25,5	102,4	25,6
P''' Tönjesberg .	140 42 42,3	44,9	46,0	43,0	176,2	44,0
Summe S' . . .	156,1	156,2	156,0	156,1	624,4	
Mittel B	39,0	39,0	39,0	39,0		

(5)

Die Richtungs-Mittel sind:

Kunst	9°	59′	37,0″
Martin . . .	69	2	49,4
Wasserturm . .	79	45	25,6
Tönjesberg . .	140	42	44,0

(6)

Dieses unterscheidet sich von (2) oder (4) nur durch konstante Verschiebung, giebt also keinen Vorteil. Dagegen die Tabelle (5) bietet einen Vorteil gegen (1) oder (3), indem (5) zur Berechnung des mittleren Fehlers einer Richtung führt.

Man vergleicht nämlich die Richtungen der Tabelle (5) mit den Mittelwerten A jeder Linie, und findet damit die Tabelle der Verbesserungen v:

Ziel-Punkt	Satz 1.	Satz 2.	Satz 3.	Satz 4.	Summe S
P^0 Kunst . . .	+ 1,8	− 0,9	− 0,9	0,0″	0,0
P' Martin . . .	− 2,6	+ 1,5	+ 2,1	− 1,2	− 0,2
P'' Wasserturm	− 1,0	+ 0,1	+ 0,8	+ 0,1	0,0
P''' Tönjesberg .	+ 1,7	− 0,9	− 2,0	+ 1,0	− 0,2
Summe S' . . .	− 0,1	− 0,2	0,0	− 0,1	

(7)

Diese Differenzen geben nun, innerhalb der Abrundungs-Genauigkeit, nach Columnen und nach Linien addiert, überall die Summe = 0, also auch im ganzen die Summe = 0.

---

*) Diese Berechnung des mittleren Fehlers ist für die nächsten Anwendungen nicht unbedingt nötig.

Man rechnet auch die Quadrat-Summe:

3,24	0,81	0,81	0,00	
6,76	2,25	4,41	1,44	
1,00	0,01	0,64	0,01	
2,89	0,81	4,00	1,00	
13,89	3,88	9,86	2,45	30,08

(8

Der mittlere Fehler einer Richtung wird:

$$m = \sqrt{\frac{30{,}08}{9}} = \pm 1{,}8'' \qquad (9$$

Der Nenner, welcher hier = 9 ist, hat allgemein den Wert:

$$\text{Nenner} = (s-1)(G-1) \qquad (10)$$

wo s die Anzahl der Zielpunkte und G die Anzahl der gemessenen vollen Sätze ist.

Als *eine* Richtung, zu welcher (9) gehört, gilt die Messung in zwei Fernrohr-Lagen mit je zwei Nonien oder Mikroskopen. (Die vorstehenden Messungen sind mit dem Mikroskop-Theodolit S. 144 gemacht.)

Was die Begründung der vorstehenden Fehler-Berechnung nach (9) und (10) betrifft, so ist dieselbe vielleicht an und für sich zu durchschauen, denn es kommt doch nur darauf an, die Quadratsumme der übrig bleibenden Fehler möglichst klein zu machen, und das geschieht wie beim einfachen arithmetischen Mittel dadurch, dass die algebraischen Summen in (8) nach Linien und Spalten immer die Summen Null geben.

Die strengere Begründung ist in den allgemeineren Formeln des I. Bandes § 78. S. 231—239 enthalten. Wir haben es mit dem dort schon S. 238—239 besonders erwähnten Falle zu thun, für welchen nach [7] S. 239 die Gleichung gilt:

$$m^2 = \frac{[V\,V]}{(G-1)(s-1)} \qquad (11)$$

wobei der Nenner derselbe ist, wie vorher in (10) angegeben ist.

Was $[V\,V]$ betrifft, so sind die einzelnen V nach Band I. S. 233, Gleichungen (5) zu bilden, wozu weiter die $z_1\ z_2\ z_3$ nach (11) S. 234 erforderlich sind. Dem entspricht nun unser vorhergehendes Verfahren nicht geradezu, denn die Verschiebungen $0{,}0''$, $+19{,}7''$, $+7{,}5''$, $-1{,}1''$ in unserer vorstehenden Tabelle (5) sind nicht die früheren $z_1\ z_2\ z_3\ z_4$ selbst, sondern deren Differenzen $z_2 - z_1$ $z_3 - z_1$ $z_4 - z_1$; es wird aber die erste Änderung z_1 auch an den l selbst angebracht, und folglich bleiben die V wieder ungeändert.

§ 70. Excentrische Winkel-Messung.

Es kommt oft vor, dass das Aufstellen des Theodolits auf einem Punkte, den man als Triangulierungs-Punkt haben möchte, aus irgend welchen Gründen nicht thunlich ist, die Messungen auf dem Lindener Wasserturm (s. o. § 67. S. 210—211) geben ein Beispiel hiefür: In der Mitte des Turmes befindet sich eine Flaggenstange, welche als Zielpunkt dient, wenn von anderen Punkten nach dem Turm gemessen wird. Misst man auf dem Turm selbst, so muss der Theodolit excentrisch gegen die Flaggenstange aufgestellt werden.

Solche und ähnliche Verhältnisse kommen sehr häufig vor.

Wir betrachten nun mit Fig. 1. und Fig. 2. die Richtungs-Centrierung zuerst mit zwei Fällen, $\varepsilon < 180°$ und $\varepsilon > 180°$, welche jedoch nachher wieder auf *eine* gemeinsame Formel zusammenführen werden.

Hiebei ist S der Standpunkt des Theodolits, C das Centrum, auf welches reduziert werden soll, P ein Zielpunkt, ferner $SC = e$ die Excentricität, $PC = s$ die Entfernung des Zielpunkts vom Centrum, und ε der Richtungs-Winkel des Zielpunkts P, vom Centrum an gezählt.

Fig. 1. $\varepsilon < 180°$. Richtungs-Centrierung. Fig. 2. $\varepsilon > 180°$.

Fig. 1. giebt:

$$\varepsilon' = \varepsilon + \delta$$

$$\sin \delta = \frac{e}{s} \sin \varepsilon$$

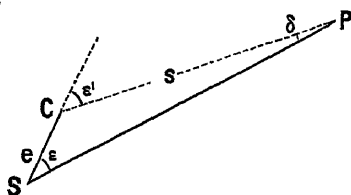



Fig. 2. giebt:

$$(360° - \varepsilon') = (360° - \varepsilon) + \delta'$$

$$\sin \delta' = \frac{e}{s} \sin (360° - \varepsilon')$$

Es wird angenommen, dass e sehr klein sei im Vergleich mit s, folglich:

$$\delta = \frac{e}{s} \varrho \sin \varepsilon \qquad\qquad \delta' = -\frac{e}{s} \varrho \sin \varepsilon'$$

Hieraus folgt in beiden Fällen gemeinsam:

$$\varepsilon' - \varepsilon = \frac{e}{s} \varrho \sin \varepsilon \qquad (1)$$

Die Werte e, ε und s nennt man zusammen Centrierungs-Elemente. e und ε kann man oft unmittelbar messen, s aus vorläufigen Berechnungen entnehmen, da s nicht sehr genau zu sein braucht.

Wir werden nachher besonders darüber zu reden haben.

Zu einem Beispiele nehmen wir Richtungs-Messungen auf dem Lindener Wasserturm bei Hannover, welche in Fig. 3. dargestellt sind (vgl. hiezu auch Fig. 4. S. 188 und das Messungs-Beispiel S. 210—211).

Fig. 3.*) Wasserturm Linden bei Hannover. Excentrische Richtungs-Messung. Massstab 1 : 100. ($CJ = e = 0{,}980^m$)

*) Diese Zeichnung stellt den Wasserturm vor in dem Zustande von 1883—1886. Im Sommer 1887 wurde von der trigonometr. Abteilung der Landes-Aufnahme ein steinerner Pfeiler ungefähr an der Stelle von J errichtet. Die später in § 73. mitzuteilenden Messungen sind auf dem *Pfeiler* 1887 gemacht und nicht auf dem Punkt J der obigen Fig. 3.

Die nachfolgende Berechnung enthält nur einen Teil der in Fig. 3. dargestellten Richtungen, die übrigen sind ebenso zu behandeln. (Die folgende Berechnung schliesst sich an Formular 4) der Anweisung IX. vom 25. Oktober 1881 an.)

C Centrum	P_1 Technische Hochschule	P_2 Christus	P_3 Ägidius	P_4 Waterloo
223° 40′ 0″	22° 40′ 12,5″	35° 36′ 21,2″	73° 28′ 7,5″	75° 30′ 13,7″
	223 40 0	223 40 0	223 40 0	223 40 0
ε	159 0 12	171 56 21	209 48 7	211 50 14
$e = 0{,}980^m$ s	2355^m	2499^m	2392^m	1554^m
$log\ \varrho$ 5.31443, $log\ e$ 9.99123	5.30566	5.30566	5.30566	5.30566
$log\ sin\ \varepsilon$	9.55426	9.14682	9.69636_n	9.72223_n
$cpl.\ log\ s$	6.62801	6.60223	6.62124	6.80855
$log\ \delta$	1.48793	1.05471	1.62326_n	1.83644_n
δ	+ 30,8″	+ 11,3″	— 42,0″	— 68,6″ = — 1′ 8,6″
Centrierte Richtungen	22° 40′ 43,3″	35° 36′ 32,5″	73° 27′ 25,5″	75° 29′ 5,1″

Die so centrierten Richtungen werden weiter benützt, wie wenn sie auf dem Centrum selbst (Wasserturm-Flaggenstange) gemessen wären. Man kann dieselben auch nach Belieben im ganzen drehen, z. B. um genäherten Anschluss an Azimute zu erhalten:

Technische Hochschule	22°	40′	43,3″	— 2° 10″	=	20° 30′	43,3″	(2)
Christus-Turm . . .	35	36	32,5	„ „		33 26	32,5	
Ägidius-Turm . . .	73	27	25,5	„ „		71 17	25,5	
Waterloo-Säule . . .	75	29	5,1	„ „		73 19	5,1	

Besonderer Fall *zweier* Richtungen.

Man stellt häufig die *Winkel*-Centrierung in einer besonderen Formel dar, wofür wir in Fig. 4. besondere Bezeichnungen angenommen haben. (l und L entsprechend links, r und R entsprechend rechts.)

Da ein Winkel immer die Differenz zweier Richtungen ist, kann man durch zweifache Anwendung der Richtungs-Centrierung (1) auch die Formel für Winkel-Centrierung aufstellen. In Fig. 4. kann man sich den gemessenen Winkel α' zerlegt denken:

$$\alpha' = R - L$$

und wenn man dann auf L und R die Richtungs-Centrierung (1) anwendet, so findet man die Winkel-Centrierung:

Fig. 4. Winkel-Centrierung $\alpha - \alpha'$

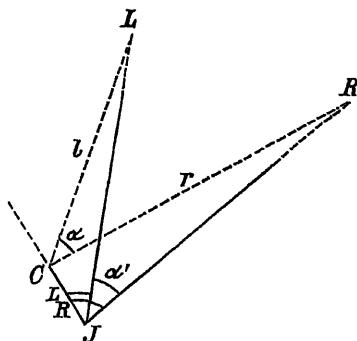
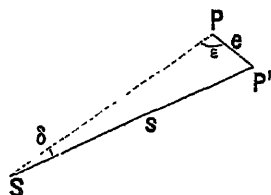
$$\alpha - \alpha' = -\frac{e\,\varrho}{l}\,sin\,L + \frac{e\,\varrho}{r}\,sin\,R \tag{3}$$

Centrieren eines Zielpunktes.

Fig. 5. Zielpunkts-Centrierung.

Auch bei den Zielpunkten kommt oft Centrieren vor. In Fig. 5. sei P' ein Zielpunkt, der bei der Winkel-Messung benützt wurde, und P ein benachbarter Punkt, auf welchen die Winkel-Messung nachher bezogen werden soll.

Ist hiebei $PP' = e$ die Excentricität, s die Entfernung und ε der Winkel bei P, dann ist der kleine Winkel bei S:

$$\delta = \frac{e}{s} \varrho \sin \varepsilon \tag{4}$$

Dieser kleine Winkel ist von der gemessenen Richtung SP' abzuziehen, damit dieselbe auf SP bezogen werde.

Man kann die Zielpunkts-Centrierungen in demselben Formular berechnen wie die Standpunkts-Centrierungen, es tritt nur ein Vorzeichen-Wechsel ein.

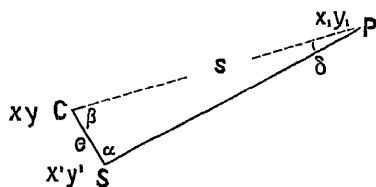
§ 71. Besondere Centrierungs-Verhältnisse.

Die Centrierungen spielen bei Triangulierungen eine wichtige Rolle, und auf manchen Stationen machen die Centrierungen mehr Arbeit als die Haupt-Winkelmessung selbst.

Wir wollen von den verschiedenen hiebei auftretenden Umständen einige Fälle hier behandeln (welche beim ersten Studium zu übergehen sind).

Am sichersten geht man immer, wenn man alle Punkte, nur wenigstens vorläufig, auf ein gemeinsames rechtwinkliges Coordinaten-System bezieht, in welchem die gegenseitig zu centrierenden Punkte wenigstens *relativ* richtig bestimmt sind (d. h. richtige Coordinaten-*Differenzen* haben). Zu diesem Zweck wird die ganze Triangulierung mit angenährten (vielleicht nur auf 1′ genauen) Winkel *vorläufig* durchgerechnet.

Eine hiebei oft auftretende Aufgabe ist die folgende:

Fig. 1.

In Fig. 1. sei das Centrum C durch seine Coordinaten x y gegeben, und ein entfernter Punkt P sei ebenfalls durch Coordinaten x_1 y_1 gegeben. S sei ein Theodolit-Standpunkt, in welchem der Winkel $CSP = \alpha$ und die kleine Entfernung $CS = e$ gemessen sind; es sollen die Coordinaten x' y' von S bestimmt werden.

Aus C und P hat man:

$$tang\,(CP) = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} \quad , \quad s = \frac{y_1 - y}{\sin\,(CP)} \quad \text{oder} \quad = \frac{x_1 - x}{\cos\,(CP)} \tag{1}$$

$$\sin \delta = \frac{e}{s} \sin \alpha \tag{2}$$

$$\beta = 180^\circ - (\alpha + \delta) \tag{3}$$

$$(CS) = (CP) + \beta \tag{4}$$

$$y' = y + e \sin\,(CS) \qquad x' = x + e \cos\,(CS) \tag{5}$$

dann erhält man noch eine durchgreifende Probe, wenn man aus den Coordinaten von S und P das Azimut (SP) unmittelbar berechnet:

$$tang\,(S\,P) = \frac{y_1 - y'}{x_1 - y'} \tag{6}$$

denn es besteht die Differenz:

$$(C\,P) - (S\,P) = \delta. \tag{7}$$

Centrierung durch Coordinaten-Differenzen.

Hat man in der oben angegebenen Weise alle Punkte in Coordinaten bestimmt, und zwar die Coordinaten-*Differenzen* benachbarter Punkte so genau als möglich, so kann man statt der in § 70. behandelten Formeln auch alles in Coordinaten berechnen.

Man hat hiebei zwei Mittel: Entweder kann man alle kleinen Winkel als Azimut-Differenzen darstellen, oder man kann die Differentialformeln anwenden, welche wir früher in Band I. § 55. S. 133—134 für andere Zwecke entwickelt haben.

Es seien z. B. in Fig. 5. § 70. S. 220:

$x\ y$ die Coordinaten von P
$x'\ y'$ „ „ „ P'
$x_1\ y_1$ „ „ „ S

dann kann man rechnen:

$$tang\,(S\,P) = \frac{y - y_1}{x - x_1} \quad , \quad tang\,(S\,P') = \frac{y' - y_1}{x' - x_1}$$

Es ist also der kleine Winkel:

$$P\,S\,P' = \delta = (S\,P') - (S\,P) \tag{5}$$

Andererseits kann man Differentiale anwenden, und hat dann nach Band I. S. 133 Fig. 3.:

$$\text{Winkel } PSP' = \delta = -\frac{x' - x}{r}\,\varrho\,sin\,(S\,P) + \frac{y' - y}{r}\,\varrho\,cos\,(S\,P) \tag{6}$$

Als ein Beispiel hiefür nehmen wir das Dreieck *Ägidius—Wasserturm—Technische Hochschule*, welches schon auf S. 188 dargestellt ist und in dem Triangulierungs-Netze von § 73. nochmals vorkommen wird.

In diesem Dreieck sind alle drei Standpunkte und auch zwei Zielpunkte excentrisch, denn auf dem Wasserturm wurde teils die Flaggenstange, teils ein Heliotrop angezielt, und von Ägidius aus war der Hauptturm S der technischen Hochschule wegen Zwischentritts des Marktturms nicht sichtbar, weshalb zunächst auf den Süd-Ost-Turm SO gemessen, und dann dieser auf den Hauptturm S reduziert werden musste.

Zu all diesen Reduktionen wurden zunächst Näherungs-Coordinaten aller in Frage kommenden Punkte im althannoverschen System bestimmt, und zwar bei der technischen Hochschule durch eine kleine örtliche Triangulierung mit kleiner Basis $MN = 126{,}591^m$ an der Herrenhauser Allee.

Wir geben beispielshalber diese Coordinaten hier, jedoch nicht als Näherungen, sondern endgültig, weil dieses für weiteren Gebrauch sich empfiehlt und weil der Gebrauch als Näherungen sich doch daran zeigen lässt.

Ägidius:	y	x
Centrum der Station: Helmstange unter dem Knopf, 1887	$-13879{,}790^m$	$+93575{,}890^m$
Holztisch 1887 (Matthiass I, Leuchtbolzen)	$-13879{,}745$	$+93576{,}064$
Bohle 1887 (Matthiass II)	$-13880{,}656$	$+93577{,}039$

Wasserturm:

	y	x
Centrum der Station: Flaggenstange Mitte in Zinnenhöhe, 1887	$-16145{,}760^m$	$+92808{,}280^m$
Backstein-Pfeiler 1887. Leuchtbolzen, Heliotrop . .	$-16145{,}080$	$+92808{,}697$

Technische Hochschule:

Centrum der Station: Hauptturm Helmstange . .	S	$-15320{,}943$	$+95013{,}695$
Altane vor dem Hauptturm, Eisenplatte . .	S'	$-15321{,}079$	$+95010{,}044$
Süd-Ost-Turm, Helmstange	SO	$-15278{,}280$	$+95030{,}091$
Östliche Plattform, Eisenplatte	E	$-15266{,}847$	$+95002{,}299$

Beobachtet wurden u. A. auf Ägidius, Holztisch 1887, die zwei Richtungen:

Wasserturm Heliotrop . . .	251° 17′ 11,53″	64° 49′ 41,10″	(7)
Techn. Hochschule Turm SO	316° 6′ 52,63″		

Die erste Richtung soll vom Zielpunkt Heliotrop auf die Flaggenstange, und die zweite Richtung soll vom Zielpunkt SO auf den Hauptturm S reduziert werden. Zugleich sollen beide Richtungen vom Standpunkt Ägidius Holztisch auf Ägidius Helmstange als Centrum, reduziert werden.

Man rechnet zu diesem Zweck mit den vorstehenden Coordinaten die vier Azimute:

	Azimute:	*Differenzen:*	
Ägidius Holztisch—Wasserturm Heliotrop	251° 17′ 11,53″	$-0°$ 0′ 2,28″	
„ Centrum— „ Centrum	251 17 9,25		
Ägidius Holztisch—Techn. Hochschule SO	316° 6′ 52,06″	$-1°$ 10′ 51,92″	
„ Centrum— „ „ S	314 56 0,14		
		$-1°$ 10′ 49,64″	(8)

Dieser Wert (8) zu (7) hinzugefügt, giebt den allerseits centrierten Winkel:

$$\text{Wasserturm—Ägidius—Techn. Hochschule } S = 63°\ 38'\ 51{,}46'' \qquad (9)$$

Die erste unserer obigen Azimut-Differenzen, $-0°\ 0'\ 2{,}28''$, kann man auch durch eine Differentialformel bestimmen, nämlich nach Band I. § 56. S. 134 Fall III*):

$$d\varphi = +\frac{\Delta y}{r}\varrho \cos\varphi - \frac{\Delta x}{r}\varrho \sin\varphi$$

wo sich Δy und Δx aus je vier Coordinaten-Änderungen zusammensetzen; in unserem Falle ist $\Delta y = -0{,}635^m$ $\Delta x = -0{,}243^m$ und damit $d\varphi = +17{,}56'' - 19{,}84'' = -2{,}28''$, ebenso wie aus den Azimut-Differenzen.

Wir haben vorausgesetzt, dass wir es nur mit vorläufigen Coordinaten zu thun haben, welche jedoch die *relative* Lage benachbarter Punkte richtig angeben. Wenn wir die Coordinaten der beiden Türme S und SO um gleich viel ändern, z. B. in y und in x um $+0{,}100^m$, so bekommen wir zwar merklich andere Azimute, nämlich 316° 7′ 6,50″ und 314° 56′ 14,44″, welche aber nahezu doch dieselbe *Differenz* geben wie vorhin, nämlich $-1°$ 10′ 52,06″.

---

*) Band I. S. 134 Fall III soll sein $d\varphi = -\left(\frac{\sin\varphi}{r}\varrho\right)(x - x_1) + \left(\frac{\cos\varphi}{r}\varrho\right)(y - y_1)$, während infolge eines Druckfehlers das zweite Glied das Zeichen — hat. Vergl. das Druckfehler-Verzeichnis zu Band I.

Anmerkung. Wenn hiemit auch gezeigt ist, dass die Centrierung mit *vorläufigen* Coordinaten doch auf 0,1″ genau dasselbe giebt, wie die nachträgliche Centrierungsberechnung mit den endgültigen Coordinaten, so kommen doch auch in solchen Fällen manche Nebenumstände hinzu, welche noch kleine Fehler hineinbringen. So auch in unserem Falle; wir werden den oben unter (9) gefundenen Winkel 63° 38′ 51,46″ später in § 73. S. 231—232 mit dem Wert 63° 38′ 51,9″ wieder finden, d. h. um 0,4″ grösser, ohne dass wir uns hier darauf einlassen wollen, diese Differenz zu erklären, welche übrigens bei einer mittleren Entfernung von 2^{km} nur etwa 4^{mm} ausmacht, d. h. soviel, als auch bei direkter Centrierung mit unterlaufen kann.

Centrierungen auf Türmen. Auf Kirchtürmen und ähnlichen Bauwerken spielen die Centrierungen eine besonders wichtige Rolle, weil es fast nie möglich ist, unmittelbar in der Projektion der Helmstange zu beobachten oder die Centrierungs-Elemente unmittelbar zu messen.

Das gebräuchlichste Verfahren der Centrierung besteht darin, dass man auswärts eine kleine Basis mit Messlatten misst, und von dieser aus sowohl die Helmstange unter dem Knopf, als auch den Theodolitstand beobachtet, und die gegenseitige Lage dieser beiden Punkte bestimmt, und zwar am besten in Coordinaten in irgend welchem System. So wurde die schon vorhin erwähnte Centrierung zwischen den Türmen und Standpunkten der technischen Hochschule in Hannover (Welfenschloss) von uns gemacht.

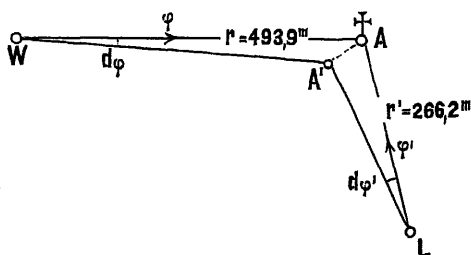
Oft hat man mehr als einen Theodolitstand, und dazu noch excentrische Zielpunkte bzw. Heliotrop-Leuchtstände. Z. B. auf dem 109^m hohen Ansgariusturm in Bremen hatte die trigonometrische Abteilung der Landes-Aufnahme im Jahr 1886 11 verschiedene Punkte gegenseitig unter sich zu verbinden.

Die Messung einer seitlichen Basis wird erspart, wenn man trigonometrische Punkte nur wenigstens genähert richtig in der Nähe hat oder solche bestimmen kann.

Ein gutes Beispiel hiefür scheint uns folgendes zu sein:

In Fig. 2. bedeute A die Helmstange des Ägidius-Turmes in Hannover, und A' eine an der Laterne des Turmes angebrachte Bake, welche sowohl innen von dem Theodolitstand aus, als auch aussen von zwei Punkten W und L aus sichtbar ist. Diese zwei Punkte (W = Waterloo-Platz, L = Langensalza-Allee) wurden ihrerseits pothenotisch an das hannoversche Coordinaten-System angeschlossen, mit für diesen Zweck genügender Genauigkeit. In W und L wurde je der kleine Winkel $d\varphi$ bzw. $d\varphi'$ zwischen A und A' scharf gemessen, und wenn man nun mit dx und dy die Coordinaten-Differenzen zwischen A und A' bezeichnet, so hat man mit den Bezeichnungen von Fig. 2., nach Band I. § 55. S. 133 Fig. 3., die Differentialformeln:

Fig. 2.
Centrierung auf dem Ägidius-Turm.

$$\left.\begin{aligned} d\varphi &= -\frac{\sin\varphi}{r}\,dx + \frac{\cos\varphi}{r}\,dy \\ d\varphi' &= -\frac{\sin\varphi'}{r'}\,dx + \frac{\cos\varphi'}{r'}\,dy \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Diese Gleichungen kann man nach dy und dx auflösen:

$$dy = + \frac{\frac{r\,d\varphi}{\sin\varphi} - \frac{r'\,d\varphi'}{\sin\varphi'}}{\operatorname{cotg}\varphi - \operatorname{cotg}\varphi'} \qquad dx = - \frac{\frac{r\,d\varphi}{\cos\varphi} - \frac{r'\,d\varphi'}{\cos\varphi'}}{\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\varphi'}.$$

Oder besser noch wird es sein, sich mehr als zwei Punkte W und L, und mehr als zwei Gleichungen (10) zu verschaffen, und diese nach der M. d. kl. Q. aufzulösen.

Sobald man so die Coordinaten von A' bestimmt hat, kann man die Coordinaten des Theodolitstandes S gegen A' durch das Verfahren von Fig. 1. S. 220 bestimmen.

Unmittelbares Abloten. Es ist oft möglich, die Helmstange von zwei Seiten her unmittelbar ins Innere des Turmes mit dem Theodolit herabzuprojizieren. Dieses war z. B. auf dem Ägidius in Hannover möglich, und die trigonometrische Abteilung der Landes-Aufnahme hat dabei das folgende in Fig. 3. angedeutete Verfahren eingeschlagen:

Fig. 3.
Abloten CC_1

Die Helmstange C wurde zuerst *vorläufig* projiziert, und dadurch ein Punkt A erhalten. Nun ist es aber nicht möglich, durch *eine* Projektion in *einer* Fernrohr-Lage den Punkt A genau in die Vertikale von C zu bringen. Dagegen kann man durch genaue Horizontal-Winkel-Messung zwischen dem vorläufigen Punkt A und der Helmstange C noch eine Korrektion AC_1 bestimmen. Zunächst hat man für AC_1 eine Winkel-Korrektion, und man könnte daraus eine lineare Korrektion AC_1 ableiten, wenn man die Entfernung des Theodolits wüsste. Diese Entfernung kann man sich durch einen kleinen Kunstgriff ersparen: Die trigonometrische Abteilung der Landes-Aufnahme stellt nämlich in A, und links und rechts davon, drei Signale L, A, R in bekannten Abständen auf ($LA = AR = 10^{cm}$) und wenn man nun die Horizontal-Winkel-Messung nicht bloss auf C und A, sondern auch auf L und R ausdehnt, so kann man das Stück AC_1 durch eine einfache Proportion berechnen. Es dient hiebei LAR sozusagen als Distanz-Latte.

Dieses Abloten macht man von zwei Seiten her, und hat dann im Innern die Projektion der Helmstange zugänglich.

(Gelegentlich mag hiezu bemerkt werden, dass auf Ägidius die genaue Projektion der Helmstange in der Laterne des Turmes um 17^{cm} von der geometrischen Mitte des Grundriss-Achtecks abwich, obgleich der Turm von aussen nach Augenmass symmetrisch erscheint.)

Bei solchen Turm-Centrierungen kommen viele Messungen vor, welche man am besten zu der künftigen *Stadt-Vermessung* in Beziehung setzt.

Am besten ist es, um den Turm herum ein geschlossenes Strassen-Polygon zu legen, dessen Seiten mit Messlatten genau gemessen werden. Auf diese Weise kann man nicht nur die Centrierungen sehr genau bekommen, sondern zugleich auch dem später kommenden Stadt-Vermesser sichere und gut zugängliche Strassen-Punkte verschaffen, und ihm die später doch nötigen schwierigen Turm-Anschlüsse sofort geben.

Centrierung mit dem Compass.

Wenn man durchaus nach Coordinaten rechnet, so kann man kleine Centrierungen, etwa solche, welche nur Centimeter oder Decimeter betreffen, am einfachsten mit dem Compass erledigen, welcher insofern Azimute giebt, als die Angaben der Nadel um

einen konstanten Betrag (etwa 13°) grösser sind als die trigonometrischen Azimute. Hat man diesen Betrag ermittelt, und kann man vor Eisenmassen sicher sein (im freien Feld), so genügen Compass-Ablesungen zu manchen kleinen Centrierungen.

Genauigkeit der Centrierungen.

Man soll die Centrierungen so genau machen, dass die dabei übrig bleibenden Fehler im Vergleich mit den Winkel-Messungs-Fehlern als verschwindend zu betrachten sind; demnach misst man die Excentricitäten e meist auf 1^{mm} genau, und nimmt auch die Richtungs-Winkel ε entsprechend genau.

Bei Triangulierungen III. bis IV. Ordnung mit Seiten von rund 2^{km} entspricht 1^{mm} einem Winkel von 0,1″, d. h. der letzten Rechen-Einheit, die man hier überhaupt noch mitführt, und bei Triangulierungen I. Rangs entspricht 1^{mm} nur etwa 0,01″. Es würden daher die Triangulierungen häufig sachlich nicht anders ausfallen, wenn man bei grossen Entfernungen die Excentricitäten nur auf 1^{cm} genau mässe. Allein erstens kommen grössere Fehler als 1^{mm} wohl auch von selbst, wenn man beabsichtigt, auf 1^{mm} genau zu messen, und zweitens soll man kleine Fehler, wenn man sie vermeiden kann, nicht leichtsinnigerweise in eine Arbeit hineintragen. Es gilt hier derselbe Grundsatz, wie im sittlichen Leben, und man kann hier mit kleiner Abänderung eines Sprichworts sagen: „Wer die Zehntel nicht ehrt, ist der Sekunde nicht wert." —

§ 72. Bildung der Abrisse.

Unter „*Abriss*" versteht man das Schluss-Ergebnis der Winkel-Messungen bzw. Richtungs-Messungen auf einer Station. Der Abriss entsteht aus den Einzelmessungen durch Mittel-Bildung oder sonstige etwa nötige Ausgleichung, und durch Zufügung aller Centrierungs-Reduktionen.

Für Kleintriangulierung misst man mindestens zwei Sätze, häufig vier Sätze, und wenn darin keine Lücken sind, so macht man die Mittelbildung nach § 67.

Vollständige Sätze sind aber nicht immer zu erlangen, teils wegen äusserer Hindernisse, z. B. schlechter Beleuchtung, teils aus inneren Gründen, indem sehr *viele* Zielpunkte (z. B. mehr als sechs) nicht in *einen* Satz zusammengenommen werden sollen.

Wie man in solchen Fällen zu Gewinnung eines Gesamt-Mittels gelangt, haben wir im I. Band, M. d. kl. Q. S. 229, gezeigt, indessen bei Triangulierungen III. und IV. Ordnung braucht man solche Hülfen selten. Wenn die Sätze nur teilweise lückenhaft, dafür aber zahlreicher sind, kann man sich wohl dennoch mit Mittelbildungen begnügen.

Setzen wir hiernach die Stations-Ausgleichung als erledigt voraus, und auch die Centrierungen berücksichtigt, so kommt noch die Frage der *Orientierung*, d. h. der Anpassung der gemessenen Richtungen an die Axen-Richtungen des Coordinaten-Systems, oder Anschluss an trigonometrische Azimute.

Diese Orientierung wird stufenweise erreicht, und hängt mit der trigonometrischen Berechnung und mit der Ausgleichung zusammen.

Wir haben schon bei den Messungen bemerkt, dass es nützlich ist, von vornherein den ersten Satz *vorläufig* zu orientieren, so dass die Ablesung 0° ungefähr nach Norden kommt.

Das spätere genaue Orientieren geschieht im Anschluss an mindestens *ein* trigonometrisches Azimut.

Häufig hat man aber an mehrere feste Azimute anzuschliessen, was wir an dem früheren kleineren Beispiel Wasserturm (2) § 70. S. 219 zeigen wollen mit der Annahme, dass für Techn. Hochschule S und für Ägidius endgültige Azimute vorliegen.

Wasserturm, Centrum (Flaggenstange).

Zielpunkt	Beobachtete Richtungen α	Endgültige Azimute φ	Unterschiede $\varphi - \alpha$	Endgültig orientierte Richtungen $\alpha - 19{,}7'' = A$	Verbesserung $\varphi - A = v$
Techn. Hochschule S	20° 30′ 43,3″	20° 30′ 20,2″	— 23,1″	20° 30′ 23,6″	— 3,4″
Christus-Turm . .	33 26 32,5			33 26 12,8	
Ägidius-Turm . .	71 17 25,5	71 17 9,2	— 16,3	71 17 5,8	+ 3,4
Waterloo-Säule . .	73 19 5,1			73 18 45,4	
		Summe	— 39,4″	Summe	— 0,0″
		Mittel	— 19,7″		

(In sachlicher Beziehung bemerken wir hiezu, dass dieses einfache von § 67. und § 70. hierhergeführte Beispiel auf zwei Richtungs-Sätzen mit einem Nonien-Instrument beruht, und zu den genaueren Messungen, die wir im folgenden § 73. vorführen werden, in keiner Beziehung steht.)

Endgültige Abrisse erhält man erst nach der Ausgleichung des trigonometrischen Netzes, bzw. nach der Ausgleichung der aufeinanderfolgenden Punkt-Einschaltungen, indem dann jeder gemessenen Richtung ein endgültiges Azimut gegenüber steht. Man setzt dann auch noch die Entfernungs-Logarithmen und vielleicht noch anderes bei, um für weitere Rechnungen alles beisammen zu haben.

Es ist hier das amtliche Werk zu erwähnen: „Die Königlich Preussische Landes-Triangulation. Abrisse, Coordinaten und Höhen u. s. w. VII. Teil. Berlin 1885 (Mittler & Sohn)“, welches die wichtigsten Resultate der Landes-Aufnahme in Form von „Abrissen“ veröffentlicht.

Bei der Bildung der Abrisse kommen manche Formfragen vor, weshalb wir im Folgenden einige Bestimmungen, welche bei der trigonometrischen Abteilung der Landes-Aufnahme seit 1883 gelten, hier vorführen:

Die Abrisse sollen neben dem Verzeichnis der Coordinaten und Höhen eine vollständige und bequem zu handhabende Grundlage für alle weiter zu machende Anwendungen bilden.

Der Ausdruck „*Station*“ bezieht sich auf die Örtlichkeit, nicht auf einen bestimmten Punkt. In diesem Sinne giebt es „verschiedene Punkte derselben Station“, als: Centrum, Beobachtungspunkt, Zielpunkt u. s. w. Dagegen soll dieser Ausdruck nicht in der Bedeutung eines Punktes gebraucht werden, wo beobachtet ist, im Gegensatz zu einem bloss von aussen angeschnittenen Punkt. Es giebt daher auch „bloss angeschnittene Stationen“ und „Stationen IV. Ordnung“.

Auf jeder Station muss ein Punkt vorhanden sein, auf welchen sämtliche Messungs-Resultate bezogen werden. Dieser Punkt heisst das *Centrum der Station*, und ist als der eigentliche Dreieckspunkt anzusehen, er mag im Felde bezeichnet sein oder nicht, d. i. centrisch oder excentrisch festgelegt sein. Der Ausdruck „*Dreieckspunkt*“ ist demnach identisch mit „Centrum“, ist aber nur zu gebrauchen, wo von dem Vorhandensein anderer Stationspunkte stillschweigend abgesehen wird.

Alle in die Netzausgleichung einzuführende Richtungen und Entfernungen sind die auf die Centren reduzierten.

Ist auf einer Station ein Gebäude mit gutem Zielpunkt für die niederen Ordnungen und Kleinvermessungen vorhanden (Turmspitze, Turmmitte u. s. w.), so ist derselbe als Centrum zu nehmen. Wenn der einzustellende Gebäudeteil keinen hinreichend scharf bestimmten Mittelpunkt hat, oder auf die Dauer nicht fest genug erscheint, um als Punkt I. Ordnung genommen zu werden, während er für die niederen Ordnungen genügt, so soll er nominell auch von jener als Centrum genommen, faktisch aber ein ideeller Punkt dafür an die Stelle gesetzt werden, der so nahe, wie dies der Mangel an Regelmässigkeit und Festigkeit des Gebäudeteils überhaupt zulässt, mit dessen Mittelpunkt zusammenfällt, und der durch seine Lage zu einer besonders herzustellenden Festlegung oder zu ohnehin vorhandenen Festpunkten der Station scharf zu definieren ist. Selbstverständlich ist in solchen Fällen der betreffende Gebäudeteil nur für die niederen Ordnungen als Zielpunkt zu benützen, für welche eine Unsicherheit von einigen Centimetern allenfalls ausser Acht gelassen werden kann.

Zur Benennung eines bestimmten Punktes einer Station ist eine nähere Bezeichnung dem Stationsnamen hinzuzufügen. Hiervon allein ausgenommen ist das Centrum, wenn es vorschriftsmässig, d. i. centrisch mit Pfeiler und Platte (bei den Punkten III. und IV. Ordnung vor 1875: mit Pfeiler allein) festgelegt ist, in welchem Falle es mit dem Stationsnamen allein benannt wird. Die nähere Bezeichnung besteht in der Regel in der Angabe derjenigen Vorrichtung oder desjenigen Gebäudeteils, worauf oder wodurch der Punkt bezeichnet ist. Z. B.: Petersberg, Südpfeiler; Petersberg, Nordwestpfeiler; Rugard, Granitpfeiler u. s. w.

Nähere Bezeichnungen, wie: Centrum, Beobachtungspunkt, Zielpunkt, Leuchtpunkt u. s. w. sind nur in Ermangelung solcher von vorstehender Art anzuwenden.

Die einmal eingeführte Benennung eines Punktes muss einschliesslich der näheren Bezeichnung in gleichem Wortlaut und gleicher Orthographie überall wieder angewendet werden, wo der Punkt vorkommt, sei es in den Abrissen (als Überschrift oder als Richtungspunkt) oder im Coordinaten-Verzeichnis. In der Kolumne „Richtung nach" der Abrisse ist bei Punkten, die derselben Station angehören, wie der Abrisspunkt, der Stationsname fortzulassen, und der Punkt nur mit seiner näheren Bezeichnung, bzw. mit „Festlegung" zu benennen.

Der Abriss eines Punktes enthält die auf den letzteren als Pol bezogenen sphäroidischen Polar-Coordinaten: Richtungswinkel und Logarithmus der Entfernung gewisser anderer Punkte (*Richtungspunkte*). Die Nullrichtung der Richtungswinkel ist eine Parallele zum Hauptmeridian (31° östlich von Ferro), von deren nördlichem Arm die Richtungswinkel nach rechts gezählt werden.

Jeder Punkt einer Station, von welchem als Pol ein Abriss aufgestellt oder aufzustellen ist, heisst ein *Abrisspunkt*, und jede Station, der ein solcher Punkt angehört: eine *Abriss-Station.*

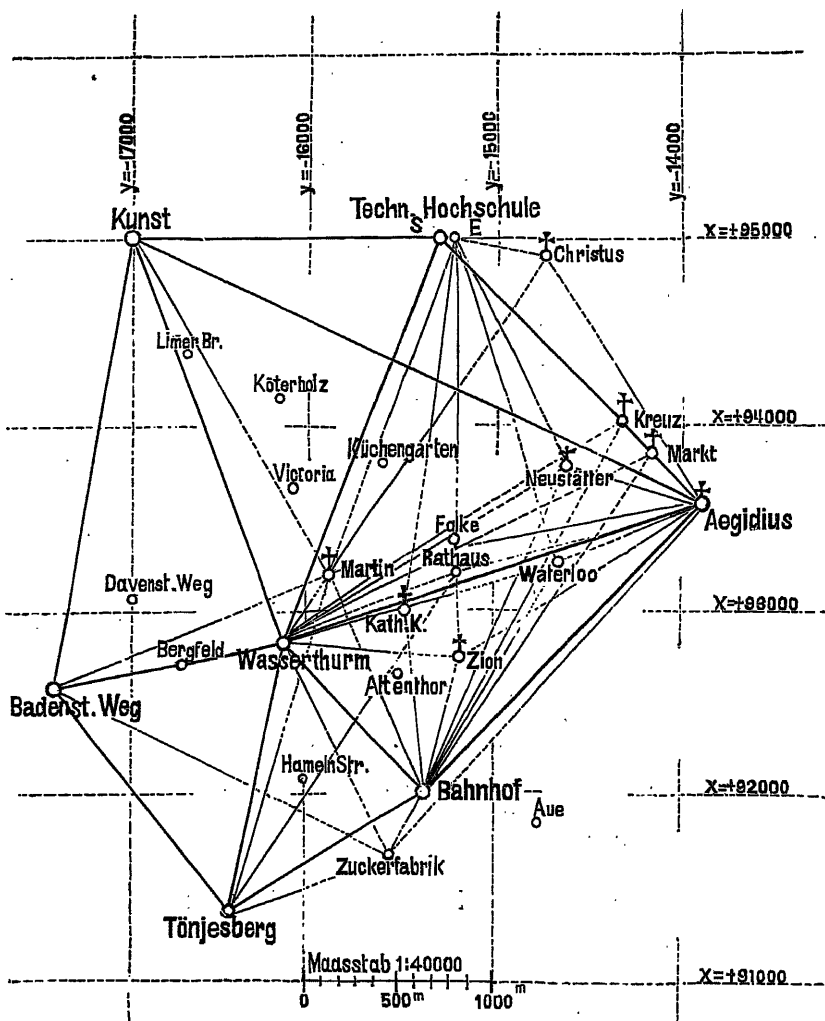
Es müssen nicht nur vom Centrum, sondern auch von besonders wichtigen excentrischen Beobachtungspunkten Abrisse aufgestellt werden. Ferner müssen die Abrisse nicht nur die Polar-Coordinaten von Punkten anderer Stationen, sondern auch diejenigen bemerkenswerter Punkte derselben Station, d. i. die *Centrier-Elemente* der Stationspunkte, enthalten.

§ 73. Grösseres Beispiel einer Triangulierung.

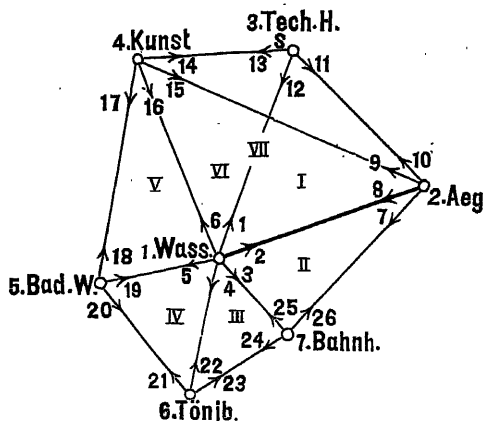
Um ein zusammenhängendes Triangulierungs-Beispiel zu haben, an welches sich nachher einzelne Aufgaben anschliessen können, teilen wir hier die Resultate einer Triangulierung mit, welche im Sommer 1887 in Linden bei Hannover, mit Erstreckung auf den südwestlichen Teil von Hannover selbst, von uns ausgeführt wurde. Das Hauptnetz ist in Fig. 2. (S. 229) gezeichnet, und dasselbe Netz mit weiteren Einschaltungen ist nochmals in Fig. 1. (S. 228) grösser gegeben.

Als Basis diente die Linie Ägidius – Wasserturm mit den schon auf S. 188 angegebenen rechtwinkligen Coordinaten der beiden Punkte Ägidius und Wasserturm. Der Punkt *Ägidius* mit diesen Coordinaten stammt unmittelbar von der *Gauss*schen

Triangulierung von 1821—1844 her, wie wir schon in Band I. S. 146 mitgeteilt haben (*Gauss-Wittstein*sches Coordinaten-Verzeichnis S. 36).

Fig. 1.*)
Triangulierung von Linden (Massstab 1 : 40 000).
7 Hauptpunkte, 10 vorwärts eingeschnittene Punkte, 10 rückwärts eingeschnittene Punkte.

*) In Fig. 1. sind ausser den Hauptlinien des Netzes Fig. 2. (S. 229) nur noch diejenigen Strahlen gezogen, welche von den sieben Hauptpunkten nach vorwärts eingeschnittenen Punkten gehen; die rückwärts eingeschnittenen Punkte sind ohne Strahlen eingetragen, weil in dem kleinen Massstab das Eintragen aller Strahlen zur Undeutlichkeit führen würde.

Der zweite Basispunkt *Wasserturm* wurde durch unsere pothenotische Einschaltung und Ausgleichung gewonnen, welche in Band I. S. 151 mitgeteilt ist.

Fig. 2.
Triangulierung von Linden. Hauptnetz.
(Massstab 1 : 80000.)

Der Umstand, dass hiernach die Coordinaten vom Wasserturm mittlere Fehler von $\pm 0{,}62^m$ und $\pm 0{,}32^m$ haben, ist durch die Ungenauigkeit der benützten alten Anschlusspunkte begründet (vgl. Band I. § 62.); und wenn wir nun trotzdem diese zwei Punkte Ägidius und Wasserturm mit den angegebenen Coordinaten festhalten, und alles Weitere auf Millimeter genau darauf gründen, so hat das zunächst die Bedeutung, dass wir auch auf eine mangelhafte Basis doch eine genaue Triangulierung gründen können, welche wenigstens *in sich selbst* konsequent und gut ist.

Zweitens aber werden wir später im Stande sein, wenn mit dem Fortschreiten der Landes-Aufnahme neue scharfe Coordinaten der beiden Basispunkte Ägidius und Wasserturm in irgend welchem System zur Verfügung sein werden, unsere Coordinaten *umzurechnen*, wozu ähnliche Formeln, wie (18)—(22) § 61. S. 196—197, aufzustellen sein werden.

Nach diesen Vorbemerkungen führen wir die folgenden Basis-Zahlenwerte*) wie fehlerfrei in die Rechnung ein:

	y	x	
Ägidius, Turm, Helmstange unter dem Knopf	$-13879{,}790^m$	$+93575{,}890^m$	(1)
Wasserturm, Flaggenstange in der Zinnenhöhe	$-16145{,}760$	$+92808{,}280$	(2)

*) Wir geben hiemit auch die geographischen Coordinaten dieser zwei Basispunkte, sowie für den Coordinaten-Nullpunkt Göttingen, indem mit den *Gauss*schen Annahmen für Göttingen und mit den *Bessel*schen Erddimensionen die beiden anderen Punkte von uns berechnet wurden:

Punkt	*Breite*	*Länge*	*Meridian-Convergenz*
Göttingen	51° 31′ 47,850″	27° 36′ 28,200″	0° 0′ 0,000″
Ägidius	52° 22′ 15,191″	27° 24′ 14,474″	0° 9′ 41,097″
Wasserturm	52° 21′ 50,131″	27° 22′ 14,822″	0° 11′ 15,796″.

Daraus wurde abgeleitet:

Entfernung Ägidius—Wasserturm	=	$2392{,}456^m$ (*log* = 3.378 8439)	(3)
trig. Azimut „ „	=	251° 17′ 9,25″	(4)
oder „ „ Wasserturm—Ägidius	=	71° 17′ 9,25″	

An die Basis Ägidius—Wasserturm wurde das in Fig. 2. gezeichnete Sieben-Eck angeschlossen, das meist Türme, und nur im Süden die drei Bodenpunkte Badenstedter Weg, Tönjesberg und Bahnhof hat. Diese drei Punkte sind nach Fig. 3. § 66. S. 207 versteint (mit Metallbolzen in den Steinen). Über die Punktbezeichnungen und Centrierungen auf den Türmen wurde gelegentlich einiges in § 71. S. 221—223 mitgeteilt.

Nach diesem ist über die Winkel-Messung zu berichten. Dieselbe geschah mit dem Mikroskop-Theodolit *Bamberg* S. 144, nach dem Muster von § 68. S. 214—215, in je 8 vollen Sätzen, so dass das Beispiel von § 69. S. 216 die *Hälfte* der auf Badenstedter Weg für diesen Zweck gemessenen Sätze enthält. Ausnahmsweise wurde auf dem Hauptturm *S* der technischen Hochschule und auf dem Kunstturm bei Herrenhausen Repetitions-Messung mit einem Nonien-Instrument angewendet, was mit Angabe der Gründe schon in § 67. S. 212 berichtet worden ist.

Nun geben wir sofort (auf S. 231) den endgültigen Abriss*) der Triangulierung *nach* der Ausgleichung.

Die ausgeglichenen Richtungen sind mit den trigonometrischen Azimuten identisch, und die beobachteten Richtungen sind ebenfalls diesen Azimuten angepasst. Die als beobachtet aufgeführten Richtungen haben dadurch ihren Charakter als *Original*-Richtungs-Beobachtungen durchaus nicht verloren, weil ja Richtungssätze im ganzen beliebige Verschiebungen erleiden können.

Beispielsweise sind die beobachteten und ausgeglichenen Richtungen auf Ägidius zuerst diese gewesen:

	Ägidius beobachtet	*v*	*ausgeglichen*	
Bahnhof . . .	223° 21′ 9,8″	—0,89	223° 21′ 8,91″	(5)
Wasserturm . .	251 17 9,3	+0,09	251 17 9,39	
Kunst	293 58 15,2	+1,68	293 58 16,88	
Techn. Hochschule	314 56 1,2	—0,89	314 56 0,31	

Der trigonometrische Anschluss verlangt aber, nach (4), dass die Richtung Ägidius—Wasserturm = 251° 17′ 9,25″ werde, und deshalb wurden die sämtlichen Richtungen der vorstehenden Tabelle (5) noch um 0,14″ vermindert, und so sind sie in der grossen Tabelle von S. 231 aufgeführt.

In dem Abriss S. 231 sind auch einige Zahlen mit aufgenommen, welche mit der Ausgleichung und mit der *ebenen* Triangulierung nichts zu thun haben, nämlich die Nordrichtungen auf den Punkten Wasserturm, Ägidius und Technische Hochschule. Vgl. hiezu die Anmerkung unten auf S. 229.

Aus den Differenzen der verschiedenen Richtungen bildet man auch die Dreiecks-Winkel, und man erhält dadurch folgende 7 Dreiecks-Schlüsse, nach der Numerierung von Fig. 2. S. 229:

(Fortsetzung auf S. 232.)

*) Die Messungen auf dem Ägidius-Turm sind nicht von uns gemacht, sondern von dem Vermessungs-Dirigenten der Landes-Aufnahme, Herrn Premierlieutenant *Matthiass*, welcher dieselben nebst den Centrierungs-Elementen im Juli 1887 mitteilte.

Endgültiger Abriss der Triangulierung. (Fig. 2. S. 229.)

	Beobachtete Richtung; orientiert	Verbesserung v	Ausgeglichene Richtung; trigon. Azimut	*log* der Entfernung; *log s*
	1. Wasserturm, Flaggenstange in Zinnenhöhe 1887.			
Nord			0° 11′ 15,80″	
1. Techn. Hochschule *S*	21° 30′ 20,87″	− 0,67″	20° 30′ 20,20″	3.371 9186
2. Ägidius	71 17 9,97	− 0,72	71 17 9,25	3.378 8439
3. Bahnhof	135 10 16,27	+ 0,26	135 14 16,53	3.049 7386
4. Tönjesberg . . .	192 20 33,47	− 0,61	192 20 32,86	3.163 6373
5. Badenstedter Weg .	259 44 34,57	+ 0,73	259 44 35,30	3.116 1512
6. Kunst	338 10 36,67	+ 1,01	338 10 37,68	3.366 6752
		0,00		
	2. Ägidius, Turm, Helmstange 1887.			
Nord			0° 9′ 41,10″	
7. Bahnhof	223° 21′ 9,66″	− 0,89″	223° 21′ 8,77″	3.332 5617
8. Wasserturm . . .	251 17 9,16	+ 0,09	251 17 9,25	3.378 8439
9. Kunst	293 58 15,06	+ 1,68	293 58 16,74	3.534 8234
10. Techn. Hochschule *S*	314 56 1,06	− 0,89	314 56 0,17	3.308 7206
		0,01		
	3. Technische Hochschule, Hauptturm S, Helmstange 1887.			
Nord			0° 10′ 41,73″	
11. Ägidius	134° 56′ 0,72″	− 0,54″	134° 56′ 0,18″	3.308 7206
12. Wasserturm . . .	200 30 18,22	+ 1,97	200 30 20,19	3.371 9186
13. Kunst	268 26 54,42	− 1,43	268 26 52,99	3.227 9460
		0,00		
	4. Kunstturm bei Herrenhausen, Steigrohr.			
14. Techn. Hochschule *S*	88° 26′ 52,75″	+ 0,26″	88° 26′ 53,01″	3.227 9460
15. Ägidius	113 58 15,45	+ 1,32	113 58 16,77	3.534 8234
16. Wasserturm . . .	158 10 39,45	− 1,77	158 10 37,68	3.366 6752
17. Badenstedter Weg .	189 58 46,55	+ 0,20	189 58 46,75	3.385 4369
		+ 0,01		
	5. Badenstedter Weg, Stein mit Bolzen.			
18. Kunst	9° 58′ 47,17″	− 0,37″	9° 58′ 46,80″	3.385 4369
19. Wasserturm . . .	79 44 35,95	− 0,65	79 44 35,30	3.116 1512
20. Tönjesberg . . .	140 43 26,95	+ 1,02	140 43 27,97	3.187 1994
		0,00		
	6. Tönjesberg, Stein mit Bolzen.			
21. Badenstedter Weg .	320° 43′ 29,10″	− 1,14″	320° 43′ 27,96″	3.187 1994
22. Wasserturm . . .	12 20 32,10	+ 0,76	12 20 32,86	3.163 6373
23. Bahnhof	60 18 54,50	+ 0,38	60 18 54,88	3.102 9559
		0,00		
	7. Bahnhof, Stein mit Bolzen.			
24. Tönjesberg . . .	240° 18′ 55,36	− 0,48″	240° 18′ 54,88″	3.102 9559
25. Wasserturm . . .	315 14 16,76	− 0,23	315 14 16,53	3.049 7386
26. Ägidius	43 21 8,06	+ 0,72	43 21 8,78	3.332 5617
		+ 0,01		

(Fortsetzung von S. 230.)

	Beobachtet	*Ausgeglichen*
I.		
(1, 2)	50° 46′ 49,1″	50° 46′ 49,05″
(8, 10)	63 38 51,9	63 38 50,92
(11, 12)	65 34 17,5	65 34 20,01
	179° 59′ 58,5″	179° 59′ 59,98″
II.		
(2, 3)	63° 57′ 6,3″	63° 57′ 7,28″
(7, 8)	27 55 59,5	27 56 0,48
(25,26)	88 6 51,3	88 6 52,25
	179° 59′ 57,1″	180° 0′ 0,01″
III.		
(3, 4)	57° 6′ 17,2″	57° 6′ 16,33″
(22,23)	47 58 22,4	47 58 22,02
(24,25)	74 55 21,4	74 55 21,65
	180° 0′ 1,0″	180° 0′ 0,00″

	Beobachtet	*Ausgeglichen*
IV.		
(4, 5)	67° 24′ 1,1″	67° 24′ 2,44″
(19,20)	60 58 51,0	60 58 52,67
(21,22)	51 37 3,0	51 37 4,90
	179° 59′ 55,1″	180° 0′ 0,01″
V.		
(5, 6)	78° 26′ 2,1″	78° 26′ 2,38″
(16,17)	31 48 7,1	31 48 9,07
(18,19)	69 45 48,8	69 45 48,50
	179° 59′ 58,0″	179° 59′ 59,95″
VI.		
(6, 1)	42° 19′ 44,2″	42° 19′ 42,52″
(12,13)	67 56 36,2	67 56 32,80
(14,16)	69 43 46,7	69 43 44,67
	180° 0′ 7,1″	179° 59′ 59,99″
VII.		
(6, 2)	93° 6′ 33,3″	93° 6′ 31,57″
(8, 9)	42 41 5,9	42 41 7,49
(15,16)	44 12 24,0	44 12 20,91
	180° 0′ 3,2″	179° 59′ 59,97″

Was die Ausgleichung betrifft, so wurde dieselbe nach dem Muster des Vierecks-Beispiels bewirkt, welches wir in Band I. § 74. S. 216—221 in aller Ausführlichkeit gegeben haben.

Es bestehen 9 Bedingungs-Gleichungen, nämlich 7 unabhängige Dreiecksschlüsse und 2 Seiten-Gleichungen (entsprechend den Formeln (14*) in Band I. S. 183).

Die Dreiecksschlüsse geben folgende 7 Gleichungen:

$$\begin{array}{rl}
\text{I.} & v_2 - v_1 + v_{10} - v_8 + v_{12} - v_{11} - 1{,}5'' = 0 \\
\text{II.} & v_3 - v_2 + v_8 - v_7 + v_{26} - v_{25} - 2{,}9'' = 0 \\
\text{III.} & v_4 - v_3 + v_{23} - v_{22} + v_{25} - v_{24} + 1{,}0'' = 0 \\
\text{IV.} & v_5 - v_4 + v_{20} - v_{19} + v_{22} - v_{21} - 4{,}9'' = 0 \\
\text{V.} & v_6 - v_5 + v_{17} - v_{16} + v_{19} - v_{18} - 2{,}0'' = 0 \\
\text{VI.} & v_1 - v_6 + v_{13} - v_{12} + v_{16} - v_{14} + 7{,}1'' = 0 \\
\text{VII.} & v_2 - v_6 + v_9 - v_8 + v_{16} - v_{15} + 3{,}2'' = 0
\end{array}$$

Die beiden Seiten-Gleichungen sind zunächst in Sinus-Form:

A. Centralsystem Wasserturm:

$$\frac{\sin(10-8)\sin(13-12)\sin(17-16)\sin(20-19)\sin(23-22)\sin(26-25)}{\sin(12-11)\sin(16-14)\sin(19-18)\sin(22-21)\sin(25-24)\sin(8-7)} = 1$$

logarithmischer Widerspruch $= + 0.0000\,038$.

B. Diagonale Ägidius-Kunst:

$$\frac{\sin(10-8)\sin(1-6)\sin(15-14)}{\sin(16-14)\sin(10-9)\sin(2-1)} = 1$$

logarithmischer Widerspruch $= - 0.0000\,155$.

Dieses führt (in Einheiten der 6. Logarithmen-Decimale) auf folgende zwei lineare Gleichungen:

$$\text{A)}\quad +3{,}97\,v_7 - 5{,}01\,v_8 + 1{,}04\,v_{10} + 0{,}96\,v_{11} - 1{,}81\,v_{12} + 0{,}85\,v_{13} + 0{,}78\,v_{14} - 4{,}17\,v_{16} + 3{,}39\,v_{17} + 0{,}77\,v_{18} - 1{,}94\,v_{19} + 1{,}17\,v_{20} + 1{,}67\,v_{21} - 3{,}57\,v_{22} + 1{,}90\,v_{23} + 0{,}57\,v_{24} - 0{,}64\,v_{25} + 0{,}07\,v_{26} + 3{,}8 = 0$$

$$\text{B)}\quad +4{,}02\,v_1 - 1{,}71\,v_2 - 2{,}31\,v_6 - 1{,}04\,v_8 + 5{,}49\,v_9 - 4{,}45\,v_{10} - 3{,}63\,v_{14} + 4{,}41\,v_{15} - 0{,}78\,v_{16} - 15{,}5 = 0$$

Nimmt man diese 2 Gleichungen mit den obigen 7 Gleichungen I. bis VII. zusammen (wobei die letzteren auch noch nach $v_1\ v_2\ v_3 \ldots v_{26}$ zu ordnen sind), so kann man die Normalgleichungen bilden.

Wir haben aber zuvor die Gleichungen in eine andere Ordnung gestellt, damit in den Normalgleichungen die vollen Glieder möglichst ans Ende gerückt werden, und die leeren Stellen an den Anfang kommen. Eine solche Umordnung zur Eliminations-Erleichterung ist wohl zu überlegen, und kann viel überflüssige Arbeit ersparen.

Wir haben folgende Ordnung angenommen:

frühere Bezeichnung:	III.	IV.	V.	VI.	I.	II.	VII.	B.	A.
Coëfficienten:	a	b	c	d	e	f	g	h	i
Korrelaten:	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9

damit werden die Normalgleichungen in abgekürzter Schreibweise:

$\underline{+6k_1}$	$-2k_2$	..	..	..	$-2k_6$	..	..	$+4{,}26k_9$	$+1{,}00$	$=0$
	$\underline{+6k_2}$	$-2k_3$	..	..	..	..	..	$-2{,}13k_9$	$-4{,}90$	$=0$
		$\underline{+6k_3}$	$-2k_4$	..	..	$-2k_7$	$-1{,}53k_8$	$+4{,}85k_9$	$-2{,}00$	$=0$
			$\underline{+6k_4}$	$-2k_5$	..	$+2k_7$	$+9{,}18k_8$	$-2{,}29k_9$	$+7{,}10$	$=0$
				$\underline{+6k_5}$	$-2k_6$	$+2k_7$	$-9{,}14k_8$	$+3{,}28k_9$	$-1{,}50$	$=0$
					$\underline{+6k_6}$	$-2k_7$	$+0{,}67k_8$	$-8{,}27k_9$	$-2{,}90$	$=0$
						$\underline{+6k_7}$	$+1{,}94k_8$	$+0{,}83k_9$	$+3{,}20$	$=0$
							$\underline{+108{,}68k_8}$	$+1{,}00k_9$	$-15{,}50$	$=0$
								$\underline{+101{,}94k_9}$	$+3{,}80$	$=0$

Die Auflösung dieser 9 Gleichungen giebt:

$$k_1 = +0{,}46 \qquad k_2 = +1{,}07 \qquad k_3 = +0{,}34 \qquad k_4 = -1{,}39 \qquad k_5 = +0{,}50$$
$$k_6 = +0{,}72 \qquad k_7 = +0{,}02 \qquad k_8 = +0{,}303 \qquad k_9 = -0{,}0425$$

Nun bildet man eine Tabelle ähnlich wie (9) in Band I. S. 218, und berechnet darin alle Verbesserungen v, welche wir schon in dem Abriss S. 231 mitgeteilt haben.

Die algebraische Summe dieser v ist stationsweise, und im ganzen, gleich Null, was als Rechenprobe dient.

Die Quadratsumme der v findet man durch Einzel-Ausrechnung:

$$[v\,v] = 22{,}98 \tag{6}$$

Hiezu hat man die Probe $-[w\,k]$, welche folgendes giebt:

		w	k	$-wk$	
III.	1.	+ 1,0	+ 0,46		— 0,46
IV.	2.	— 4,9	+ 1,07	+ 5,25	
V.	3.	— 2,0	+ 0,34	+ 0,68	
VI.	4.	+ 7,1	— 1,39	+ 9,87	
I.	5.	— 1,5	+ 0,50	+ 0,75	
II.	6.	— 2,9	+ 0,72	+ 2,08	
VII.	7.	+ 3,2	+ 0,02		— 0,06
B.	8.	—15,5	+ 0,303	+ 4,70	
A.	9.	+ 3,8	— 0,0425	+ 0,16	
				+23,49	— 0,52

$$+23{,}49 - 0{,}52 = +22{,}97 \tag{7}$$

Man hat also, in guter Übereinstimmung, aus (6) und (7) den mittleren Fehler einer beobachteten Richtung:

$$m = \sqrt{\frac{22,98}{9}} = \pm 1,60''. \qquad (8)$$

Nun folgt die Berechnung aller Dreiecks-Seiten mit der Basis (3); die so erhaltenen Seiten-Logarithmeu sind bereits in dem Abrisse S. 231 mitgeteilt.

Ferner schliesst sich hieran die Coordinaten-Berechnung mit den früher schon bei (1) , (2) , (3) , (4) gegebenen Elementen für die Basispunkte.

Die Resultate sind:

	y	x
1. Ägidius, Helmstange	— 13879,790^m	+ 93575,890^m
2. Wasserturm, Flaggenstange . .	— 16145,760	+ 92808,280
3. Techn. Hochschule *S*	— 15320,943	+ 95013,695
4. Kunst	— 17010,553	+ 94967,919
5. Badenstedter Weg	— 17431,505	+ 92575,620
6. Tönjesberg	— 16457,328	+ 91384,373
7. Bahnhof	— 15356,150	+ 92012,085

Hiezu gehören noch einige Nebenpunkte (vgl. S. 221—222):

	y	x
1a. Ägidius, Holztisch (*Matthiass* I.)	— 13879,745^m	+ 93576,064^m
1b. „ Bohle (*Matthiass* II.) .	— 13880,656	+ 93577,039
Wasserturm Pfeilermitte (Heliotrop) .	— 16145,080	+ 92808,697
Techn. Hochschule Eisenplatte *S'* .	— 15321,079	+ 95010,044
„ „ Eisenplatte *E* .	— 15266,847	+ 95002,299
„ „ Süd-Ost-Turm *SO*.	— 15278,280	+ 95030,091

Um alle Coordinaten beisammen zu haben, geben wir sofort auch alle in dem Netze von Fig. 1. S. 228 enthaltenen, weiter eingeschalteten Punkte, und zwar mit Beifügung der mittleren Coordinaten-Fehler $\pm m_y$ und $\pm m_x$, welche bei der Ausgleichung der Einschaltungen bestimmt worden sind.

Vorwärts eingeschnittene Punkte:

Punkt	y	m_y	x	m_x
8. Markt-Turm	— 14154,136^m	± 26^{mm}	+ 93836,937^m	± 25^{mm}
9. Kreuz-Turm	— 14331,880	± 4	+ 94017,271	± 4
10. Neustädter-Turm	— 14617,234	± 11	+ 93768,675	± 7
11. Waterloo-Säule	— 14657,523	± 19	+ 93254,386	± 14
12. Rathaus Linden, Turm . .	— 15205,037	± 13	+ 93192,819	± 10
13. Martin-Turm	— 15881,797	± 3	+ 93169,470	± 5
14. Kath. Kirche, Turm (Linden) .	— 15504,414	± 9	+ 92954,835	± 8
15. Zion-Kirche, Turm	— 15190,778	± 8	+ 92728,019	± 9
16. Christus-Kirche Turm . . .	— 14769,055	± 12	+ 94893,369	± 5
17. Zuckerfabrik Kamin	— 15552,257	± 3	+ 91681,003	± 4

Rückwärts eingeschnittene Punkte:

Punkt	y	m_y	x	m_x
18. Falke	— 15190,968^m	± 4^{mm}	+ 93403,173^m	± 12^{mm}
19. Alten-Thor-Platz	— 15518,258	± 19	+ 92644,948	± 19
20. Hameln-Strasse	— 16023,201	± 78	+ 92098,650	± 41
21. Viktoria-Strasse	— 16062,855	± 11	+ 93666,423	± 27
22. Küchengarten	— 15603,260	± 28	+ 93785,256	± 10
23. Limmer-Brücke	— 16723,704	± 10	+ 94345,538	± 17
24. Bergfeld	— 16719,864	± 4	+ 92704,070	± 2
25. Davenstedter Strasse . . . (Nivell.-Stein (42))	— 17003,410	± 6	+ 93110,584	± 6
26. Aue (Nivell.-Stein (69)) . .	— 14767,237	± 14	+ 91914,830	± 5
27. Köterholz	— 16193,917	± 34	+ 94120,366	± 22

Alle diese vorwärts und rückwärts eingeschnittenen Punkte sind in Fig. 1. S. 228 eingetragen, und mit Rücksicht auf die Anmerkung zu Fig. 1. S. 228 kann man sich nun wohl den gewählten Gang der Einschaltungen im allgemeinen vorstellen.

Indessen sind nicht etwa zuerst *alle* vorwärts eingeschnittenen Punkte *zuerst* berechnet worden, sondern es wurden auch einige pothenotische Punkte, welche sehr viele Strahlen hatten, zum voraus bestimmt, und von diesen aus wieder Vorwärtsschnitte auf schwache Punkte, z. B. Christus- und Kreuz-Turm, abgegeben. So wurde die Genauigkeit im ganzen ziemlich ins Gleichgewicht gebracht.

Um nun aber auch diese Entwicklung unserer Triangulierung, *nach* der Ausgleichung des grundlegenden Sieben-Ecks, deutlicher zeigen zu können, wollen wir wenigstens die Abrisse von einigen wenigen Punkten, mit den im Netz ausgeglichenen festen Strahlen und mit den dadurch orientierten freien Strahlen, hier mitteilen.

Wir wählen hiezu die vier Punkte: *Wasserturm, Ägidius, Technische Hochschule* und *Bahnhof*; wir haben aber hiebei auf Wasserturm und Technische Hochschule die *excentrischen* Standpunkte gelassen, und nur auf Ägidius die Richtungen auf die Helmstange centriert. Bahnhof ist selbst centrisch, soweit es hier vorgeführt wird (während für Weiteres sogar noch *zwei* excentrische Standpunkte Bahnhof gebraucht wurden).

Standpunkt Wasserturm, Pfeilermitte.

(y = — 16145,080 x = + 92808,697)

Zielpunkt	Beobachtete Richtung α	Azimut φ	Verschiebung $\varphi - \alpha = \delta$	Orientierte Richtung
Rathaus	67° 47′ 11,25″			67° 46′ 25,75″
Ägidius	71 18 10,00	71° 17′ 24,50″	— 45,50″	71 17 24,50
Waterloo	73 20 1,78			73 19 16,28
Kathol. Kirche . .	77 9 47,20			77 9 1,70
Zion.	94 50 41,78			94 49 56,28
Zuckerfabrik . . .	152 16 53,85			152 16 8,35

Diese sechs Richtungen stammen aus zwei (je vierfach genommenen) Sätzen, welche an dem *einen* festen Punkt Ägidius angebunden sind. Wer seiner Messungen sicher ist, kann sich wohl auf *einen* festen Anbindestrahl beschränken, doch nimmt man gewöhnlich deren mehrere. Das folgende Beispiel zeigt *vier* feste Anbindestrahlen, doch ist das nicht so aufzufassen, als ob *ein* Satz mit *vier* festen Strahlen gemessen wäre, sondern es kam darauf an, die in verschiedenen Sätzen gemessenen Richtungen den vier festen Strahlen möglichst anzupassen.

Standpunkt (centriert) Ägidius Helmstange.

($y = -13879{,}790$ $x = +93575{,}890$)

Zielpunkt	Beobachtete Richtung α	Azimut φ	Verschiebung $\varphi - \alpha$	Orientierte Richtung $\alpha - 0{,}14''$
Zuckerfabrik . . .	221° 25′ 52,90″			221° 25′ 52,76″
Bahnhof (Stein) . .	223 21 9,80	223° 21′ 8,77″	— 1,03″	(223 21 9,66)
Zion	237 6 25,99			237 6 25,85
Waterloo	247 32 24,90			247 32 24,76
Kathol. Kirche . .	249 5 0,96			249 4 45,82
Wasserturm, Flagge	251 17 9,30	251 17 9,25	— 0,05	(251 17 9,16)
Rathaus	253 52 41,15			253 52 41,01
Martin	258 31 28,62			258 31 28,48
Neustädter . . .	284 39 2,34			284 39 2,20
Kunst	293 58 15,20	293 58 16,74	+ 1,54	(293 58 15,06)
Marktturm . . .	313 34 37,23			313 34 37,09
Techn. Hochsch. *S.* .	314 56 1,20	314 56 0,17	— 1,03	(314 56 1,06)
Christus	325 58 54,63			325 58 54,49
		Summe	— 0,57″	
		Mittel	— 0,14″	

Die hier eingesetzten vier Azimute φ sind dieselben, welche bereits in dem Abriss der Haupttriangulierung, S. 231, als ausgeglichene Azimute vorkommen.

Die vier in Klammer gesetzten orientierten Richtungen geben gegen die ausgeglichenen Azimute φ die vier Abweichungen v:

$$-0{,}89'' \qquad +0{,}09'' \qquad +1{,}68'' \qquad -0{,}89''$$

Das sind dieselben Differenzen v, deren Summe gleich Null ist, welche schon in dem Netz-Abriss S. 231 vorkommen.

Von der technischen Hochschule geben wir zwei getrennte Sätze für den Beobachtungspunkt Eisenplatte E auf der östlichen Plattform:

Standpunkt Technische Hochschule Eisenplatte E.

($y = -15266{,}847$ $x = +95002{,}299$)

Zielpunkt	Beobachtete Richtung α	Azimut φ	Verschiebung $\varphi - \alpha$	Orientierte Richtung $\alpha - 2{,}26''$
Ägidius	135° 48′ 7,40″	135° 48′ 4,80″	— 2,60″	(135° 48′ 5,14″)
Markt	136 19 29,36			136 19 27,10
Kreuz	136 29 38,84			136 29 36,58
Neustädter . . .	152 13 46,22			152 13 43,96
Waterloo	160 46 52,70			160 46 50,44
Wasserturm . . .	201 49 52,78	201 49 50,85	— 1,93	(201 49 50,52)
		Mittel	— 2,26″	
				$\alpha - 2{,}20''$
Ägidius	135° 48′ 7,40″	135° 48′ 4,80″	— 2,60″	(135° 48′ 5,20″)
Rathaus	178 2 37,47			178 2 35,27
Zion	178 5 2,96			178 5 0,76
Martin	198 32 51,21			198 32 49,01
Wasserturm . . .	201 49 52,65	201 49 50,85	— 1,80	(201 49 50,45)
		Mittel	— 2,20″	

Auf der technischen Hochschule besteht noch ein zweiter, höherer Beobachtungspunkt S' vor dem Hauptturm S. Die daselbst gemachten Messungen werden hier nicht mitgeteilt.

Standpunkt Bahnhof, Stein, centrisch.

($y = -15356{,}150$ $x = +92012{,}085$)

Zielpunkt	Beobachtete Richtung α	Azimut φ	Verschiebung $\varphi - \alpha$	Orientierte Richtung $\alpha - 3{,}11''$
Zion	13° 0′ 25,28″			13° 0′ 22,17″
Agidius	43 21 11,09	43° 21′ 8,78″	— 2,31″	(43 21 7,98)
Wasserturm . . .	315 14 20,44	315 14 16,53	— 3,91	(315 14 17,33)
Martin	335 34 28,97			335 34 25,86
Kath. Kirche . . .	351 3 45,01			351 3 41,90
		Mittel	— 3,11″	

Diese Auswahl von vier Fällen aus den sämmtlichen Abrissen des Netzes Fig. 1. S. 228 mag genügen, um den weiteren Gang der Rechnung, nämlich die Punkteinschaltungen, klar zu machen.

§ 74. Vorwärts-Einschneiden durch zwei Strahlen.

Nachdem wir schon in § 65. eine Grundaufgabe der Triangulierung behandelt haben, wollen wir nun eine Abänderung jener Grundaufgabe behandeln, mit dem Dreieck *ABP*. Fig. 1.

Es seien die Coordinaten von *A* und von *B* gegeben, und die Coordinaten von *P* zu bestimmen. Wenn von den drei Winkeln $\alpha\ \beta\ \gamma$ wenigstens zwei unmittelbar gemessen wären, so hätte man die frühere Aufgabe § 65. Nun kommt es aber oft vor, dass die Winkel α und β nicht geradezu gemessen werden können, weil zwischen *A* und *B* nicht zusammengesehen werden kann; und sogar wenn die Ziel-Linie *AB* und *BA* möglich ist, rechnet man doch unter Umständen nicht geradezu nach den früheren Formeln von § 65, weil vielleicht noch *andere* Ziel-Linien *AC*, *AD*, *BE* u. s. w. mit benützt wurden. Wir wollen annehmen, die Punkte *C*, *D*, *E* u. s. w. seien durch Coordinaten fest gegeben, dann kann man die Azimute (*AC*), (*AD*), (*BE*) u. s. w. endgültig berechnen, und durch die Richtungsmessungen auf *A* und auf *B* auch die Azimute (*AP*) und (*BP*) bestimmen.

Oder mit anderen Worten: Man habe in *A* und in *B* *orientierte Abrisse* gebildet (§ 72.), in welchen die Azimute (*AP*) und (*BP*) vorkommen, und die Aufgabe lautet nun so:

Gegeben sind die Coordinaten $x_a\ y_a$ des Punktes *A*
" " " " $x_b\ y_b$ " " *B*
ferner die Azimute (*AP*) und (*BP*).
Gesucht sind die Coordinaten $x\,y$ des Punktes *P*.

Zur Auflösung dieser Aufgabe werden im Wesentlichen dieselben Gleichungen gebraucht wie bei der Grundaufgabe § 65.; nur hat man jetzt teilweise eine andere Aufeinanderfolge, nämlich so:

$$tang\,(AB) = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$$

$$AB = c = \frac{y_b - y_a}{sin\,(AB)} \quad \text{oder} \quad = \frac{x_b - x_a}{cos\,(AB)}.$$

Nun bildet man aus den drei Azimuten (*AB*), (*AP*), (*BP*) durch Subtractionen die drei Winkel $\alpha\ \beta\ \gamma$:

$$(AB) - (AP) = \alpha$$
$$(BP) - (BA) = \beta \quad (\text{oder} \quad (BP) - (AB) \pm 180° = \beta)$$
$$(AP) - (BP) = \gamma$$

Probe: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Sinus-Satz: $\dfrac{c}{sin\,\gamma}\,sin\,\beta = b \qquad \dfrac{c}{sin\,\gamma}\,sin\,\alpha = a$

Coordinaten-Berechnung:

$$y = y_a + b\,sin\,(AP) \qquad y = y_b + a\,sin\,(BP)$$
$$x = x_a + b\,cos\,(AP) \qquad x = x_b + a\,cos\,(BP)$$

Ein Zahlenbeispiel bilden wir mit dem Material von § 73. Wir wollen in Fig. 1. S. 228 annehmen, es werde der Zion-Turm vom Wasserturm und vom Bahnhof her eingeschnitten. Dazu haben wir in den Abrissen von Wasserturm und Bahnhof S. 235 und 237 die zwei orientierten Richtungen gefunden:

$$\text{Wasserturm-Zion} = 94^\circ\ 49'\ 56{,}28''$$
$$\text{Bahnhof-Zion} = 13^\circ\ \ 0'\ 22{,}17''.$$

Für den nächsten Zweck runden wir diese Werte auf 1″ ab, runden auch die Coordinaten auf 0,01^m ab, und erhalten damit die folgende Rechnung:

Vorwärts-Einschneiden durch zwei Strahlen.

P = Zion.

A = Wasserturm, Pfeiler. B = Bahnhof, Stein.

Fig. 2.

1)

B Bahnhof	$y_b = -15356{,}15$	$x_b = +92012{,}08$
A Wasserturm, Pf.	$y_a = -16145{,}08$	$x_a = +92808{,}70$
Differenzen	$y_b - y_a = +\ 788{,}93$	$x_b - x_a = -\ 796{,}62$

$log\ (y_b - y_a)$	2.897 038	
Erg. $log\, sin$ oder $cos\, (AB)$	0.148 419	zum grösseren
$log\ (x_b - x_a)$	$2.901\ 251_n$	zum grösseren
$log\, tang\, (AB)$	$9.995\ 787_n$	$(AC) = 315^\circ\ 16'\ 40''$
$log\ c$	3.049 670	

2)

$(AB) = 135^\circ\ 16'\ 40''$	$(AP) = 94^\circ\ 49'\ 56''$	$(BP) = 13^\circ\ \ 0'\ 22''$
$(AP) = 94\ \ 49\ \ 56$	$(BP) = 13\ \ \ 0\ \ 22$	$(BA) = 315\ \ 16\ \ 40$
$\alpha = 40^\circ\ 26'\ 44''$	$\gamma = 81^\circ\ 49'\ 34''$	$\beta = 57^\circ\ 43'\ 42''$

3)

$log\ c$	3.049 670		
$log\, sin\, \gamma$	9.995 565		
$log\, (c : sin\, \gamma)$	3.054 105	$log\, (c : sin\, \gamma)$	3.054 105
$log\, sin\, \beta$	9.927 127	$log\, sin\, \alpha$	9.812 061
$log\ b$	2.981 232	$log\ a$	2.866 166

Winkel-Probe

$\alpha =$	$40^\circ\ 26'\ 44''$
$\gamma =$	$81\ \ 49\ \ 34$
$\beta =$	$57\ \ 43\ \ 42$
	$180^\circ\ \ 0'\ \ 0''$

4)

$log\ b$	2.981 232	$log\ b$	2.981 232	$log\ a$	2.866 166	$log\ a$	2.866 166
$sin\, (AP)$	9.998 454	$cos\, (AP)$	$8.925\ 509_n$	$sin\, (BP)$	9.352 288	$cos\, (BP)$	9.988 713
$log\ \Delta y_a$	2.979 686	Δx_a	$1.906\ 741_n$		2.218 454		2.854 870

A	$y_a = -16145{,}08$	$x_a = +92808{,}70$	B	$y_b = -15356{,}15$	$x_b = +92012{,}08$
	$\Delta y_a = +\ 954{,}30$	$\Delta x_a = -\ 80{,}68$		$\Delta y_b = +\ 165{,}37$	$\Delta x_b = +\ 715{,}94$
P	$y = -15190{,}78$	$x = +92728{,}02$		$y = 15521{,}52$	$x = 92728{,}02$

5) ***Zion*** $\mathbf{y = -15190{,}78^m}$ $\mathbf{x = +92728{,}02^m}$.

Hiezu sind einige Anmerkungen zu machen:

Die *Logarithmen* stellen wir immer rechts neben einen vertikalen Strich, welcher nötigenfalls zugleich als Zeichen dient, dass man es mit Logarithmen zu thun hat, wenn der Raum nicht reicht, um überall *log* beizuschreiben.

(Diese Bemerkung soll auch für die übrigen logarithmischen Rechnungen dieses Buches gelten.)

Der Gang der Rechnung S. 239 ist durch die Numerierung 1) 2) 3) u. s. w. angedeutet.

1) Einsetzen der gegebenen Coordinaten von A und B, und Berechnung des Azimutes (AB) und der Entfernung $AB = c$ nach den Formeln von § 60. S. 191—192.

2) Berechnung der drei Dreieckswinkel α, β, γ als Azimut-Differenzen, wozu das soeben unter 1) berechnete Azimut (AB) bezw. dessen Umkehrung (BA), ausserdem aber die beiden gegebenen (aus Abrissen zu entnehmenden) Azimute (AP) und (BP) eingesetzt werden.

3) Dreiecksberechnung nach dem Sinus-Satze.

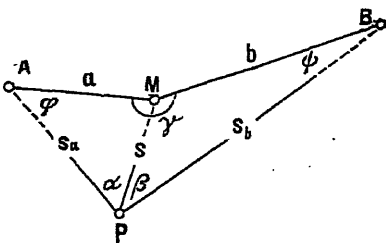
4) Coordinaten-Berechnung symmetrisch von zwei Seiten her mit Rechenprobe.

5) Herausheben des Schluss-Resultates.

Anmerkung. Unserer Berechnung S. 239 entspricht im Wesentlichen das Formular 10. der Anweisung IX vom 25. Oktober 1881: „1. Berechnung der genäherten Coordinaten aus dem Schnitte zweier Visierstrahlen." Nur ist unsere Anordnung S. 239 symmetrischer, und bringt die Seiten b und a selbst zum Ausdruck, während in jenem Formular 10. die Seiten nur mittelbar auftreten in dem Ausdruck:

$$m = \frac{y_b - y_a}{\sin\delta \sin(AB)} = \frac{x_b - x_a}{\sin\delta \cos(AB)}.$$

§ 75. Die Pothenotische Aufgabe. Allgemeines.*)

Fig. 1.

In Fig. 1. sind drei Punkte AMB gegeneinander festgelegt durch die zwei Entfernungen $AM = a$ und $BM = b$, und durch den Winkel $BMA = \gamma$.

Ein Punkt P wird gegen A, M, B bestimmt durch Messung der zwei Winkel $APM = \alpha$ und $MPB = \beta$, es sollen daraus auch die Entfernungen $AP = s_a$, $MP = s$ und $BP = s_b$ und die Winkel φ und ψ bestimmt werden.

Rein *geometrisch* ist die Lösung sehr einfach: Man beschreibt über AM einen Kreis, welcher den Winkel α fasst, und über MB einen Kreis, welcher den Winkel β fasst; dann bestimmen diese zwei Kreise durch ihren Schnitt den Punkt P.

Diese Construktion macht auch sofort begreiflich, dass es einen Ausnahmsfall giebt, in welchem die Lösung versagt; nämlich wenn zufällig alle *vier* Punkte $AMBP$ auf *einem* Kreise liegen. Von diesem Ausnahmsfall wird später mehrfach die Rede sein.

---

*) Diese wichtige Aufgabe wird allgemein nach einem französischen Mathematiker *Pothenot* benannt (vgl. den Schluss von § 77.).

Gehen wir nun aber von der Konstruktion zur Rechnung über, so haben wir zunächst in keinem der beiden Dreiecke *AMP* und *BMP* zwei bekannte Winkel, können also den Sinus-Satz nicht geradezu anwenden, um s_a, s und s_b zu bestimmen.

Betrachten wir die zwei Winkel φ und ψ als Unbekannte, so lassen sich für dieselben zwei Gleichungen aufstellen:

$$\text{Viereckssumme} \quad \alpha + \beta + \gamma + \varphi + \psi = 360^\circ$$

woraus:

$$\frac{\varphi + \psi}{2} = \frac{360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma)}{2} \tag{1}$$

Zweifache Anwendung des Sinus-Satzes giebt:

$$s = \frac{a}{\sin \alpha} \sin \varphi = \frac{b}{\sin \beta} \sin \psi \tag{2}$$

woraus:

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{\dfrac{b}{\sin \beta}}{\dfrac{a}{\sin \alpha}} \tag{3}$$

Nun handelt es sich darum, aus den zwei Gleichungen (1) und (3) die zwei Winkel φ und ψ zu bestimmen. Zu diesem Zweck setzt man den Quotienten in (3) gleich der Cotangente eines Hilfswinkels μ:

$$\frac{\dfrac{b}{\sin \beta}}{\dfrac{a}{\sin \alpha}} = \frac{1}{\operatorname{tang} \mu} = \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} \tag{4}$$

Dieses ergiebt weiter:

$$\frac{\sin \varphi - \sin \psi}{\sin \varphi + \sin \psi} = \frac{1 - \operatorname{tang} \mu}{1 + \operatorname{tang} \mu} \tag{5}$$

Nun ist einerseits:

$$\sin \varphi - \sin \psi = 2 \sin \frac{\varphi - \psi}{2} \cos \frac{\varphi + \psi}{2}$$

$$\sin \varphi + \sin \psi = 2 \cos \frac{\varphi - \psi}{2} \sin \frac{\varphi + \psi}{2}$$

Andererseits:

$$\frac{1 - \operatorname{tang} \mu}{1 + \operatorname{tang} \mu} = \operatorname{cotg} (\mu + 45^\circ)$$

und damit geht (5) über in:

$$\operatorname{tang} \frac{\varphi - \psi}{2} = \operatorname{tang} \frac{\varphi + \psi}{2} \operatorname{cotg} (\mu + 45^\circ) \tag{6}$$

Hat man hieraus $\frac{\varphi - \psi}{2}$ bestimmt, so nimmt man aus (1) noch $\frac{\varphi + \psi}{2}$ hinzu, und hat dann auch φ und ψ selbst, nämlich:

$$\frac{\varphi + \psi}{2} + \frac{\varphi - \psi}{2} = \varphi \tag{7}$$

$$\frac{\varphi + \psi}{2} - \frac{\varphi - \psi}{2} = \psi \tag{8}$$

dann hat man s aus (2) mit Probe, und auch die beiden anderen Entfernungen s_a und s_b kann man nach dem Sinus-Satz berechnen:

$$s_a = \frac{a}{\sin \alpha} \sin (\varphi + \alpha) \qquad s_b = \frac{b}{\sin \beta} \sin (\psi + \beta) \tag{9}$$

Zahlenbeispiel:

Gegeben $a = 841{,}561$, $b = 1553{,}664$

$$\begin{array}{rrrr} \gamma = & 174^\circ & 13' & 37'' \\ \alpha = & 24 & 58 & 47 \\ \beta = & 41 & 2 & 58 \\ \hline \gamma+\alpha+\beta = & 240^\circ & 15' & 22'' \\ \text{folglich} \quad \varphi+\psi = & 119 & 44 & 38 \end{array} \Bigg\} 360^\circ$$

$$\frac{\varphi+\psi}{2} = 59 \quad 52 \quad 19$$

$\log a$	2.925 086	$\log b$	3.191 357
$\log \sin \alpha$	9.625 618	$\log \sin \beta$	9.817 374
$\log (a : \sin \alpha)$	3.299 468	$\log (b : \sin \beta)$	3.373 983
$\log (b : \sin \beta)$	3.373 983		
$\log tang\, \mu$	9.925 485	$\mu = 40^\circ$	$6'$ $31''$
$\log cotg\, (\mu + 45^\circ)$	8.932 366	$\mu + 45^\circ = 85$	6 31
$\log tang \frac{\varphi+\psi}{2}$	0.236 322	$\frac{\varphi+\psi}{2} = 59$	44 38
$\log tang \frac{\varphi-\psi}{2}$	9.168 688	$\frac{\varphi-\psi}{2} = 8$	23 19

$$\varphi = 68^\circ\ 15'\ 38'' \qquad \psi = 51^\circ\ 29'\ 0''$$

Damit ist die eigentlich pothenotische Rechnung fertig und die Weiterrechnung nach (9) und (2) kann keine Schwierigkeiten haben.

(Wir werden die vorstehende Rechnung als Bestandteil der Rechnung § 76. S. 243 wieder finden.)

§ 76. Pothenotische Aufgabe mit Coordinaten.

Die beiden Entfernungen $AM = a$ und $BM = b$, und der Winkel $BMA = \gamma$, welche im vorigen § 75. als gegeben vorausgesetzt wurden, sind selten unmittelbar gegeben, gewöhnlich hat man es nur mit Coordinaten zu thun, und dann lautet die pothenotische Aufgabe (mit Fig. 1. S. 240 oder Fig. 1. S. 243) so:

Es sind drei Punkte A, M und B durch ihre Coordinaten gegeben, nämlich:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Punkt } A\ , & y_a \text{ und } x_a \\ \quad ,, \quad M\ , & y_m \quad ,, \quad x_m \\ \quad ,, \quad B\ , & y_b \quad ,, \quad x_b \end{array}\right\} \quad (1)$$

Auf einem vierten Punkte P wurden die zwei Winkel gemessen:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Winkel } APM = \alpha \\ \quad ,, \quad MPB = \beta \end{array}\right\} \quad (2)$$

Es sollen hieraus die Coordinaten des Punktes P berechnet werden:

$$\text{Punkt } P \quad , \quad y \text{ und } x. \qquad (3)$$

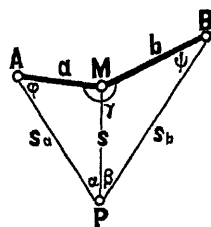
Nach der Vorbereitung des vorigen § 75. braucht man nur noch die allgemeinen Coordinaten- und Azimut-Formeln von § 60. S. 189—191 hinzuzunehmen, um diese Aufgabe lösen zu können.

Wir geben hiezu sofort ein durchgerechnetes Zahlen-Beispiel auf S. 243.

Pothenotische Bestimmung.

1) P Techn. Hochschule

	Gemessene Richtungen		*Winkel*
A Ägidius	136° 53′ 5″		$\alpha = 24° 58' 47''$
M Waterloo	161 51 52		$\beta = 41 \quad 2 \quad 58$
B Wasserturm	202 54 50		$\alpha + \beta = 66° \; 1' \; 45''$

2)

	y	x
M Waterloo	— 14657,52	+ 93254,39
A Ägidius	— 13879,79	+ 93575,89
Differenzen $(M-A)$	— 777,73	— 321,50
	$y_m - y_a$	$x_m - x_a$

	y	x
M Waterloo	— 14657,52	+ 93254,39
B Wasserturm	— 16145,76	+ 92808,28
Differenzen $(M-B)$	+ 1488,24	+ 446,11
	$y_m - y_b$	$x_m - x_b$

Probe: $(y_m - y_a) - (y_m - y_b) = y_b - y_a$ und $(x_m - x_a) - (x_m - x_b) = x_b - x_a$

3)

$(y_m - y_a)$	2.890 829$_n$
Erg. $\sin$ oder $\cos$ (AM)	0.034 257
$(x_m - x_a)$	2.507 181$_n$
$tang\,(AM)$	0.383 648
a	2.925 086
$\sin \alpha$	9.625 618

$(y_m - y_b)$	3.172 673
Erg. $\sin$ oder $\cos$ (BM)	0.018 684
$(x_m - x_b)$	2.649 442
$tang\,(BM)$	0.523 231
b	3.191 357
$\sin \beta$	9.817 374
$(b : \sin \beta)$	3.373 983

4)
$(AM) = 247° 32' 26''$
$(BM) = \;\; 73 \;\; 18 \;\; 49$
$\gamma = 174° 13' 37''$
$\alpha + \beta = \;\; 66 \;\; 1 \;\; 45$
$\gamma + \alpha + \beta = 240° 15' 22''$ } 360° 0′ 0″
$\varphi + \psi = 119 \;\; 44 \;\; 38$

5)

$(a : \sin \alpha)$	3.299 468
$(b : \sin \beta)$	3.373 983
$tang\, \mu$	9.925 485
$cotang\,(\mu + 45°)$	8.932 366
$tang\, \frac{1}{2}(\varphi + \psi)$	0.236 322
$tang\, \frac{1}{2}(\varphi - \psi)$	9.168 688

6)
$\mu = 40° \; 6' \; 31''$
$\mu + 45° = 85 \;\; 6 \;\; 31$
$\frac{1}{2}(\varphi + \psi) = 59 \;\; 52 \;\; 19$
$\frac{1}{2}(\varphi - \psi) = \;\; 8 \;\; 23 \;\; 19$

$\varphi = 68° 15' 38''$ $\quad$ $\psi = 51° 29' \; 0''$
$\alpha = 24 \;\; 58 \;\; 47$ $\quad$ $\beta = 41 \;\; 2 \;\; 58$
$\varphi + \alpha = 93° 14' 25''$ $\quad$ $\psi + \beta = 92° 31' 58''$

Winkel-Probe
$(\varphi + \alpha) + (\psi + \beta) + \gamma = 360°$

7)

$(a : \sin \alpha)$	3.299 468	$(a : \sin \alpha)$	3.299 468	$(b : \sin \beta)$	3.373 983	$b : \sin \beta$	3.373 983
$\sin(\varphi + \alpha)$	9.999 305	$\sin \varphi$	9.967 958	$\sin \psi$	9.893 444	$\sin(\psi + \beta)$	9.999 575
s_a	3.298 773	s	3.267 426	s	3.267 427	s_b	3.373 558

(P r o b e n)

8)

$(AM) = 247° 32' 26''$	$(AP) = 315° 48' \; 4''$	$(BP) = 21° 49' 49''$	$(BM) = 73° 18' 49''$
$+\varphi = +68 \;\; 15 \;\; 38$	$+\alpha = +24 \;\; 58 \;\; 47$	$-\beta = -41 \;\; 2 \;\; 58$	$-\psi = -51 \;\; 29 \;\; 0$
$(AP) = 315 \;\; 48 \;\; 4$	$(MP) = 340° 46' 51''$	$(MP) = 340° 46' 51''$	$(BP) = 21° 49' 49''$

9)

s_a	3.298 773	s_a	3.298 773	s_b	3.373 558	s_b	3.373 558
$\sin(AP)$	9.843 327$_n$	$\cos(AP)$	9.855 473	$\sin(BP)$	9.570 378	$\cos(BP)$	9.967 684
Δy_a	3.142 100$_n$	Δx_a	3.154 246	Δy_b	2.943 936	Δx_b	3.341 242

10)

A	$y_a = -13879,79$	$x_a = +93575,89$	B $\;y_b = -16145,76$	$x_b = +92808,28$
	$\Delta y_a = -\;1387,08$	$\Delta x_a = +\;1426,42$	$\Delta y_b = +\;878,90$	$\Delta x_b = +\;2194,03$
P	$y = -15266,87$	$x = +95002,31$	P $\;y = -15266,86$	$x = +95002,31$

Hannover Technische Hochschule: $y = -15266,86^m$ $\quad x = +95002,31^m$
(Eisenplatte E)

Zu dem Gang dieser Rechnung sind einige Bemerkungen zu machen:

1) Man setzt die gemessenen Richtungen ein, und bildet daraus durch Subtraktion die Winkel α, β und $\alpha+\beta$. Die gemessenen, aus dem Feldschreibbuch oder aus einem nicht orientierten Abrisse zu entnehmenden Richtungen sind häufig *näherungsweise* auf Azimute orientiert, doch ist dieses für die Winkel α und β gleichgültig.

2) Man setzt die Coordinaten der drei gegebenen Punkte $A\,M\,B$ an ihre Stellen, und bildet die Coordinaten-Differenzen. Zu diesen Coordinaten-Differenzen kann man auch die Proben bilden:

$$(y_m - y_a) - (y_m - y_b) = y_b - y_a$$
$$(x_m - x_a) - (x_m - x_b) = x_b - x_a.$$

Diese Probe ist wohl rätlich, weil ein Fehler in diesen ersten Subtraktionen erst am Schlusse gefunden würde, die Probe kann je nach Rechen-Vertrauen unterlassen werden.

3) Es werden die Azimute $(A\,M)$ und $B\,M)$ und dabei die Entfernungen $A\,M = a$ und $B\,M = b$ in bekannter Weise (nach § 60. S. 191) berechnet, d. h. man hat zu 3) die Formeln:

$$tang\,(A\,M) = \frac{y_m - y_a}{x_m - x_a} \qquad tang\,(B\,M) = \frac{y_m - y_b}{x_m - x_b}$$

$$A\,M = a = \frac{y_m - y_a}{sin\,(A\,M)} \text{ oder } = \frac{x_m - x_a}{cos\,(A\,M)} \qquad B\,M = b = \frac{y_m - y_b}{sin(BM)} \text{ oder } = \frac{x_m - x_b}{cos\,(B\,M)}$$

Die Entfernungen a und b werden nur aus dem Sinus *oder* dem Cosinus berechnet, weil immer eine dieser Funktionen (Spalte rechts), welche zur *grösseren* Kathete gehört, erheblich bequemer und genauer ist als die andere.

4) Die Azimute $(A\,M)$ und $(B\,M)$ geben die Differenz γ, und mit $\alpha+\beta$ von 1), die Summe $\varphi+\psi$, deren Hälfte sofort nach 6) an ihre Stelle gesetzt wird.

5) und 6) Es folgt die eigentliche pothenotische Auflösung und Bestimmung der zwei Winkel φ und ψ mittelst des Hilfswinkels μ nach § 75.

Die Quotienten $(a : sin\,\alpha)$ und $(b : sin\,\beta)$ werden in dieser Form getrennt gehalten, weil man dieselben bei 7) wieder so braucht.

7) Seitenberechnung:

$$s_a = \frac{a}{sin\,\alpha}\,sin\,(\alpha+\varphi) \quad \text{wozu} \quad \alpha+\varphi \text{ bei 6) berechnet wurde,}$$

$$s = \frac{a}{sin\,\alpha}\,sin\,\varphi = \frac{b}{sin\,\beta}\,sin\,\psi$$

$$s_b = \frac{b}{sin\,\beta}\,sin\,(\beta+\psi) \quad \text{wozu} \quad \beta+\psi \text{ bei 6) berechnet wurde.}$$

Die Probe mit s kontrolliert Alles von $(a : sin\,\alpha)$ und $(b : sin\,\beta)$ an.

8) Zusammensetzung der Azimute $(A\,P)$ und $(B\,P)$ und dann auch noch Doppelberechnung des Azimutes $(M\,P)$, letzteres teils zur Probe, und weil man *später* die *drei* pothenotischen Azimute $(AP)\,(MP)\,(BP)$ oder deren Umkehrungen $(PA)\,(PM)\,(PB)$ meist braucht. Diese drei Azimute müssen auch gegen die gemessenen Richtungen bei 1) eine konstante Differenz haben.

9) und 10) Coordinatenberechnung für den Punkt P symmetrisch von A und von B her, nach den bekannten Formeln § 60. (8) oder (8') S. 190, nämlich:

$$y = y_a + s_a\,sin(A\,P)\,, \quad x = x_a + s_a\,cos(A\,P) \;\Big|\; y = y_b + s_b\,sin(B\,P)\,, \quad x = x_b + s_b\,cos\,(B\,P)$$

Wenn diese Coordinaten-Probe stimmt, so ist die ganze Rechnung vom Einsetzen der gegebenen Coordinaten, und der gemessenen Richtungen an, versichert.

Wenn die Coordinaten-Probe nicht stimmt, so kann man auch noch mit dem Mittelstrahl s rechnen, nämlich:

$$y = y_m + s \sin(MP) \quad , \quad x = x_m + s \cos(MP).$$

Bildung eines Abrisses.

Aus den Werten, welche unter 1), 8) und 7) der Berechnung von S. 243 enthalten sind, bildet man folgenden Abriss:

Standpunkt Technische Hochschule (Eisenplatte E).

Zielpunkte	Gemessene Richtungen	Azimute	Differenz	*log s*
Ägidius	136° 53′ 5″	135° 48′ 4″	1° 5′ 1″	3.298 773
Waterloo-Säule . . .	161 51 52	160 46 51	1 5 1	3.267 426
Wasserturm	202 54 50	201 49 49	1 5 1	3.373 558

Ein solcher Abriss ist namentlich dann von Wichtigkeit, wenn er auch noch *andere* gemessene Richtungen enthält, welche dadurch mit trigonometrisch orientiert werden.

In unserem Falle stimmt der vorstehende pothenotische Abriss nahezu mit dem Abrisse S. 237, insofern die pothenotische Rechnung überall auf 1″ abgerundet wurde.

Dem entsprechend stimmen auch die auf S. 243 erhaltenen pothenotischen Coordinaten ungefähr auf 1^{cm} genau mit den früher angegebenen genaueren Coordinaten des Punktes E von S. 222 und S. 234.

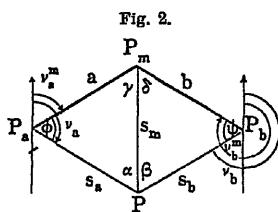



Fig. 2.

Anmerkung. Unsere vorstehenden Formeln und unser Rechen-Formular S. 243 stimmen im Wesentlichen auch überein mit dem Formular 11. der Anweisung IX. vom 25. Oktober 1881, deren Figur wir in nebenstehender Fig. 2. zur Vergleichung hergesetzt haben.

Unser Schema S. 243 ist jedoch mehr symmetrisch, und enthält die Ausrechnung der drei Strahlenlängen, welche im Formular 11. nicht unmittelbar auftreten.

§ 77. Verschiedene Nebenbetrachtungen zur pothenotischen Aufgabe.

I. Der gefährliche Kreis.

Schon in § 75. S. 240 ist die Bemerkung gemacht, dass die pothenotische Bestimmung versagt, wenn alle vier Punkte auf *einem* Kreise liegen. Das müssen auch die Formeln zeigen. Wenn dieser Fall eintritt, so ist:

$$\varphi + \psi = 180° \quad , \quad \sin\varphi = \sin\psi$$

also nach (4) § 75. S. 241:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{1}{\tang\mu} \qquad \mu = 45°.$$

Damit wird weiter $45° + \mu = 90°$, also giebt die Formel (6) § 75. S. 241 nun:

$$tang \frac{\varphi - \psi}{2} = tang \frac{\varphi + \psi}{2} cotg (\mu + 45°) = \infty . 0$$

d. h. unbestimmt, und die Rechnung steht still.

Fig. 1.

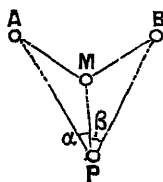
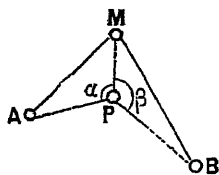



Fig. 2.

Ausser dem praktisch wohl selten vorkommenden Falle, dass $\varphi + \psi$ genau $= 180° 0' 0''$ ist, haben wir noch den Fall zu betrachten, dass $\varphi + \psi$ *nahe* $= 180°$ wird; dann wird die Auflösung zwar nicht unmöglich, aber ungenau, und praktisch vielleicht ganz unbrauchbar.

Um sich hievor zu hüten, suche man solche Verhältnisse zu gewinnen, wie sie in Fig. 1. und Fig. 2. angedeutet sind, nämlich Fig. 1. mit einer gegen den Beobachter P ausspringenden Ecke BMA, oder besser noch nach Fig. 2. so, dass P im *Innern* des Dreiecks AMB liegt.

Alle hieran sich anschliessenden weiteren Genauigkeitsfragen haben wir bereits in Band I. § 106., § 107. und § 115.—118. erschöpfend behandelt. Es sei hier nur noch einmal von Band I. S. 312 daran erinnert, dass einer der drei gegebenen Punkte A, M, B unendlich weit entfernt sein darf, ohne dass (alles Übrige als gut vorausgesetzt) die pothenotische Bestimmung ungenau würde.

II. Auswahl der Winkel α und β.

Wenn drei Punkte sichtbar sind, so kann man zwei Winkel α und β zwischen denselben in verschiedener Weise auswählen und messen, nämlich in drei verschiedenen Kombinationen. Man kann aber immer die Auswahl so treffen, dass α und β beide kleiner als 180° sind, und dass eine Figur entsteht, welche im Wesentlichen die Verhältnisse von Fig. 1. § 75. hat. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Erster Fall. α und β kleiner als 180°.

Indem wir die Hauptformeln von § 75. nochmals hersetzen, haben wir:

$$\varphi + \psi = 360° - (\alpha + \beta + \gamma) \tag{1}$$

$$cotg\, \mu = \frac{b : sin\, \beta}{a : sin\, \alpha} \tag{2}$$

$$tang \frac{\varphi - \psi}{2} = tang \frac{\varphi + \psi}{2} cotg (\mu + 45°) \tag{3}$$

Der Hilfswinkel μ ist durch die Gleichung (2) zweideutig bestimmt, denn ausser einem Werte μ, welcher der Gleichung (2) genügt, genügt auch der Wert $\mu \pm 180°$ dieser Gleichung (abgesehen von dem beliebigen Zufügen eines Vielfachen von $\pm 360°$); aber auch in der Gleichung (3) ändert die Zufügung von $\pm 180°$ an μ den Wert von $tang \frac{\varphi - \psi}{2}$ nicht, denn es ist:

$$cotg (\mu + 45°) = cotg (\mu \pm 180° + 45°)$$

folglich ist die Wahl von μ in (2) vollständig willkürlich. Da wir angenommen haben, es sollen α und β beide kleiner als 180° sein, so sind $sin\, \alpha$ und $sin\, \beta$ beide positiv,

und da die Entfernungen AM und MB überhaupt positiv sind, so kann die Gleichung (2) nur einen positiven Wert $cotg\,\mu$ geben. Der Bequemlichkeit wegen nützen wir die gefundene Willkürlichkeit in Betreff von μ so aus, dass wir stets μ als positiven spitzen Winkel nehmen.

Auch $\frac{\varphi - \psi}{2}$ wird zweideutig bestimmt, denn wenn irgend ein Wert $\frac{\varphi - \psi}{2}$ der Gleichung (3) genügt, so genügt auch der Wert $\frac{\varphi - \psi}{2} \pm 180°$ dieser Gleichung; da aber φ und ψ Dreieckswinkel, d. h. kleiner als 180° sein müssen, so lässt sich hiernach die Entscheidung treffen; $\frac{\varphi}{2}$ und $\frac{\psi}{2}$ sind demnach beide kleiner als 90°, oder positive spitze Winkel, folglich muss $\frac{\varphi - \psi}{2}$ ein positiver oder negativer spitzer Winkel sein (oder was dasselbe ist, $\frac{\varphi - \psi}{2}$ muss im ersten oder im vierten Quadranten liegen).

Man hat also die einfache Regel: Man nimmt den Hilfswinkel μ stets als positiven spitzen Winkel, und man nimmt $\frac{\varphi - \psi}{2}$ als positiven oder negativen spitzen Winkel, je nachdem $tang\,\frac{\varphi - \psi}{2}$ positiv oder negativ ist.

Zweiter Fall. α oder β grösser als 180°.

In nebenstehender Fig. 3. ist $\alpha < 180°$, aber $\beta > 180°$, und wir wollen an diesem Beispiele zeigen, warum es nützlich sein kann, die Wahl so zu treffen. Würde man $BPA = \alpha$ und $APM = \beta$ setzen, so wären α und β beide kleiner als 180°, aber $BPA = \alpha$ würde *sehr* klein. Damit würde $(a : sin\,\alpha)$ sehr gross. Wenn aber $(a : sin\,\alpha)$ oder $(b : sin\,\beta)$ sehr gross wird, so fällt der Hilfswinkel μ sehr nahe an 0° oder nahe an 90°, und man müsste μ vielleicht auf 0,001″ genau ausrechnen, um die übrige Rechnung nur auf 1″ genau zu sichern.

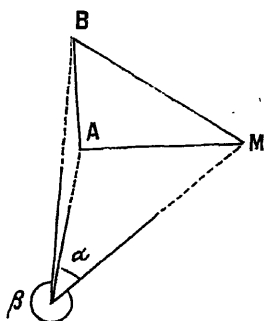



Fig. 3.
$\alpha < 180°$, $\beta > 180°$.

Dieser und anderen formellen Widerwärtigkeit weicht man aus, wenn man eine Wahl von α und β trifft, wie in Fig. 3. angedeutet ist; dann wird aber die Entscheidung über die Quadranten nicht mehr so einfach wie im vorigen Fall.

Allerdings die Zweideutigkeit von μ bleibt ebenso unschädlich, wie beim ersten Fall, denn diese Zweideutigkeit hebt sich in der Ausrechnung von $cotg\,(\mu + 45°)$ selbst wieder auf. Dagegen ist nun eine besondere Überlegung nötig für die Gleichung:

$$tang\,\frac{\varphi - \psi}{2} = tang\,\frac{\varphi + \psi}{2}\,cotg\,(\mu + 45°).$$

Hier ist $\frac{\varphi - \psi}{2}$ zweideutig. φ oder ψ kann auch grösser als 180° werden, wie z. B. in Bd. I. § 106. Fig. 12b. zu ersehen ist, wo u und v die Bedeutung unserer jetzigen φ und ψ haben.

Die Entscheidung ist darin zu suchen, dass die Entfernungen AP, MP, BP wieder *positiv* werden müssen.

Statt einer algebraischen Aufzählung aller hiebei möglichen Fälle (welche wir auf S. 318—320 der vorigen Auflage dieses Buches hatten) stellen wir nun die einfache Regel auf:

Man rechnet mit der Zweideutigkeit von $\frac{\varphi - \psi}{2}$ so lange weiter (führt also zunächst *zwei* Werte φ und *zwei* Werte ψ mit), bis man an die Berechnung der Entfernungen kommt, und lässt dann dasjenige Paar von Werten φ und ψ fallen, welches auf negative Entfernungen führt.

Es ist nicht unpassend, hiefür ein Beispiel zu nehmen. In Fig. 4. S. 188, oder Fig. 1. S. 228 betrachten wir eine pothenotische Bestimmung auf der Technischen Hochschule aus den drei Punkten Ägidius, Kreuz, Waterloo. Ägidius und Kreuz liegen mit der Technischen Hochschule nahezu in einer Geraden, denn der Winkel zwischen Ägidius und Kreuz ist nur 0° 40′ 12″. Trotzdem ist die pothenotische Bestimmung an sich nicht schlecht. Wenn man nun α und β beide kleiner als 180° haben will, so hat man:

Ägidius
Kreuz $\quad \alpha = 0°\ 40'\ 22''$
Waterloo $\quad \beta = 24°\ 17'\ 48''$ $\qquad$ (4)

Die gegebenen Punkte sollen folgende Coordinaten haben:

Ägidius	$y = 13879{,}79$	$x = +93575{,}89$	
Kreuz	$y = 14332{,}04$	$x = +94017{,}14$	(5)
Waterloo	$y = 14657{,}77$	$x = +93254{,}42$	

(Diese Coordinaten sind aus dem *Gauss-Wittstein* schen Coordinatenverzeichnis S. 35—36 entnommen, und weichen von unseren neuen Bestimmungen § 73. S. 234 nicht unerheblich ab.)

Indem man nun mit den Coordinaten (5) und mit den Winkeln (4) nach § 76. rechnet, findet man:

$$(AP) = 314°\ 17'\ 41'' \quad , \quad (BP) = 23°\ 7'\ 32'' \quad , \quad \gamma = 291°\ 10'\ 9''$$

$$\mu = 87°\ 51'\ 17{,}4'' \quad , \quad \frac{\varphi + \psi}{2} = 21°\ 55'\ 50{,}5'' \quad , \quad \frac{\varphi - \psi}{2} = -20°\ 29'\ 2{,}9''$$

$$\varphi = 1°\ 26'\ 47{,}6'' \quad , \quad \psi = 42°\ 24'\ 53{,}4''$$

$$log\ \frac{a}{sin\ \alpha}\ sin\ \varphi = 3.133\ 391 \quad , \quad log\ \frac{b}{sin\ \beta}\ sin\ \psi = 3.133\ 383. \qquad (6)$$

Trotzdem auf 0,1″ genau gerechnet wurde, hat man nun in (6) einen logarithmischen Widerspruch = 0,000 008.

Deswegen rechnen wir nun so:

Kreuz
Waterloo $\quad \alpha = 24°\ 17'\ 48''$
Ägidius $\quad \beta = 335°\ 1'\ 50''$

$$(AP) = 203°\ 7'\ 32'' \quad , \quad (BP) = 247°\ 32'\ 57'' \quad , \quad \gamma = 315°\ 34'\ 35''$$

$$\mu = -45°\ 18'\ 28'' \quad , \quad \frac{\varphi + \psi}{2} = -157°\ 27'\ 6{,}5'' \quad , \quad \frac{\varphi - \psi}{2} = -89°\ 15'\ 32''$$

$$\varphi = 113°\ 17'\ 22'' \quad , \quad \psi = -68°\ 11'\ 34$$

$$log\ AP = 3.133\ 385 \quad , \quad log\ MP = \begin{matrix}3.267\ 503 \\ 3.267\ 502\end{matrix} \quad , \quad log\ BP = 3.299\ 087 \qquad (7)$$

$$y = -15269{,}33 \quad , \quad x = +95001{,}90.$$

In (6) stimmt der *zweite* Wert mit dem Wert AP in (7) nahezu, während der erste Wert von (6) mehr abweicht.

III. Möglichkeit oder Unmöglichkeit pothenotischer Bestimmung.

Eine letzte Nebenfrage, ohne praktische Bedeutung, aber doch dann und wann hervortretend, soll noch erledigt werden.

Es handelt sich darum, ob eine pothenotische Berechnung mit *willkürlich* angeschriebenen (also nicht gemessenen) Winkeln, welche zu drei gegebenen Punkten gehören sollen, möglich oder unmöglich ist.

Dass man die Zahlen nicht schlechthin willkürlich anschreiben darf (etwa zu einer Übungs-Rechnung) kann an dem Beispiel dreier Punkte in einer Geraden gezeigt werden: Nimmt man hiezu drei Strahlen mit Winkeln von je 120°, so existiert kein Punkt, von dem aus diese Strahlen nach den gegebenen drei Punkten in einer Geraden möglich wären.

Im Übrigen stellen wir folgende Betrachtung an:

Fig. 4.
Fig. 5.

Wenn ein Strahlensystem BAC Fig. 4. in das Punktsystem ABC Fig. 5. pothenotisch eingepasst werden soll, so muss zunächst jedem Punkt ABC ein Strahl *zugeteilt* werden, was durch die Bezeichnungen ABC ausgedrückt sein soll.

Die drei Winkel, welche die Strahlen unter sich bilden, nenne man $\alpha\ \beta\ \gamma$, und die drei Winkel des Dreiecks Fig. 5. entsprechend: $A\ B\ C$. Dann ist jedenfalls:

$$A + B + C = 180° \tag{8}$$
$$\alpha + \beta + \gamma = 360° \tag{9}$$

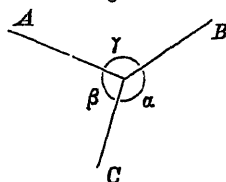
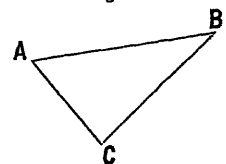
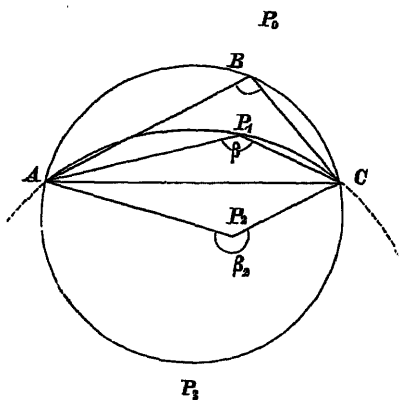
Um das Dreieck ABC beschreibe man einen Kreis Fig 6., den wir zur Unterscheidung von anderen, durch P gehenden Kreisen, den Grundkreis nennen wollen. Nun ist zuerst zu entscheiden, ob der geometrische Ort des Punktes P vermöge *eines* der gegebenen drei Winkel $\alpha\ \beta\ \gamma$, etwa vermöge β, innerhalb oder ausserhalb dieses Kreises fällt. So lange β zwischen den Grenzen B und 180° liegt, liegt P im Innern des Dreiecks ABC, und folglich auch im Innern des Grundkreises.

Fig. 6.

Die Bedingung, dass P nicht gegen P_0 hin aus dem Kreise hinausrückt, ist:

$$\beta_1 > B \tag{1}$$

Wenn P aus dem Dreieck ABC über AC hinaus gegen P_2 hinrückt, so wird β grösser als 180°, und die Bedingung, dass P_2 noch innerhalb des Kreises, also nicht gegen P_3 hin fällt, ist:

---

*) Vergl. Briefwechsel zwischen *Gauss* u. *Schumacher*, hrsgeg. von *Peters*, Altona 1861, III. Band S. 46—50, und „Zeitschr. f. Vermessungswesen 1886", S. 140—145.

$$360^\circ - \beta_2 + B > 180^\circ$$
$$\text{oder } (360^\circ - \beta_2) > (180^\circ - B) \tag{11}$$

Als Bedingung, dass der Punkt P im Innern des Kreises liegt, hat man also nach (10) und (11):

$$\text{wenn } \beta < 180^\circ \qquad \beta > B \tag{12}$$
$$\text{wenn } \beta > 180^\circ \qquad (360^\circ - \beta) > (180^\circ - B) \tag{13}$$

Wenn die pothenotische Bestimmung überhaupt möglich sein soll, so müssen alle drei Winkel $\alpha\ \beta\ \gamma$ die Punktlage entweder innerhalb oder ausserhalb verlangen.

Wir müssen zunächst zwei Fälle unterscheiden:

$$\text{Fall I.} \quad \alpha < 180^\circ \quad \beta < 180^\circ \quad \gamma < 180^\circ \tag{14}$$
$$\text{Fall II.} \quad \textit{ein} \text{ Wert } \alpha,\ \beta \text{ oder } \gamma \text{ ist } > 180^\circ \tag{15}$$

Im ersten Fall hat man die Bedingung für innerhalb des Kreises um $A\ B\ C$:

$$\alpha > A \qquad \beta > B \qquad \gamma > C \tag{16}$$

Eine Punktlage ausserhalb giebt es hierbei überhaupt nicht, was man entweder geometrisch einsehen oder auch darnach beurteilen kann, dass die drei Bedingungen für Punkt innerhalb des Kreises, nämlich:

$$\alpha < A \qquad \beta < B \qquad \gamma < C$$

in ihrer Summen mit den Summen (8) und (9) nicht verträglich wären.

Als ein Beispiel dafür, dass *zwei* Bedingungen von den dreien unter (16) angegebenen nicht genügen zur Entscheidung, betrachten wir den Fall:

$$\left.\begin{array}{lll} \alpha = 170^\circ & A = 75^\circ & \alpha - A > 0 \\ \beta = 170^\circ & B = 75^\circ & \beta - B > 0 \\ \gamma = \ \ 20^\circ & C = 30^\circ & \gamma - C < 0 \end{array}\right\} \tag{17}$$

Diejenigen Teile der zwei Kreise für α und β, welche für die Punktlage massgebend sind, liegen bei der Annahme (17) beide im Innern des Grundkreises, sie *schneiden* sich aber nicht im Innern.

Übergehend zum II. Fall (s. o. (15)) wollen wir annehmen, es seien α und β beide kleiner als 180°, dagegen γ grösser als 180°, dann gelten für α und β die Bedingungen von der Form (12), dagegen für γ eine Bedingung von der Form (13), also zusammen:

$$\left.\begin{array}{cc} \textit{für Punkt innerhalb:} & \textit{für Punkt ausserhalb:} \\ \alpha > A & \alpha < A \\ \beta > B & \beta < B \\ 360^\circ - \gamma > 180^\circ - C & 360^\circ - \gamma < 180^\circ - C \end{array}\right\} \tag{18}$$

Hier ist je die dritte Bedingung überflüssig, denn sie ist vermöge (8) und (9) bereits in den zwei ersten enthalten.

Wenn also von den drei Winkeln $\alpha\ \beta\ \gamma$ einer überstumpf ($> 180^\circ$) ist, so braucht man nur die beiden anderen hohlen ($< 180^\circ$) Winkel in Betracht zu nehmen, und hat als Möglichkeits-Bedingung, dass $\alpha - A$ und $\beta - B$ beide gleiches Zeichen haben, und nebenbei hat man mit $\alpha - A \gtrless 0$ entschieden, ob der Punkt innerhalb oder ausserhalb des Grundkreises fällt.

Um beide Fälle thunlichst zusammen zu fassen, schreiben wir nun:

Fall I. $\alpha < 180^\circ \qquad \beta < 180^\circ \qquad \gamma < 180^\circ$

$\alpha - A > 0 \qquad \beta - B > 0 \qquad \gamma - C > 0$ giebt den Punkt P innerhalb des Grundkreises. Wenn auch nur *eine* der Differenzen $\alpha - A$, $\beta - B$, $\gamma - C$ negativ wird, so ist die Lösung unmöglich. (Ausserhalb des Grundkreises kann der Punkt P im Falle I. überhaupt nie liegen.)

Fall II. $\alpha < 180°$ $\beta < 180°$ $\gamma > 180°$

$\alpha - A > 0$ $\beta - B > 0$ $(360° - \gamma) > (180° - C)$ giebt den Punkt innerhalb,

$\alpha - A < 0$ $\beta - B < 0$ $(360° - \gamma) < (180° - C)$ giebt den Punkt ausserhalb.

Sind die Vorzeichen dieser drei Differenzen nicht gleich, so ist die Lösung unmöglich.

Wenn man trotz der Unmöglichkeit der Aufgabe die Rechnung nach den gewöhnlichen pothenotischen Formeln beginnt, so wird man auf eine *negative* Strahlenlänge PA, PB oder PC geführt, und rechnet man mit einer negativen Entfernung weiter, so stimmen die Schluss-Coordinaten in den getrennten Rechnungen wieder überein. Diese Coordinaten gehören aber zu einem pothenotischen Punkt, von dessen Bestimmungs-Strahlen PA, PB, PC einer die entgegengesetzte Richtung hat im Vergleich mit dem entsprechenden Strahl der unmöglichen Kombination. Umgekehrt werden die unter sich verträglichen Elemente unverträglich, wenn man einen der Bestimmungs-Strahlen in Betreff der Richtung umkehrt.

Pothenotische Litteratur.

Über die Herkunft der Benennung nach *Pothenot* zitieren wir zuerst aus dem „Handbuch der Mathematik, Physik“ u. s. w. von *Wolf*, Zürich 1869, I. S. 288: *Willebrord Snellius* löste die Aufgbe in seinem „Eratosathenes Batavus, de terrae ambitus vera quantitate. Lugd. Batav. 1617 in 4⁰.“ Später gab *Laurent Pothenot* (16. .. — Paris 1732; Professor der Mathematik und Mitglied der Akademie in Paris) in einer 1692 vorgelegten Abhandlung: „Problème de géométre pratique etc. (Anc. Mém. Par. X)“ eine Lösung derselben Aufgabe, welche nun seinen Namen erhielt.

Nach *Johann Tobias Mayer*, „Gründlicher und ausführlicher Unterricht zur praktischen Geometrie, Göttingen 1816“, zweiter Teil, S. 316, befindet sich *Pothenots* Abhandlung „in den Mém. de l'Ac. royale de sc. à Paris 1692, p. 188“.

Die bequemste und gebräuchlichste analytische Lösung der pothenotischen Aufgabe mit dem Hilfswinkel μ, welche in unserem § 75. gegeben ist, finden wir zuerst mitgeteilt von *J. C. Burckhardt* in der „Monatlichen Korrespondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde von *v. Zach*“, 4. Band, Gotha 1801, S. 360. (Hilfswinkel y aus $tang\ y = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}$.)

Die erste pothenotische Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate stammt her von *Gauss*; sie findet sich in den „Astr. Nachrichten“, erster Band, 1823, Nr. 6, S. 81—86. *Gauss* behandelt die *zwei* Fälle der Richtungs-Messungen („Winkel-Messungen auf Einmal“) und der unabhängigen Winkel-Messungen, und giebt dann ein Zahlenbeispiel (Holkenbastion) für den zweiten Fall.

Das nächste ist: „Grundzüge der Wahrscheinlichkeits-Rechnung von *G. Hagen*, Berlin 1837“, § 33. und § 34. *Hagen* giebt zuerst die Theorie, wie *Gauss*, für Winkel-Messungen und für Richtungs-Messungen, dann in § 34. ein Beispiel für beide Fälle.

Nach diesem ist zu erwähnen: *Gerling*, „die pothenotische Aufgabe in praktischer Beziehung, Marburg 1840“. *Gerling* bildet aus dem schon erwähnten Winkel-Beispiel von *Gauss* (Holkenbastion) zuerst einen „Horizont-Abschluss“, und gleicht diesen abermals nach *Winkeln* aus (was hier nicht richtig ist). Sodann giebt *Gerling* in seinem grösseren Werke „Die Ausgleichungs-Rechnungen der praktischen Geometrie, Hamburg und Gotha 1843“, S. 127—129, eine Winkel-Ausgleichung nach *Gauss*.

Helmert giebt in dem Werke „Die Ausgleichungs-Rechnung nach der M. d. kl. Q. u. s. w., Leipzig 1872,“ S. 158—163, eine pothenotische *Richtungs*-Ausgleichung, und dabei, auf S. 161, den Kunstgriff, durch Mittelbildung in den Fehlergleichungen die Richtungs-Unbekannte ζ zu eliminieren. Dieses Verfahren, das wir schon in Band I. S. 151 erwähnt haben und in § 82. wieder benützen werden, ist inzwischen sehr gebräuchlich geworden.

Die von *Schreiber* bei der trigon. Abteilung der Landes-Aufnahme angewendete Eliminationsform haben wir in Band I. S. 153—154 mitgeteilt.

In unserem Buche 1. Auflage (Taschenbuch d. pr. G. 1873, S. 144—147) war nur eine *Winkel*-Ausgleichung gegeben; in der 2. Auflage 1877, § 116. eine Winkel-Ausgleichung, § 117. eine Richtungs-Ausgleichung mit gewöhnlicher Eliminierung von z.

Alle diese Citate schienen deswegen nicht überflüssig, weil in verschiedenen Schriften die Winkel- und Richtungs-Ausgleichungen confundiert sind, und manches (z. B. auch unsere Artikel) zum Teil falsch citiert ist.

§ 78. Die Aufgabe der zwei unzugänglichen Punkte.

Erste Auflösung.

In Fig. 1. sind die zwei Punkte K und B gegeben.

Es soll die Lage zweier anderer Punkte P und M in Bezug auf die gegebenen Punkte K und B bestimmt werden durch Messung der vier Winkel α, γ, α', γ'. Wir setzen dabei voraus, dass die gegebenen Punkte K und B (z. B. Kirchtürme) unzugänglich seien, weshalb die Winkel φ, φ', ψ, ψ', durch welche man am einfachsten die Punkte P und M gegen K und B festlegen könnte, nicht gemessen sind.

Fig. 1.
(Massstab 1 : 90 000.)

Die gegenseitige Lage der vier Punkte kann sehr verschieden sein, z. B. so, wie Fig. 1. angiebt, oder auch nach Angabe der später folgenden Fig. 1. und Fig. 2. § 79.

Wir setzen vorerst voraus, dass die Berechnung sich unmittelbar an den besonderen Fall einer Figur anschliesst, und legen deswegen für die nächstfolgende Berechnung die Fig. 1. zu Grunde.

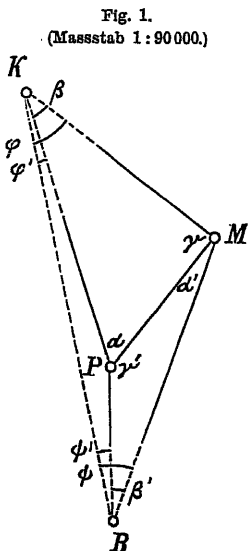
Wenn umgekehrt P und M gegeben, und K und B zu bestimmen wären, so könnte man einfach nach dem Sinus-Satz die Punkte K und B gegen P und M festlegen, und dann auch die Entfernung KB berechnen aus dem Dreieck BMK, in welchem die zwei Seiten BM und MK und der eingeschlossene Winkel $BMK = \alpha' + \gamma$ bekannt wären; in gleicher Weise könnte auch das Dreieck BPK benützt werden. Jedenfalls kann man auf diese Weise die Gestalt des ganzen Vierecks bestimmen.

Diese Überlegung führt dazu, zuerst alle Winkel und Seitenverhältnisse des Vierecks zu bestimmen, und dann erst mit der Seite KB als Basis die übrigen Seiten zu berechnen.

Die weitere Ausführung dieses Grundgedankens soll an einem Zahlenbeispiel gezeigt werden, wobei die Punkte K und B durch Coordinaten gegeben sind, und die Coordinaten der Punkte P und M berechnet werden sollen.

Gegeben sind die Coordinaten von K und B (Königsbach und Bilfingen):

$$\left.\begin{array}{lrr} & y & x \\ K & +37855{,}30 & +6620{,}10 \\ B & +39082{,}60 & +1551{,}00 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Gemessen sind die vier Winkel α, γ, α', γ'. Wir schreiben sofort auch die Winkel β und β' dazu, welche man als Ergänzungen in den betreffenden Dreiecken berechnet:

$$\left.\begin{array}{lll} \alpha = 54^\circ\ 35'\ 57'' & \quad & \alpha' = 17^\circ\ 13'\ 3'' \\ \beta = 35\ \ 25\ \ 29 & & \beta' = 18\ \ 22\ \ 39 \\ \gamma = 89\ \ 58\ \ 34 & & \gamma' = 144\ \ 24\ \ 18 \\ \text{Summen: } 180^\circ\ 0'\ 0'' & & 180^\circ\ 0'\ 0'' \end{array}\right\} \quad (2)$$

Wir nehmen an, man habe durch eine geometrische Konstruktion die Entfernung PM näherungsweise $= 1980^m$ gefunden, und nehmen deswegen als erste Näherung:

$$log\ PM = 3.296\,665 \text{ genähert.} \quad (3)$$

Man könnte zwar auch schlechthin $PM = 1$, also $log\ PM = 0.000\,000$ annehmen, es ist aber bequemer, sogleich einen genäherten Wert hier einzuführen. Nun kann man nach dem Sinus-Satz berechnen:

$$PK = \frac{PM}{sin\,\beta} sin\,\gamma \qquad MK = \frac{PM}{sin\,\beta} sin\,\alpha$$

$$PB = \frac{PM}{sin\,\beta'} sin\,\alpha' \qquad MB = \frac{PM}{sin\,\beta'} sin\,\gamma'$$

Die Resultate sind:

$$\left.\begin{array}{llll} log\,PK = 3.533\,512 & log\,MK = 3.444\,733 & log\,PB = 3.269\,264 & log\,MB = 3.562\,935 \\ PK = 3415{,}95 & MK = 2784{,}41 & PB = 1858{,}93 & MB = 3655{,}40 \end{array}\right\} \quad (4)$$

In dem Dreieck BMK hat man somit die Seiten BM und MK und den davon eingeschlossenen Winkel $\alpha' + \gamma = 107^\circ\ 11'\ 37''$ gegeben, sowie die Summe:

$$\varphi + \psi = 180^\circ - (\alpha' + \gamma) = 72^\circ\,48'\,23''. \quad (5)$$

Damit rechnet man:

$$tang\,\frac{\varphi - \psi}{2} = \frac{MB - MK}{MB + MK}\,tang\,\frac{\varphi + \psi}{2}. \quad (6)$$

Man hat also aus (5): $\frac{\varphi + \psi}{2} = 36^\circ\ 24'\ 11{,}5''$

und aus der Gleichung (6): $\frac{\varphi - \psi}{2} = 5^\circ\ 41'\ 42{,}4''$

Die Summe und die Differenz hievon sind: $\varphi = 42^\circ\ 5'\ 54''$ $\quad \psi = 30^\circ\ 42'\ 29''$ (7)

In gleicher Weise berechnet man aus dem Dreieck BPK:

$$\varphi' = 6^\circ\ 40'\ 25'' \qquad \psi' = 12^\circ\ 19'\ 50'' \quad (8)$$

Dabei hat man die Proben $\varphi - \varphi' = \beta$ und $\psi - \psi' = \beta'$.

Nun kann man die Entfernung BK vierfach berechnen:

$$\left.\begin{array}{l} BK = \frac{MK}{sin\,\psi} sin\,(\gamma + \alpha') = \frac{MB}{sin\,\varphi} sin\,(\gamma + \alpha') \\ BK = -\frac{PK}{sin\,\psi'} sin\,(\gamma' + \alpha) = -\frac{PB}{sin\,\varphi'} sin\,(\gamma' + \alpha) \end{array}\right\} \quad (9)$$

Man erhält aus allen diesen vier Formeln in genügender Übereinstimmung:

$$log\ BK = 3.716\,743 \text{ genähert.} \quad (10)$$

Dieses ist derjenige genäherte Wert, welcher der ursprünglich bei (3) gemachten Näherungs-Annahme für $log\ PM$ entspricht.

Andererseits berechnet man $log\ BK$ endgültig aus den schon zu Anfang unter (1) mitgeteilten Coordinaten, nämlich:

$$log\ BK = 3.717\,301 \text{ endgültig.} \quad (11)$$

Zugleich berechnet man auch das Azimut:

$$(BK) = 346^\circ\,23'\,23'' \quad \text{oder} \quad (KB) = 166^\circ\,23'\,23''. \quad (12)$$

Aus der Vergleichung des vorläufigen Wertes (10) und des endgültigen Wertes (11) von $log\ BK$ findet man, dass der vorläufige Wert um 0.000 558 zu klein war, und man hat daher alle bisher berechneten Seiten-Logarithmen um 0.000 558 zu vergrössern, d. h. man erhält dadurch aus (4) endgültig:

$$log\,PK = 3.534\,070\ ,\ log\,MK = 3.445\,291\ ,\ log\,PB = 3.269\,822\ ,\ log\,MB = 3.563\,493 \quad (13)$$

Mittelst des Azimutes (KB) oder (BK) und der Winkel $\varphi\ \varphi'\ \psi\ \psi'$ setzt man auch die zur Coordinaten-Rechnung nötigen Azimute zusammen:

$$\left.\begin{array}{ll}(KP) = (KB) - \varphi' = 159^\circ\,42'\,58'' & (KM) = (KB) - \varphi = 124^\circ\,17'\,29'' \\ (BP) = (BK) + \psi' = 358^\circ\,43'\,13'' & (BM) = (BK) + \psi = 17^\circ\ \ 5'\,52''\end{array}\right\} \quad (14)$$

Dabei müssen die Proben erfüllt sein:

$$(KP) - (KM) = \beta \qquad (BM) - (BP) = \beta'$$

Nun hat man von allen vier Strahlen KP, KM, BP, BM sowohl die Längen nach (13) als auch die Azimute nach (14), und man kann deshalb die Coordinaten der zwei Punkte P und M je zweifach berechnen.

Die Resultate sind mit Übereinstimmung:

$$\left.\begin{array}{lll} & y & x \\ P & +\,39041{,}04^m & +\,3411{,}86 \\ M & +\,40158{,}68^m & +\,5049{,}34.\end{array}\right\} \quad (15)$$

Anmerkung.

Wenn man die im vorstehenden behandelte Auflösung auch im allgemeinen beibehalten will, so kann man doch die Bestimmung der Winkel φ und ψ eleganter machen. Man hat nämlich ausser der Summe $\varphi + \psi$ nach (5), noch das Sinus-Verhältnis:

$$\sin\varphi : \sin\psi = MB : MK = \frac{PM}{\sin\beta'}\sin\gamma' : \frac{PM}{\sin\beta}\sin\alpha$$

$$\sin\varphi : \sin\psi = \frac{\sin\gamma'}{\sin\beta'} : \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

Aus der Summe $(\varphi + \psi)$ und dem Sinus-Verhältnis $\sin\varphi : \sin\psi$ kann man aber die Winkel φ und ψ durch Einführung eines Hilfswinkels bestimmen, wie bei der pothenotischen Aufgabe § 75. gezeigt wurde.

§ 79. Die Aufgabe der zwei unzugänglichen Punkte.

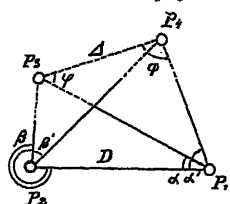
Zweite, allgemeinere Lösung.

Unsere erste Lösung der vorliegenden Aufgabe, im vorigen § 78., ist bei der Berechnung an eine bestimmte Figur gebunden. Bei sehr häufigem Vorkommen einer solchen Aufgabe liebt man allgemein-gültige Formeln, welche für jede denkbare Figur gelten, ähnlich wie bei der pothenotischen Aufgabe § 76.

So dringlich wie bei der pothenotischen Aufgabe ist in diesem Falle das Bedürfnis allgemeiner Formeln (nach denen man ein Formular drucken kann) nicht, denn die vorliegende Aufgabe kommt nicht sehr oft vor; indessen ist es doch eine nicht undankbare Arbeit, die Auflösung von möglichst allgemeinem Gesichtspunkte zu betrachten.

Wir fanden, dass eine allgemeine Auflösung möglich ist, wenn man zuerst über die Numerierung der Punkte selbst und dann über die Zählung der gemessenen Winkel allgemeine Bestimmungen trifft:

Fig. 1.
I. Fall. P_3 und P_4 auf *derselben* Seite von $P_1 P_2$.

Fig. 2.
II. Fall. P_3 u. P_4 auf *verschiedenen* Seiten von $P_1 P_2$.

Wir bezeichnen die zwei zu bestimmenden Punkte, auf welchen die Winkel-Messung stattfindet, mit P_1 und P_2, und die zwei gegebenen (unzugänglichen) Punkte mit P_3 und P_4, und zwar soll P_3 derjenige Punkt sein, welcher beim Drehen des Strahls $P_1 P_2$ um P_1 von links nach rechts zuerst getroffen wird. Die gemessenen Winkel (von links nach rechts gezählt) seien:

$$\left.\begin{array}{ll} P_2 P_1 P_3 = \alpha & P_1 P_2 P_3 = \beta \\ P_2 P_1 P_4 = \alpha' & P_1 P_2 P_4 = \beta' \end{array}\right\} \quad (1)$$

$$P_1 P_2 = D \text{ Standlinie}$$

$$P_3 P_4 = \Delta \text{ unzugängliche Entfernung.}$$

Diese Bezeichnungen sind in Fig. 1. und Fig. 2. eingeschrieben. Eine wesentlich andere Gestalt des Vierecks $P_1 P_2 P_3 P_4$ ist nicht denkbar, z. B. der Fall des vorigen § 78. Fig. 1. S. 252 ist in Fig. 2. mit inbegriffen. Es genügt deswegen, wenn man sich überzeugt, dass die folgenden Formeln den Fig. 1. und 2. *gemeinsam* entsprechen:

$$\varphi + \psi = 180^\circ - (\alpha' - \alpha) \quad (2)$$

Man setze:

$$\frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \beta} = m \qquad \frac{\sin(\beta' - \alpha')}{\sin \beta'} = n \quad (3)$$

und:

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{m}{n} = \operatorname{cotg} \mu \quad (4)$$

dann ist:

$$\operatorname{tang} \frac{\varphi - \psi}{2} = \operatorname{tang} \frac{\varphi + \psi}{2} \operatorname{cotg}(\mu + 45^\circ). \quad (5)$$

Damit sind die Winkel φ und ψ bestimmt; worauf sich alle Entfernungen nach dem Sinussatz berechnen lassen.

Wenn die unzugängliche Entfernung Δ nicht unmittelbar, sondern durch die Coordinaten von P_3 und P_4 gegeben ist, und wenn auch die Coordinaten von P_1 und P_2 zu bestimmen sind, so hat man ausser den vorstehenden Formeln (2) — (5), welche im Wesentlichen zur Bestimmung von φ und ψ dienen, noch folgende Formeln anzuwenden:

$$\operatorname{tang}(P_3 P_4) = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} \qquad \Delta = \frac{y_4 - y_3}{\sin(P_3 P_4)} = \frac{x_4 - x_3}{\cos(P_3 P_4)} \quad (6)$$

$$P_3 P_1 = \frac{\Delta \sin \psi}{\sin(\alpha' - \alpha)} \qquad P_4 P_1 = \frac{\Delta \sin \varphi}{\sin(\alpha' - \alpha)} \quad (7)$$

$$D = m \times P_3 P_1 = n \times P_4 P_1 \quad (8)$$

$$P_3 P_2 = P_3 P_1 \frac{\sin \alpha}{\sin(\beta \pm 180^\circ)} = \Delta \frac{\sin(\beta' - \alpha' - \psi)}{\sin(\beta' - \beta)} = \frac{\Delta \sin v}{\sin(\beta' - \beta)} \quad (9)$$

$$P_4 P_2 = P_4 P_1 \frac{\sin \alpha'}{\sin(\beta' \pm 180^\circ)} = \Delta \frac{\sin(\beta - \alpha + \varphi \pm 180^\circ)}{\sin(\beta' - \beta)} = \frac{\Delta \sin u}{\sin(\beta' - \beta)} \quad (10)$$

$$\left.\begin{array}{ll} (P_3 P_1) = (P_3 P_4) + \varphi & (P_3 P_2) = (P_3 P_1) + (\beta - \alpha) \pm 180^\circ \\ (P_4 P_1) = (P_4 P_3) - \psi & (P_4 P_2) = (P_4 P_1) + (\beta' - \alpha') \pm 180^\circ \end{array}\right\} \quad (11)$$

Nachdem somit die 4 Strahlenlängen $P_3 P_1$, $P_4 P_1$, $P_3 P_2$, $P_4 P_2$ und die zugehörigen Azimute $(P_3 P_1)$, $(P_4 P_1)$, $(P_3 P_2)$, $(P_4 P_2)$ berechnet sind, kann man die Coordinaten von P_1 und P_2 je zweifach bestimmen, wofür wir die Formeln (nach § 60. (7') S. 189) wohl nicht besonders anzuschreiben brauchen.

Nachdem die Coordinaten $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ von P_1 und P_2 berechnet sind, hat man noch die weitere Probe:

$$D = \sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2} \tag{12}$$

Der Hilfswinkel μ, welcher in Gleichung (4) durch $cotg\, \mu$ zweideutig bestimmt ist, ist willkürlich (als positiver oder negativer spitzer Winkel) zu wählen. $\frac{\varphi - \psi}{2}$ muss in (5) so gewählt werden, dass nachher D in Gleichung (8) und damit von selbst auch die übrigen Entfernungen, positiv werden.

Wir nehmen ein Zahlenbeispiel*) hiezu:

Gegebene Punkte:	P_4	$y_4 = -1341{,}53$	$x_4 = +310{,}57$
	P_3	$y_3 = -1198{,}31$	$x_3 = -313{,}34$
Differenzen		$y_4 - y_3 = -143{,}22$	$x_4 - x_3 = +623{,}91$

Damit berechnet man in bekannter Weise das Azimut und die Entfernung:

$$\text{Azimut } (P_3 P_4) = 347^\circ\ 4'\ 18'' \qquad log\, P_3 P_4 = log\, \Delta = 2.806\,273 \tag{13}$$

	Gemessene Winkel		*Differenzen*
	$\alpha' = 320^\circ\ 53'\ 48''$	$\beta' = 68^\circ\ 31'\ 54''$	$\beta' - \alpha' = 107^\circ\ 38'\ 6''$
	$\alpha = 38\ \ 55\ \ 0$	$\beta = 273\ \ 40\ \ 18$	$\beta - \alpha = 234\ \ 45\ \ 18$
Differenzen	$\alpha' - \alpha = 281^\circ\ 58'\ 48''$	$\beta' - \beta = 154^\circ\ 51'\ 36''$	

$log\, sin\, (\beta - \alpha)$	$9.912\,058_n$	$log\, sin\, (\beta' - \alpha')$	$9.979\,096$
$log\, sin\, \beta$	$9.999\,107_n$	$log\, sin\, \beta'$	$9.968\,772$
$log\, m$	$9.912\,951$	$log\, n$	$0.010\,324$
$log\, n$	$0.010\,324$		
$log\, cotg\, \mu$	$9.902\,627$	$\mu = 51^\circ\ 22'\ 12''$	
		$\mu + 45^\circ = 96\ \ 22\ \ 12$	
$log\, cotg\, (\mu + 45^\circ)$	$9.047\,811_n$	$\varphi + \psi = 180^\circ - (\alpha' - \alpha) = 258^\circ\ 1'\ 12''$	
$log\, tang\, \frac{1}{2}(\varphi + \psi)$	$0.091\,476_n$	$\frac{1}{2}(\varphi + \psi) = 129\ \ 0\ \ 36$	
$log\, tang\, \frac{1}{2}(\varphi - \psi)$	$9.139\,287$	$\frac{1}{2}(\varphi - \psi) = 187\ \ 50\ \ 48$	
		$\varphi = 316^\circ\ 51\ \ 24''$	$\psi = 301^\circ\ 9'\ 48''$
		$\beta - \alpha = 234\ \ 45\ \ 18$	$\beta' - \alpha' = 107\ \ 38\ \ 6$
nach den Formeln (9) und (10):		$u = 11^\circ\ 36'\ 42''$	$v = 166^\circ\ 28'\ 18''$

Nun hat man alles, was zur Ausrechnung der Entfernungen nach den Formeln (7)—(10) nöthig ist. Man findet mit $log\, \Delta$ von (13):

nach (7):	$log\, P_3 P_1 = 2.748\,155$	$log\, P_4 P_1 = 2.650\,781$	(14)
nach (8) mit Probe:	$log\, D = 2.661\,106$	$log\, D = 2.661\,105$	(15)
nach (9) und (10) mit Proben:	$log\, P_3 P_2 = 2.547\,139$	$log\, P_4 P_2 = 2.481\,846$	(16)
	$log\, P_3 P_2 = 2.547\,135$	$log\, P_4 P_2 = 2.481\,850$	

*) Es ist dieses dasselbe Beispiel, welches *Hansen* im 18. Band (1841) der „astronomischen Nachrichten" S. 165 in teilweise anderer Weise behandelt hat.

Die Azimute werden nach (11) zusammengesetzt:

$$\left.\begin{array}{ll}(P_3 P_1) = 303^\circ\ 55'\ 42'' & (P_3 P_2) = 358^\circ\ 41'\ 0'' \\ (P_4 P_1) = 225\ \ 54\ \ 30 & (P_4 P_2) = 153\ \ 32\ \ 56\end{array}\right\} \quad (17)$$

Da man nun in (14), (16) und (17) alle Entfernungen und Azimute hat, kann man die Coordinaten doppelt berechnen, wovon wir aber die Logarithmen nicht hersetzen, sondern nur die Zusammensetzungen:

	y	x		y	x
P_3	— 1198,31	— 313,34	P_3	— 1198,31	— 313,34
	— 464,62	+ 312,54		— 8,10	+ 352,39
P_1	— 1662,93	— 0,80	P_2	— 1206,41	+ 39,05
P_4	— 1341,53	+ 310,57	P_4	— 1341,53	+ 310,57
	— 321,40	— 311,37		+ 135,12	— 271,52
P_1	— 1662,93	— 0,80	P_2	— 1206,41	+ 39,05

Man hat noch die Probe nach (12):

P_2	— 1206,41	+ 39,05
P_1	— 1662,93	— 0,80
Differenzen	+ 456,52	+ 39,85

$(P_1 P_2) = 85^\circ\ 0'\ 41''$
$log\,(P_1 P_2) = 2.661\,108$
$= log\ D$ nach (15).

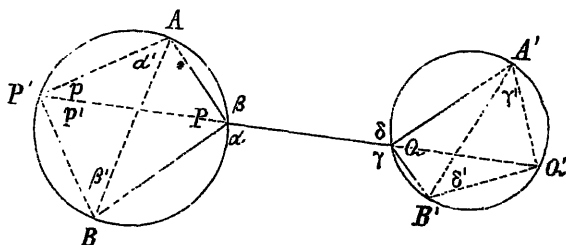
Besondere Fälle:

Wenn einer der zu bestimmenden Punkte P_1 oder P_2 in die Gerade der beiden gegebenen Punkte P_3 und P_4 fällt, so nenne man ihn P_2, dann wird der zweite Ausdruck (9) für $P_3 P_2$, welcher sonst eine Rechenprobe liefert, unbestimmt; im Übrigen ändert sich nichts.

Wenn einer der gegebenen Punkte P_3 oder P_4 in die Gerade der zu bestimmenden Punkte P_1 und P_2 fällt, so versagt die oben angegebene Regel über die Wahl der Benennung P_3 oder P_4; man nenne dann diesen Punkt P_4, damit nicht die erste Formel (9) für $P_3 P_2$ unbestimmt werde.

§ 80. Zweifach gegenseitiges Rückwärts-Einschneiden.*)

Es sind vier Punkte A, B, A', B' gegeben. Zwei andere Punkte P und Q liegen so, dass man zwischen denselben zusammensehen kann, und dass von dem einen Punkte P, zwei der gegebenen Punkte A und B, und von dem anderen Punkte Q die zwei anderen Punkte A' und B' sichtbar sind.

Fig. 1.
(Massstab 1 : 100 000.)
Gegebene Punkte $A\,B\,A'\,B'$.
Zu bestimmende Punkte PQ.

*) Diese Aufgabe findet sich mit geometrischer Auflösung durch zwei Kreise in der „technischen Anleitung zur Ausführung der trigonometrischen Operationen des Katasters, im Auftrage des königl. ungarischen Finanzministeriums, verfasst von *J. Marek.* Budapest 1875.“ S. 269.

Man misst in P die zwei Winkel:

$$APQ = \beta \quad \text{und} \quad QPB = \alpha \tag{1}$$

Ebenso misst man in Q die zwei Winkel:

$$B'QP = \gamma \quad \text{und} \quad PQA' = \delta. \tag{2}$$

Man soll daraus die beiden Punkte P und Q bestimmen.

Um die Aufgabe zunächst durch geometrische Konstruktion zu lösen, beschreibt man um ABP und um $A'B'Q$ je einen Kreis; die beiden Kreise schneiden die Gerade PQ in den Punkten P' und Q'. P' wird auf dem Kreis um APB bestimmt durch die Beziehungen:

$$\alpha' = 180° - \alpha \quad , \quad \beta' = 180° - \beta. \tag{3}$$

Ähnlich verhält es sich auch bei Q', nämlich:

$$\gamma' = 180° - \gamma \quad , \quad \delta' = 180° - \delta. \tag{4}$$

Dadurch ist auch die Coordinaten-Rechnung vorgeschrieben:

Man berechnet die Coordinaten von P' aus den Coordinaten von A und B und mit den Winkeln α' und β' nach der Grundaufgabe der Triangulierung, § 65., in gleicher Weise berechnet man die Coordinaten von Q'. Aus den Coordinaten von P' und Q' erhält man das Azimut $(P'Q')$, und damit ist auch das Dreieck $AP'P$ oder $BP'P$ bestimmt, und man kann die Coordinaten von P berechnen.

Entsprechend wird auf der andern Seite auch Q bestimmt.

Folgendes Zahlenbeispiel entspricht ungefähr den Verhältnissen von Fig. 1.:

Gegebene Coordinaten:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Punkt } A & y_a = -1902{,}43 & x_a = +6782{,}72 \\ \quad " \quad B & y_b = -2917{,}44 & x_b = +4362{,}81 \\ \quad " \quad A' & y_{a'} = +2814{,}33 & x_{a'} = +6428{,}78 \\ \quad " \quad B' & y_{b'} = +1627{,}49 & x_{b'} = +4702{,}81 \end{array}\right\} \tag{5}$$

Gemessene Winkel:

$$\left.\begin{array}{ll} \beta = 132°\ 17'\ 8'' & \delta = 138°\ 9'\ 12'' \\ \alpha = 138\ \ \ 9\ \ 42 & \gamma = 134\ \ \ 7\ \ 32 \end{array}\right\} \tag{6}$$

Nach (3) und (4) hat man:

$$\left.\begin{array}{lll} & \beta' = \ \ 47°\ 42'\ 52'' & \delta' = \ \ 41°\ 50'\ 48'' \\ & \alpha' = \ \ 41\ \ \ 50\ \ 18 & \gamma' = \ \ 45\ \ \ 52\ \ 28 \\ \text{hiezu:} & P' = \ \ 90\ \ \ 26\ \ 50 & Q' = \ \ 92\ \ \ 16\ \ 44 \\ \hline & 180°\ \ 0'\ \ 0'' & 180°\ \ 0'\ \ 0'' \end{array}\right\} \tag{7}$$

Aus den Coordinaten (5) berechnet man:

$$\left.\begin{array}{ll} \log BA = 3.418\,990 & \log A'B' = 3.321\,112 \\ \text{Azimut } (BA) = 22°\ 45'\ 19'' & \text{Azimut } (A'B') = 214°\ 30'\ 50'' \end{array}\right\} \tag{8}$$

Nun kann man mit (7) und (8) die beiden Dreiecke ABP' und $A'B'Q'$ vollständig berechnen, man findet die Coordinaten von P und Q':

$$y_{p'} = -3656{,}08 \quad x_{p'} = +5949{,}78 \qquad y_{q'} = +3089{,}82 \quad x_{q'} = +5057{,}65 \tag{9}$$

Hieraus Azimut und Entfernung von P' nach Q':

$$\left.\begin{array}{l} \text{Azimut } (P'Q') \\ = \text{Azimut } (PQ) = 97°\ 32'\ 1'' \qquad \log P'Q' = 3.832\,805 \end{array}\right\} \tag{10}$$

Azimut $(P'A) = 64° \; 35' \; 36''$
„ $(P'P) = 97 \; 32 \; 1$
„ $(P'B) = 155 \; 2 \; 27$

Winkel $p = 32° \; 56' \; 25''$
„ $p' = 57 \; 30 \; 26$ (11)

Die übrige Rechnung geht nach dem angegebenen Weg und ohne Schwierigkeit, und giebt schliesslich die Coordinaten:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{Punkt } P & y_p = -1089{,}03 & x_p = +5610{,}29 \\ \text{„} \quad Q & y_q = +1176{,}12 & x_q = +5310{,}73 \end{array}\right\} \quad (12)$$

§ 81. Vorwärts-Einschneiden mit Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Nachdem wir in § 73. S. 235—237 gesehen haben, wie man auf festen Punkten, mit je einem oder mehreren Strahlen, neue Strahlen orientieren, d. h. die Azimute der neuen Strahlen bestimmen kann, und nachdem wir in § 74. gesehen haben, wie man für *zwei* solche, von verschiedenen Punkten ausgehende Strahlen die Coordinaten ihres Schnittpunktes berechnen kann, wollen wir nun die Ausgleichung bei mehr als zwei Strahlen behandeln.*)

Die neuen Strahlen, welche aus orientierten Abrissen hervorgehen, sind zwar theoretisch im allgemeinen nicht gleichgewichtig, denn nach Band I. § 63. S. 162, (14), hat ein neuer Strahl, welcher durch einen Richtungssatz auf s alte, feste Strahlen orientiert wurde, das Gewicht:

$$p = \frac{s}{s+1} \tag{1}$$

Indessen wir wollen hier, wie oft geschieht, hievon absehen, und alle zum Schnitt bestimmten Strahlen als gleichgewichtig einführen.

Als Beispiel nehmen wir nach § 73. Fig. 1. S. 228 das Einschneiden von *Zion* von den vier Punkten *Bahnhof*, *Wasserturm*, *Technische Hochschule E*, und *Ägidius* aus, und es ist zu empfehlen, dieses Viereck mit den vier Strahlen nach *Zion*, von Fig. 1. S. 228 besonders für unsern Fall herauszuzeichnen.

Die erste Arbeit besteht in der Bestimmung von Näherungs-Coordinaten, wozu die Berechnung von § 74. S. 239 benützt werden kann.

Um aber zu zeigen, dass es ganz gleichgültig ist, woher man die Näherungs-Coordinaten hat, wollen wir von den auf S. 239 berechneten Coordinaten hier keinen Gebrauch machen, sondern eine zufällig vorhandene ältere ungenauere Bestimmung benützen, welche wir früher schon mit anderen Messungen berechnet hatten, nämlich:

$$\text{Zion, Näherung} \quad (y) = -15190{,}730^m \qquad (x) = +92728{,}050^m \tag{2}$$

Die ganze nun folgende Ausgleichung, deren Begründung aus den verschiedenen in Band I. vorgetragenen Theorien jetzt nicht mehr wiederholt wird, ist auf den zwei Seiten 260 und 261 enthalten (entsprechend dem Formular 10. der Anweisung IX. vom 25. Oktober 1881).

*) Eine ähnliche Aufgabe haben wir schon in Band I. § 57. gelöst, dabei waren vier unabhängige *Winkel* als gemessen angenommen. Jene Annahme war geeignet zur ersten theoretischen Einführung in die trigonometrischen Ausgleichungen, während in praktischer Beziehung die Ausgleichung nach Richtungen, welche wir jetzt vornehmen, wichtiger ist.

Azimut-Berechnung zu der Ausgleichung des Punktes Zion. (S. 261.)

Punkt P Punkt A	y_p y_a $y_p - y_a$	x_p x_a $x_p - x_a$	$log\,(y_p - y_a)$ $log\,(x_p - x_a)$ $log\,tang\,(A\,P)$	Azimut $(A\,P)$
	I. Vor der Ausgleichung:			
Zion	− 15190,730	+ 92728,050	2.218 588	
Bahnhof	− 15356,150	+ 92012,085	2.854 892	$(\varphi_1) =$
	+ 165,420	+ 715,965	9.363 696	13° 0′ 34,6″
Zion	− 15190,730	+ 92728,050	2.979 708	
Wasserturm, Pfeiler	− 16145,080	+ 92808,697	1.906 588$_n$	$(\varphi_2) =$
	+ 954,350	− 80,647	1.073 120$_n$	94° 49′ 49,0″
Zion	− 15190,730	+ 92728,050	1.881 482	
Techn. Hochschule, E	− 15266,847	+ 95002,299	3.356 838$_n$	$(\varphi_3) =$
	+ 76,117	− 2274,249	8.524 644$_n$	178° 4′ 59,1″
Zion	− 15190,730	+ 92728,050	3.117 583$_n$	
Ägidius, Centrum .	− 13879,790	+ 93575,890	2.928 314$_n$	$(\varphi_4) =$
	− 1310,940	− 847,840	0.189 269	237° 6′ 27,2″
	II. Nach der Ausgleichung:			
Zion	− 15190,778	+ 92728,019	2.218 462	
Bahnhof	− 15356,150	+ 92012,085	2.854 873	$\varphi_1 =$
	+ 165,372	+ 715,934	9.363 589	13° 0′ 23,4″
Zion	− 15190,778	+ 92728,019	2.979 686	
Wasserturm, Pfeiler	− 16145,080	+ 92808,697	1.906 755$_n$	$\varphi_2 =$
	+ 954,302	− 80,678	1.072 931$_n$	94° 49′ 56,6″
Zion	− 15190,778	+ 92728,019	1.881 208	
Techn. Hochschule, E	− 15266,847	+ 95002,299	3.356 844$_n$	$\varphi_3 =$
	+ 76,069	− 2274,280	8.524 364$_n$	158° 5′ 3,5″
Zion	− 15190,778	+ 92728,019	3.117 599$_n$	
Ägidius, Centrum .	− 13879,790	+ 93575,890	2.928 329$_n$	$\varphi_4 =$
	− 1310,988	− 847,871	0.189 270	237° 6′ 27,4″

Vorwärts-Einschneiden nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Eingeschnittener Punkt Zion, Kirchturm.

No.	Standpunkt	Zielpunkt	Gemessene Richtung α	Näherungs-Azimut (φ)	$(\varphi) - \alpha = l$	l^2
1.	Bahnhof	Zion	13° 0′ 22,2″	13° 0′ 34,6″	+ 12,4	153,76
2.	Wasserturm, Pfeiler .	„	94 49 56,3	94 49 49,0	— 7,3	53,29
3.	Techn. Hochschule, *E*	„	178 5 0,8	178 4 59,1	— 1,7	2,89
4.	Ägidius, Centrum . .	„	237 6 25,8	237 6 27,2	+ 1,4	1,96
			105,1″	169,9	+ 4,8	211,90

No.	φ	$\mathfrak{x}$	$\mathfrak{y}$	R km	$\frac{\mathfrak{x}}{R} = a$	$\frac{\mathfrak{y}}{R} = b$	l	a^2	b^2	ab +	ab —	al +	al —	bl +	bl —
1.	13,0°	— 4,64	+20,10	0,73	— 6,3	+27,4	+12,4	39,7	750,8		172,6		78,1	339,8	
2.	94,8	—20,56	— 1,73	0,96	—21,5	— 1,8	— 7,3	462,2	3,2	38,7		157,0		13,1	
3.	178,1	— 0,68	—20,61	2,28	— 0,3	— 9,1	— 1,7	0,1	82,8	2,7		0,5		15,5	
4.	237,1	+17,32	—11,20	1,56	+11,1	— 7,2	+ 1,4	123,2	51,8		79,9	15,5			10,1
								625,2	888,6	—211,1		+94,9		+358,3	

	a]	b]	l]
[a	+ 625	—211	+ 95
	[b	+ 889	+ 358
		— 71	+ 32
		[l	+ 212
			— 15
	[bb.1] =	+ 818	+ 390
			+ 197
			— 186
		[ll.2] =	+ 11

y = — 0,48 dm
y = — 0,048 m
y) = — 15190,730 m
y = — 15190,778 m

[b	[a	[l	
+889	— 211	+ 358	b]
	+ 625	+ 95	a]
	— 50	+ 85	l]
		+ 212	
		— 144	
[aa.1] =	+ 575	+ 180	
		+ 68	
		— 56	
	[ll. 2] =	+ 12	

$\delta x =$ — 0,31 dm
$\delta x =$ — 0,031 m
$(x) =$ + 92728,050 m
$x =$ + 92728,019 m

No.	Standpunkt	Zielpunkt	Gemessene Richtung α	Endgültiges Azimut φ	$\varphi - \alpha = v$	v^2
1.	Bahnhof	Zion	13° 0′ 22,2″	13° 0′ 23,4″	+ 1,2	1,44
2.	Wasserturm, Pfeiler .	„	94 49 56,3	94 49 56,6	+ 0,3	0,09
3.	Techn. Hochschule, *E*	„	178 5 0,8	158 5 3,5	+ 2,7	7,29
4.	Ägidius, Centrum . .	„	237 6 25,8	237 6 27,4	+ 1,6	2,56
			105,1″	110,9	+ 5,8	11,38

$[vv] = [ll.2] = 11.4$
$- 2 = 2$

$\log [vv]$	1.0569
$\log (n-2)$	0.3010
$\log m^2$	0.7559
$\log m$	0.3780

$m = \pm 2{,}4''$

$\log m^2$	0.7559
$\log [bb.1]$	2.9128
$\log m_y^2$	7.8431
$\log m_y$	8.9216

$m_y = \pm 0{,}08^{dm}$

$\log m^2$	0.7559
$\log [aa.1]$	2.7597
$\log m_x^2$	7.9962
$\log m_x$	8.9981

$m_x = \pm 0{,}10^{dm}$

Gesamt-Resultat: ***Zion, Kirchturm*** $y = -15190{,}778^m \pm 0{,}008^m$ $x = +92728{,}019^m \pm 0{,}010^m$

Die Rechnung nimmt folgenden Gang:

1) Mit den unter (1) gegebenen Näherungs-Coordinaten und mit den von S. 234 zu entnehmenden festgegebenen Coordinaten der Standpunkte Bahnhof, Wasserturm, Technische Hochschule und Ägidius, berechnet man in dem oberen Theil von S. 260 die vier Azimute *vor* der Ausgleichung.

2) Diese Näherungs-Azimute (φ) setzt man in dem Formular S. 261 an ihre Stelle. Gleichzeitig setzt man die gemessenen Richtungen α an ihre Stellen, nämlich:

Bahnhof — Zion	= 13°	0′	22,2″	von S.	237
Wasserturm — Zion	= 94	49	56,3	„ „	235
Tech. Hochschule — Zion	= 178	5	0,8	„ „	237
Ägidius — Zion	= 237	6	25,8	„ „	236.

Es folgt die Einsetzung der Differenzen $(\varphi) - \alpha = l$, und sofort auch die Quadrierung l^2, mit der Summe $[l\,l] = 211{,}9$.

3) In der zweiten Gruppe von S. 261 beginnt man mit Einsetzen der Azimute φ nur etwa auf 0,1° genau. Dazu setzt man die Coefficienten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ aus der Hilfstafel III. S. [8]—[9] des Anhangs von Band. I. Daneben schreibt man auch die Strahlenlängen R in Kilometern, die man genügend genau aus einem Übersichtsnetz der Triangulierung abmessen kann. (Allerdings unser Holzschnitt Fig. 1. S. 228 ist hiezu zu klein, aber ein grösseres und schärferes Netz braucht man ohnehin.)

Nach diesem folgen die Divisionen:

$$\frac{\mathfrak{x}}{R} = a \qquad \text{und} \qquad \frac{\mathfrak{y}}{R} = b$$

entweder geradezu, oder mit dem Rechenschieber.

Statt all dieser hier unter 3) genannten Arbeiten, kann man die a und b auch unmittelbar genauer rechnen, nach den Formeln:

$$a = -\frac{1}{10}\frac{\sin\varphi}{r}\varrho'' \qquad b = +\frac{1}{10}\frac{\cos\varphi}{r}\varrho'' \tag{3}$$

wo r die Entfernung in Metern ist, und $\frac{1}{10}$ zugesetzt wurde, um die Coordinaten-Korrektionen in Decimetern zu erhalten. Will man direkt nach (3) rechnen, so geschieht das im Anschluss an S. 260 (vgl. Formular 10. Seite 2. der Anweisung IX. vom 25. Oktober 1881).

4) Es folgt die Ausrechnung der a^2, b^2, ab u. s. w. und ihrer Summen $[a\,a]$, $[b\,b]$, $[a\,b]$ u. s. w. in dem Schema, welches die Mitte von S. 261 einnimmt.

Die Elimination geht nach dem Beispiele an Band I. S. 48, z. B. in der ersten Eliminationslinie auf S. 261 hat man:

$$-\frac{211}{625}\,211 = -71 \qquad -\frac{-211}{625}\,95 = +32 \quad \text{u. s. w.}$$

Dieses macht man am bequemsten mit dem Rechenschieber.

Man findet $\delta y = -0{,}48^{dm}$, $\delta x = -0{,}31^{dm}$ und $[l\,l\,.2] = +11$ oder $[l\,l\,.2] = +12$. Die Übereinstimmung $+11$ und $+12$ ist genügend und dient als Probe.

5) Die Korrektionen $\delta y = -0{,}48^{dm}$ und $\delta x = -0{,}31^{dm}$ werden in Meter umgewandelt: $\delta y = -0{,}048^m$, $\delta x = -0{,}031^m$, zu den Näherungen (y) und (x) hinzugefügt, und geben damit das Haupt-Resultat:

$$y = -15190{,}778^m \qquad x = +92728{,}019^m.$$

6) Damit füllt man den unteren Teil von S. 260 aus, und berechnet die endgültigen Azimute φ *nach* der Ausgleichung, setzt diese φ in den unteren Teil von S. 261 und berechnet die v und v^2 mit der Summe $[v\,v]$, gerade so wie oben anfangs die l und $[l\,l]$.

7) Wenn $[v\,v] = 11{,}38$ mit $[l\,l\,.\,2] = 11$ oder $= 12$ hinreichend stimmt, was hier der Fall ist, so kann man das Ganze als richtig gelten lassen. Man berechnet dann noch den mittleren Fehler m einer Richtung, und die mittleren Coordinaten-Fehler m_y und m_x, nach dem Vordruck unten auf S. 261 und hat dann das Gesamt-Resultat:

$$\text{Zion, Kirchturm} \quad . \quad . \quad \left.\begin{array}{ll} y = -15190{,}778^m & x = +92728{,}019^m \\ \pm 0{,}008 & \pm 0{,}010 \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Schärfe der Zahlenrechnung. Unsere Rechnung S. 261 ist mit so vielen Stellen geführt, als nötig ist, um die Coordinaten auf 1^{mm} scharf zu erhalten. Das ist offenbar völlig genügend. Man kann sogar an Rechenschärfe noch etwas nachlassen. Versuchsweise haben wir die zweite Gruppe von S. 261 abgerundet gerechnet:

φ	a	b	a^2	b^2	ab
13°	− 6	+ 28	36	784	− 168
95	− 21	− 2	441	4	+ 42
178	0	− 9	0	81	0
237	+ 11	− 7	121	49	− 77
			598	918	− 203 (5)

Die so weiter geführte Rechnung gab die Schluss-Coordinaten nur je um 1^{mm} anders als die Rechnung auf S. 261.

Wer keine überflüssigen Decimalen schreibt und einigermassen mit dem Rechenschieber vertraut ist, kann die ganze Rechnung von S. 261 leicht in der doppelten Zeit herunter führen, als zum pünktlichen Schreiben überhaupt erforderlich ist. Allerdings gehört zum Rechnen mit *wenig* Ziffern mehr Erfahrung, als zum Ansetzen von 5—6 stelligen Columnen, welche der Anfänger liebt.

Wir haben gesehen, dass die Abkürzungen (5) am Schluss-Resultat nur Änderungen von 1^{mm} ausmachten; was hat es aber zu bedeuten, wenn hier auch Rechenfehler von 2—3 Millimetern entstehen? Die Ausgleichung nach *vermittelnden* Beobachtungen hat überhaupt im Vergleich mit der Ausgleichung nach *bedingten* Beobachtungen das Eigentümliche, dass bei weitergehenden Abrundungen nur die Minimumsbedingung für $[v\,v]$ weniger scharf erfüllt wird (was aber gerade in der Nähe eines Minimums wenig schadet), dass aber die geometrische Möglichkeit des Zusammengehens aller Resultate (z. B. alles auf 1^{mm} formell stimmend) trotzdem unabhängig erhalten bleiben kann.

Um ein Bild von der wirklichen, sachlichen Genauigkeit zu erhalten, welche bei solchen Punkt-Einschneidungen erreicht werden kann, brauchen wir nur die schon früher auf S. 234 unten mitgeteilten 10 vorwärts-eingeschnittenen Punkte mit ihren mittleren Coordinaten-Fehlern m_y und m_x zu betrachten. Wir haben daraus im Mittel berechnet:

$$\text{Mittlerer Punktfehler} \quad \sqrt{(m_y)^2 + (m_x)^2} = \pm 17^{mm} \tag{6}$$

und dazu noch aus den 10 Berechnungs-Tabellen von der Form S. 261:

$$\text{Mittlerer Richtungsfehler} \quad m = \pm 1{,}9''. \tag{7}$$

Diese zwei Zahlenwerte (6) und (7) zeigen die Genauigkeit guter Messungen auf kleinem Gebiete, wobei keine Punkt-Verrückungen an Türmen u. s. w. im Laufe der Arbeit vorgekommen sind. Bei räumlich und zeitlich weit ausgedehnten Messungen wird man auf grössere mittlere Fehler als (6) und (7) zu rechnen haben.

§ 82. Rückwärts (Pothenotisch) -Einschneiden mit Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Da wir die pothenotische Richtungs-Ausgleichung theoretisch, und in einem Beispiel, bereits in Band I. § 60. und 61. behandelt haben, ist es uns jetzt nur noch darum zu thun, an einem Formular-Beispiel S. 265 und S. 266 den ganzen Gang dieser wichtigsten aller trigonometrischen Ausgleichungen ohne jede Auslassung oder Zufügung vor Augen zu führen.

Eine Figur zu diesem Beispiel kann man sich leicht aus Fig. 1. S. 228 bilden, indem man die fünf Strahlen von Victoria nach Techn. Hochschule, Kreuz-Turm, Martin-Turm, Wasser-Turm und Kunst auszieht.

Die gegebenen Coordinaten dieser fünf Punkte entnimmt man von S. 234, die Näherungs-Coordinaten von Victoria wurden nach § 76. mit der Auswahl Technische Hochschule, Wasser-Turm und Kunst berechnet, und dabei auch die auf Victoria gemessenen Richtungen vorläufig so auf Azimute orientiert, wie sie auf S. 266 unter α eingesetzt sind.

Zur Veranschaulichung der Genauigkeit unserer sämtlichen pothenotischen Ausgleichungen von Fig. 1. S. 228 haben wir bereits auf S. 235 die mittleren Coordinatenfehler angegeben und wir bilden daraus den Mittelwert:

$$\text{Mittlerer Punktfehler} \quad \sqrt{(m_y)^2 + (m_x)^2} = \pm 36^{mm}$$

und

$$\text{Mittlerer Richtungsfehler} \quad m = \pm 5{,}3''.$$

Vergleicht man dieses mit den entsprechenden Werten $\pm 17^{mm}$ und $\pm 1{,}9''$ für Vorwärts-Einschneiden, nach (6) und (7) § 81. (s. oben), so sieht man, dass die rückwärts eingeschnittenen Punkte nur etwa halbe Genauigkeit der vorwärts eingeschnittenen Punkte haben, was sich durch die allmähliche Fehler-Anhäufung und dadurch erklärt, dass die ersteren Punkte als scheinbar fehlerfrei den Rückwärts-Einschneidungen zu Grunde gelegt wurden.

Azimut-Berechnung zu der pothenotischen Ausgleichung des Punktes Victoria.

Punkt A Punkt P	y_a y_p $y_a - y_p$	x_a x_p $x_a - x_p$	$log\,(y_a - y_p)$ $log\,(x_a - x_p)$ $log\,tang\,(PA)$	Azimut (PA)
	I. Vor der Ausgleichung (vorläufig):			
Techn. Hochschule S	— 15320,943	+ 95013,695	2.870 342	
Victoria	— 16062,837	+ 93666,450	3.129 446	
	+ 741,894	+ 1347,245	9.740 896	28° 50′ 25,8″
Kreuz-Turm . . .	— 14331,880	+ 94017,271	3.238 286	
Victoria	— 16062,837	+ 93666,450	2.545 085	
	+ 1730,957	+ 350,821	0.693 201	78° 32′ 34,1″
Martin-Turm . . .	— 15881,797	+ 93169,470	2.257 775	
Victoria	— 16062,837	+ 93666,450	2.696 339$_n$	
	+ 181,040	— 496,980	9.561 436$_n$	159° 59′ 3,5″
Wasserturm . . .	— 16145,760	+ 92808,280	1.918 675$_n$	
Victoria	— 16062,837	+ 93666,450	2.933 573$_n$	
	— 82,923	— 858,170	8.985 102	185° 31′ 9,2″
Kunst-Turm . . .	— 17010,553	+ 94967,919	2.976 678$_n$	
Victoria	— 16062,837	+ 93666,450	3.114 434	
	— 947,716	+ 1301,469	9.862 244	323° 56′ 18,0″
	II. Nach der Ausgleichung (endgültig):			
Techn. Hochschule S	— 15320,943	+ 95013,695	2.870 352	
Victoria	— 16062,855	+ 93666,423	3.129 455	
	+ 741,912	+ 1347,272	9.740 897	28° 50′ 26,0″
Kreuz-Turm . . .	— 14331,880	+ 94017,271	3.283 291	
Victoria	— 16062,855	+ 93666,423	2.545 119	
	+ 1730,975	+ 350,848	0.693 172	78° 32′ 31,4″
Martin-Turm . . .	— 15881,797	+ 93169,470	2.257 818	
Victoria	— 16062,855	+ 93666,423	2.696 316$_n$	
	+ 181,058	— 496,953	9.561 502	159° 58′ 53,4″
Wasserturm . . .	— 16145,760	+ 92808,280	1.918 581$_n$	
Victoria	— 16062,855	+ 93666,423	2.933 560$_n$	
	— 82,905	— 858,143	8.985 021	185° 31′ 5,5″
Kunst-Turm . . .	— 17010,553	+ 94967,919	2.976 670$_n$	
Victoria	— 16062,855	+ 93666,423	3.114 443	
	— 947,698	+ 1301,496	9.862 227$_n$	323° 56′ 21,8″

Rückwärts-Einschneiden nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Eingeschnittener Punkt: Victoria-Strasse.

Standpunkt	Zielpunkt	Gemessene Richtung α	Näherungs-Azimut (φ)	$(\varphi)-\alpha = l'$	$l'-\frac{[l']}{n} = l$	l^2
Victoria	Techn. Hochschule, *S*	28° 50′ 25,9″	28° 50′ 25,8″	− 0,1	− 3,3	10,9
„	Kreuz-Turm	78 32 32,7	78 32 34,1	+ 1,4	− 1,8	3,2
„	Martin-Trm	159 58 49,4	159 59 3,5	+14,1	+10,9	118,8
„	Wasserturm	185 31 8,7	185 31 9,2	+ 0,5	− 2,7	7,3
„	Kunst-Tuurm	323 56 17,9	323 56 18,0	+ 0,1	− 3,1	9,6
	Summen	134,6″	90,6″	+16,0	0,0	149,8
			Mittel	+ 3,2		

No.	φ	$\mathfrak{x}$	$\mathfrak{y}$	R m	$-\frac{\mathfrak{x}}{R} = a'$	$-\frac{\mathfrak{y}}{R} = b'$	$a'-\frac{[a']}{n} = a$	$b'-\frac{[b']}{n} = b$	l	a^2	b^2	ab +	ab −	al +	al −	bl +	bl −
.	28,8°	− 9,94	+18,07	1,54	+ 6,5	−11,7	+ 2,2	−18,9	− 3,3	4,8	357,2		41,6		7,3	62,4	
.	78,5	−20,22	+ 4,11	1,77	+11,4	− 2,3	+ 7,1	− 9,5	− 1,8	50,4	90,2		67,4		12,8	17,1	
.	160,0	− 7,05	−19,38	0,53	+13,3	+36,6	+ 9,0	+29,4	+10,9	81,0	864,4	264,6		98,1		320,5	
.	185,5	+ 1,98	−20,53	0,86	− 2,3	+23,8	− 6,6	+16,6	− 2,7	43,6	275,6		109,6	17,8			44,8
.	323,9	+12,15	+16,67	1,61	− 7,5	−10,4	−11,8	−17,6	− 3,1	139,2	309,8	207,7		36,6		54,6	
				Summen	+21,4	+36,0	− 0,1	0,0	0,0	+319,0	+1897,2	+ 253,7		+182,4		+409,8	
				Mittel	+ 4,3	+ 7,2											

	a]	b]	l]
[a	+ 319	+ 254	+ 132
		+1897	+ 410
		− 202	− 105
		l]	+ 150
			− 55
	[bb.1] = +1695		+ 305
			+ 95
			− 55
		[ll.2] =	+ 40

[b	[a	[l	
+1897	+ 254	+ 410	b]
	+ 319	+ 132	a]
	− 34	− 55	
		+ 150	l]
		− 89	
[aa.1] = +285		+ 77	
		+ 61	
		− 21	
[ll.2] =		+ 40	

δy = − 0,18^dm
δy = − 0,018^m
(y) = − 16062,837^m
y = − 16062,855^m

δx = − 0,27^dm
δx = − 0,027^m
(x) = + 93666,450^m
x = + 93666,423^m

$$\left(\text{Probegleichung: } z = -\frac{[v']}{n} = -\frac{[a']}{n}\,\delta x - \frac{[b']}{n}\,\delta y - \frac{[l']}{n}.\right)$$

No.	Standpunkt	Zielpunkt	Gemessene Richtung α	Endgültiges Azimut φ	$\varphi-\alpha = v'$	$v-\frac{[v']}{n} = v$	v^2
1.	Victoria	Techn. Hochschule, *S*	28° 50′ 25,9″	28° 50′ 26,0″	+ 0,1	− 0,6	0,36
2.	„	Kreuz-Turm	78 32 32,7	78 32 31,4	− 1,3	− 2,0	4,00
3.	„	Martin-Turm	159 58 49,4	159 58 53,4	+ 4,0	+ 3,3	10,89
4.	„	Wasserturm	185 31 8,7	185 31 5,5	− 3,2	− 3,9	15,21
5.	„	Kunst-Turm	323 56 17,9	323 56 21,8	+ 3,9	+ 3,2	10,24
		Summen	134,6″	138,1″	+ 3,5	0,0	40,70
				Mittel	+ 0,7		

$[vv] = [ll.2] = 40{,}7$
$n - 3 = 2$

$\log [vv]$	1.6096
$\log (n-3)$	0.3010
$\log m^2$	1.3086
$\log m$	0.6543
	$m = \pm 4{,}5''$

$\log m^2$	1.3086
$\log [bb.1]$	3.2292
$\log m_y^2$	8.0794
$\log m_y$	9.0397
	$m_y = \pm 0{,}11^{dm}$

$\log m^2$	1.3086
$\log [aa.1]$	2.4548
$\log m_x^2$	8.8538
$\log m_x$	9.4269
	$m_x = \pm 0{,}27^{dm}$

Gesamt-Resultat: ***Victoria-Strasse*** **y = − 16062,855^m ± 0,011^m** **x = + 93666,423^m ± 0,027^m**

§ 83. Vorwärts- und Rückwärts-Einschneiden nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Was in Band I. § 63., § 64. und § 66. bereits theoretisch und an einem Beispiel klar gemacht worden ist, das soll uns hier nur in der Hinsicht nochmals beschäftigen, wie eine solche Ausgleichung sich in unseren Schematen S. 261 und S. 266 vereinigen lässt. Sind $[a_1\,a_1]$, $[a_1\,b_1]$ u. s. w. die Summen-Coëfficienten von S. 261 und $[a_2\,a_2]$, $[a_2\,b_2]$ u. s. w. die entsprechenden Coëfficienten von S. 266, für *denselben* Punkt, den wir also als vorwärts *und* rückwärts eingeschnitten voraussetzen, dann hat man nichts zu thun, als diese Coëfficienten zu addieren:

$$[a_1\,a_1] + [a_2\,a_2] = [a\,a] \quad , \quad [a_1\,b_1] + [a_2\,b_2] = [a\,b] \text{ u. s. w.} \qquad (1)$$

dann löst man die Gleichungen auf:

$$[a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,l] = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

was man in dem einen oder dem anderen Schema S. 261 oder S. 266 machen kann, und nach der Auflösung rechnet man wieder in beiden Schematen getrennt weiter, um schliesslich $[v\,v]$ wieder aus beiden Teilen $[v_1\,v_1] + [v_2\,v_2]$ zusammenzusetzen.

Bei den Zusammensetzungen (1) wird man allerdings die Gewichtsfrage nach Band I. § 63. und § 66. schärfer erwägen müssen, als dieses bei getrennten Ausgleichungen S. 261 oder S. 267 nötig war. Will man sich auf ganz feine Gewichts-Bemessung nicht einlassen, so wird es sich nach Band I. S. 179 empfehlen, statt der obigen Addition (1) so zu rechnen:

$$\tfrac{1}{2}\,[a_1\,a_1] + [a_2\,a_2] = [a\,a] \quad \text{u. s. w.}$$

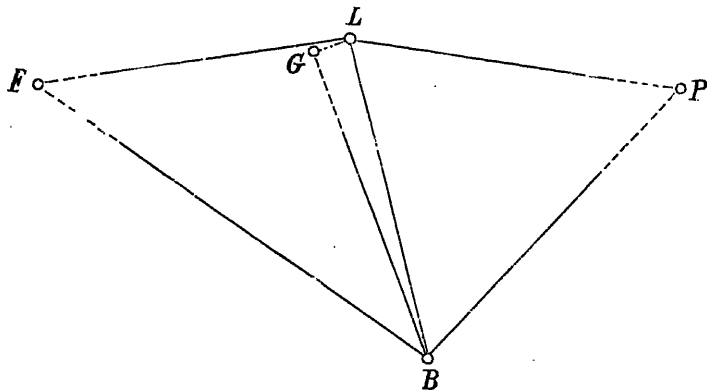
d. h. den äusseren Richtungen halbes Gewicht zu geben.

Den Nenner für das mittlere Fehlerquadrat kann man nach dem Beispiel (17) S. 179, Band I. einrichten. Für schärfere Berechnung kämen die Formeln (11) und (12) S. 161 — S. 162, Band I. in Betracht.

Doppel-Punkt-Einschaltung (Fig. 1.).

Die nächste Erweiterung der Einschneide-Ausgleichungen besteht darin, dass *zwei* Punkte gegenseitig angezielt und ausserdem gegen andere Punkte sozusagen pothenotisch bestimmt werden, z. B. in Fig. 1. sind gemessen:

in L die Richtungen LB, LG, LF, LP
in B die Richtungen BL, BP, BF, BG.

Fig. 1.
Gegebene Punkte F, G, P.
Neu bestimmte Punkte L, (x, y), und B, (x', y').

Nun stellt man zunächst für die Standpunkte L und B die Fehlergleichungen auf, wie wenn man pothenotische Bestimmung hätte, nur mit dem Unterschied, dass die jenseitige Punktverschiebung in der Linie LB jedesmal mit berücksichtigt werden muss.

Indem x, y die Coordinaten-Korrektionen von L, und x', y' entsprechend von B sein sollen, wollen wir annehmen, man habe auf diese Weise folgende Fehlergleichungen erhalten: *)

$$\left.\begin{array}{llllll} LB & v_1 = z - & 0{,}90\,(x - x') & - & 4{,}58\,(y - y') & + 0{,}0 \\ LG & v_2 = z + & 37{,}98\,x & - & 19{,}13\,y & + 5{,}6 \\ LF & v_3 = z + & 4{,}81\,x & - & 0{,}66\,y & + 1{,}4 \\ LP & v_4 = z - & 4{,}38\,x & - & 0{,}93\,y & + 0{,}9 \end{array}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{llllll} BL & v_5 = z' + & 0{,}90\,(x' - x) & + & 4{,}58\,(y' - y) & + 0{,}0 \\ BP & v_6 = z' - & 3{,}04\,x' & + & 2{,}81\,y' & - 2{,}7 \\ BF & v_7 = z' + & 2{,}63\,x' & + & 1{,}95\,y' & + 6{,}7 \\ BG & v_8 = z' + & 1{,}42\,x' & + & 4{,}57\,y' & + 6{,}4 \end{array}\right\} \quad (3)$$

Diese acht Fehler-Gleichungen enthalten zusammen sechs Unbekannte, nämlich:

$$z \;,\; z' \;,\; x \;,\; y \;,\; x' \;,\; y'$$

und es ist zunächst das einfachste, die acht Fehler-Gleichungen nach diesen sechs Unbekannten zu ordnen, die Normal-Gleichungen auch nach dieser Ordnung zu bilden und aufzulösen, wobei der Umstand, dass die z und z' einfache Coëfficienten haben (+1 oder 0), sich *von selbst* günstig ausdrückt.

Will man aber nach der mehr systematischen *Schreiber*schen Methode verfahren, welche in Band I. § 63.—§ 65. mitgeteilt wurde, so hat man zu den obigen Gruppen (2) und (3) die *Summen* zu bilden, und dieselben als fingierte Fehler-Gleichungen mit den Gewichten $-\frac{1}{4}$ und $-\frac{1}{4}$ zu den bereits vorhandenen acht Fehler-Gleichungen hinzuzunehmen, und dann diese zehn Fehler-Gleichungen, nun mit Weglassung von z und z', nur mit den vier Unbekannten x, y, x', y' weiter zu behandeln.

§ 84. Fehlerzeigende Figur durch *Seiten*-Differenzen für Vorwärts-Einschneiden.

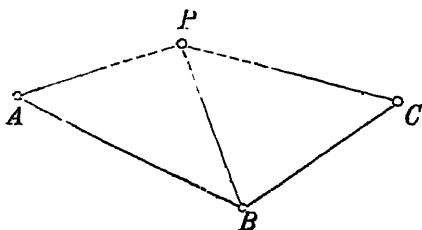



Fig. 1.

In Fig. 1. seien die drei Punkte A, B, C durch ihre Coordinaten gegeben, nämlich:

$$\left.\begin{array}{lrr} & y & x \\ A & -44904{,}30 & +15967{,}50 \\ B & -39554{,}90 & +14032{,}80 \\ C & -36479{,}40 & +167360{,}50 \end{array}\right\} \quad (1)$$

Die drei Strahlen AP, BP, CP seien durch Richtungs-Messungen an die

*) Diese Fehler-Gleichungen entstehen, wenn man das Zahlen-Beispiel der vorigen Auflage (1877) § 120., welches dort mit sechs unabhängigen *Winkeln* durchgeführt war, nun so abändert, dass zwei Sätze von *Richtungs*-Messungen in L und in B angenommen werden, dabei sind die Azimute von *Süden* gezählt.

festen Strahlen AB, BC angeschlossen, und dadurch seien in A, B und C folgende orientierte Abrisse erhalten worden:

Standpunkt A	*Standpunkt B*	*Standpunkt C*	
$(AP) = 66° 57' 51{,}2''$	$[BA] = 289° 53' 0{,}2''$	$[CB] = 228° 25' 47{,}2''$	
$[AB] = 109\ 53\ 0{,}2$	$(BP) = 333\ 1\ 50{,}5$	$(CP) = 278\ 36\ 36{,}2$	(2)
	$[BC] = 48\ 25\ 47{,}2$		
$\log AB = 3.754\,998$		$\log CB = 3.613\,931$	

Aus Differenzen dieser Azimute bildet man die Winkel der zwei Dreiecke APB und BPC, nämlich:

	$\triangle APB$		$\triangle BPC$	
A	42° 55′ 9,0″	B	75° 23′ 56,7	
P	93 56 0,7	P	54 25 14,3	
B	43 8 50,3	C	50 10 49,0	(3)
	180° 0′ 0,0″		180° 0′ 0,0″	

Mit diesen Winkeln (3) und mit den schon bei (2) angegebenen Basis-Logarithmen $\log AB$ und $\log CB$ berechnet man die übrigen Seiten:

	$\triangle APB$	$\triangle BPC$	
$AP = 3899{,}42^m$	$BP = 3882{,}83^m$		
	$BP = 3882{,}15$	$CP = 4891{,}23^m$	
Differenz	$0{,}68^m$		(4)

Die Seite BP wird aus beiden Dreiecken nicht gleich erhalten, sondern aus dem linken Dreieck APB um $0{,}68^m$ grösser als aus dem rechten Dreieck BPC. Damit ist bewiesen, dass sich die drei Strahlen AP, BP und CP nicht in *einem* Punkte schneiden, sondern ein sogenanntes fehlerzeigendes Dreieck bilden, das wir in Fig. 2. in grösserem Massstab gezeichnet haben. Es war dazu bloss nötig, die Differenz von (4), $0{,}68^m = P_1 P_3$ aufzutragen, und die Winkel entsprechend Fig. 1. S. 268 anzulegen.

Fig. 2.
Fehlerzeigendes Dreieck.
(Massstab 1 : 50.)
$P_1 P_3 = 0{,}68 m.$*)

Nachdem das fehlerzeigende Dreieck Fig. 2. so konstruiert ist, hat man in demselben sich für einen Punkt als eigentlichen Schnittpunkt zu entscheiden.

Wir wollen zunächst annehmen, man wolle die Entscheidung schlechthin *nach Gutdünken* treffen, was in den meisten Fällen geschieht. (Weiteres hierüber soll in § 87. gesagt werden.)

Es sei also der Punkt P in Fig. 2. als endgültig angenommen, dann kann man auch die endgültigen Seiten, Azimute und Coordinaten in folgender Weise bestimmen:

---

*) Die Widersprüche sind in diesem fingierten Beispiel absichtlich sehr gross gewählt. Bei guten Messungen fallen die fehlerzeigenden Figuren kleiner aus.

Man fällt von P Senkrechte auf die Seiten $P_2 P_3$, $P_3 P_1$, $P_1 P_2$ und misst sowohl die Längen e_1 , e_2 , e_3 dieser Senkrechten ab, als die Stücke, in welche dadurch die Seiten s_1 , s_2 , s_3 zerlegt werden. $s_2 = 0{,}68$ wird zerlegt in die Stücke 0,48 und 0,20, und die zugehörige Senkrechte ist $e_2 = 0{,}06$.

Damit bekommt man die ausgeglichene Seite BP zweifach, nämlich:

$$\left.\begin{array}{rr@{\qquad}rr} \text{aus } \triangle\, ABP & & \text{aus } \triangle\, BPC & \\ BP_3 = & 3882{,}83 & BP_1 = & 3882{,}15 \\ & -0{,}20 & & +0{,}49 \\ \hline BP = & 3882{,}63 & BP = & 3882{,}63 \end{array}\right\} \tag{5}$$

Das Azimut $(BP_1) = (BP_3)$, welches bei (2), $= (BP) = 333^\circ\ 1'\ 50{,}5''$ gegeben worden ist, muss vermindert werden um den Betrag:

$$\frac{e_2}{BP}\,\varrho = \frac{0{,}06}{3882}\,206265 = 3{,}2'' \tag{6}$$

und es ist also endgültig, auf 1″ genau abgerundet,:

$$[BP] = 333^\circ\ 1'\ 50{,}5'' - 3{,}2'' = 333^\circ\ 1'\ 47'' \tag{7}$$

In gleicher Weise findet man:

$$\left.\begin{array}{l} AP = AP_3 - 0{,}07 = 3899{,}42 - 0{,}07 = 3899{,}35 \\ CP = CP_1 + 0{,}35 = 4891{,}23 + 0{,}35 = 4891{,}58 \end{array}\right\} \tag{8}$$

Die Senkrechten $e_1 = 0{,}19$ und $e_3 = 0{,}37$ geben die Richtungs-Korrektionen:

$$\frac{e_1}{AP}\,\varrho = \frac{0{,}19}{3899}\,206265 = 10'' \quad , \quad \frac{e_3}{CP}\,\varrho = \frac{0{,}37}{4892}\,206265 = 16'' \tag{9}$$

und damit die endgültigen Azimute $[AP]$ und $[CP]$:

$$\left.\begin{array}{rr@{\qquad}rr} (AP) = & 66^\circ\ 57'\ 51'' & (CP) = & 278^\circ\ 36'\ 36'' \\ \text{Korrektionen} = & +10'' & \text{Korrektionen} = & +16'' \\ \hline [AP] = & 66^\circ\ 58'\ \ 1'' & [CP] = & 278^\circ\ 36'\ 52'' \end{array}\right\} \tag{10}$$

$$\left.\begin{array}{lll} AP = 3899{,}35 & BP = 3882{,}63 & CP = 4891{,}58 \\ [AP] = 66^\circ\ 58'\ 1'' & [BP] = 330^\circ\ 1'\ 47'' & [CP] = 270^\circ\ 36'\ 52'' \end{array}\right\} \tag{11}$$

und wenn man damit die Coordinaten von P auf allen drei Wegen, von A , B und C aus berechnet, so erhält man mit genügender Übereinstimmung:

$$\begin{array}{lrr} & y & x \\ \text{Coordinaten von } P & -41315{,}80 & +17493{,}17. \end{array} \tag{12}$$

Anmerkung. Die Richtungs-Correktionen nach (6) und (9), z. B.:

$$\frac{e_2}{BP}\,\varrho = \frac{0{,}06}{3882}\,206265 = 3{,}2''$$

kann man mit dem Rechenschieber, oder graphisch durch ein Strahlen-Diagramm bestimmen.

Wenn mehr als drei Strahlen zum Schnitt kommen, so wird die Behandlung der Aufgabe nicht wesentlich anders als bei drei Strahlen.

Wir wollen hier noch ein Beispiel mit vier Strahlen vorführen, wegen der Vergleichung mit dem folgenden § 85.

In Fig. 1. S. 272 des *folgenden* § 85. sollen die eingeschriebenen zwölf Winkel folgende Werte haben:

ΔAPB	ΔBPC	ΔCPD	ΔDPA
1. 42° 54′ 57,0″	4. 75° 23′ 56,7″	7. 40° 53′ 0,2″	10. 16° 58′ 38,4″
2. 93 56 12,7	5. 54 24 51,7	8. 62 55 14,9	11. 148 43 40,7
3. 43 8 50,3	6. 50 11 11,6	9. 76 11 44,9	12. 14 17 40,9
180° 0′ 0,0″	180° 0′ 0,0″	180° 0′ 0,0″	180° 0′ 0,0″

(13)

Die Basis-Logarithmen sind:

$log\ AB = 3.754\,998$ $log\ BC = 3.613\,931$ $log\ CD = 3.651\,749$ $log\ DA = 3.840\,856$

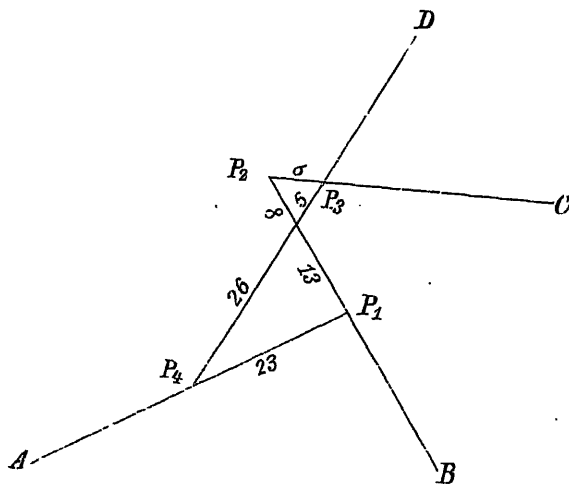
Damit kann man alle nach P gehenden Strahlen doppelt berechnen:

	AP	BP	CP	BP
	12. 3899,20	3. 3882,59	6. 4891,60	9. 3296,85
	1. 3899,43	4. 3882,80	7. 4891,54	10. 3297,15
Differenzen	0,23	0,21	0,06	0,31
	$= P_1 P_4$	$= P_1 P_2$	$= P_2 P_3$	$= P_4 P_3$

Mit diesen Seiten ist das Fehlerviereck Fig. 3. gezeichnet, wobei die oben unter (13) mitgeteilten Winkel 2. 5. 8. 11. nach Anleitung der Fig. 1. § 85. mit zu benützen sind; und zwar hat man dabei mehrere Proben, weil nun von dem Viereck $P_1 P_2 P_3 P_4$ in Fig. 3. alle vier Seiten und alle Winkel gegeben sind.

Fig. 3.

Massstab 1 : 10.

$P_1 P_2 = 13^{cm} + 8^{cm} = 21^{cm}$, $P_2 P_3 = 6^{cm}$ u. s. w.

§ 85. Fehlerzeigende Figur durch *Coordinaten*-Differenzen für Vorwärts-Einschneiden.

In Fig. 1. seien A, B, C, D vier fest gegebene Punkte, mit folgenden Coordinaten:

$$\begin{array}{lrr} & y & x \\ A & -44904{,}30 & +15967{,}50 \\ B & -39554{,}90 & +14032{,}80 \\ C & -36479{,}40 & +16760{,}50 \\ D & -39392{,}10 & +20170{,}80 \end{array} \qquad (1)$$

Von allen diesen vier Punkten aus ist der Punkt P vorwärts eingeschnitten worden, und wir denken uns in jedem dieser Punkte einen orientierten Abriss gebildet, indem z. B. in A die beiden Richtungen $[A\,D]$ und $[A\,B]$ fest gegeben sind, nämlich gleich den aus den Coordinaten (1) berechneten Azimuten, und $(A\,P)$ das durch den Anschluss an D und B aus den Messungen erhaltene vorläufige Azimut von A nach P.

Fig. 1.*)
Massstab 1 : 100 000 (1cm = 1km)

Standpunkt A (2)

$[A\,D] = 52°\,40'\,22{,}3''$ $\quad log\,A\,D = 3.840\,856$
$(A\,P) = 66\;\;58\;\;3{,}2$
$[A\,B] = 109\;\;53\;\;0{,}2$ $\quad log\,A\,B = 3.754\,998$

Standpunkt B (3)

$[B\,A] = 289°\,53'\;\;0{,}2''$ $\quad log\,B\,A = 3.754\,998$
$(B\,P) = 333\;\;1\;\;50{,}5$
$[B\,C] = 408\;\;25\;\;47{,}2$ $\quad log\,B\,C = 3.613\,931$

Standpunkt D (4)

$[D\,C] = 139°\,29'\,59{,}0''$ $\quad log\,D\,C = 3.651\,749$
$(D\,P) = 215\;\;41\;\;43{,}9$
$[D\,A] = 232\;\;40\;\;22{,}3$ $\quad log\,D\,A = 3.840\,856$

Standpunkt C (5)

$[C\,B] = 228°\,25'\,47{,}2''$ $\quad log\,C\,B = 3.613\,931$
$(C\,P) = 278\;\;36\;\;58{,}8$
$[C\,D] = 319\;\;29\;\;59{,}0$ $\quad log\,C\,D = 3.651\,749$

*) In Fig. 1. sind die drei Punkte A, B, C und der Strahl $B\,P$ mit der früheren Fig. 1. § 84. S. 268 identisch; dagegen $A\,P$ und $B\,P$ sind anders angenommen.

Dieses ist dasselbe Beispiel, das wir schon im zweiten Teile des vorigen § 84. zur Konstruktion einer fehlerzeigenden Figur (Fig. 3. S. 271) mittelst *Seiten*-Differenzen behandelt haben; wir gehen nun aber zu einer zweiten Methode mittelst *Coordinaten*-Differenzen über (welche von *F. G. Gauss* angegeben wurde).

In Fig. 2. sei A ein Standpunkt mit den gegebenen Coordinaten x_a y_a; und es soll von diesem Punkte A ein Strahl AP mit dem Azimut φ ausgehen. Man weiss, dass dieser Strahl AP zu einem Schnitte kommt, etwa in der Gegend der Coordinaten x_0 und y_0; wir betrachten daher die Punkte R und S, welche die folgenden Coordinaten haben:

Fig. 2.
Axen-Schnitte R und S.

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Punkt } R & y \text{ und } x_0 \\ \text{Punkt } S & y_0 \text{ und } x \end{array}\right\} \quad (6)$$

Die Werte y und x berechnet man aus den Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} y = (x_0 - x_a)\, tang\, \varphi + y_a \\ x = (y_0 - y_a)\, cotang\, \varphi + x_a \end{array}\right\} \quad (7)$$

Für den Strahl AP, dessen Anfangs-Coordinaten und Azimut bereits unter 1) und 2) mitgeteilt sind, hat man hiernach folgendes, wobei y_0 und x_0 nach einer irgendwie erlangten Näherungs-Bestimmung der Coordinaten des Punktes P angenommen sind:

Näherung P	$y_0 = -41316{,}00$	$x_0 = +17493{,}00$
Punkt A	$y_a = -44904{,}30$	$x_a = +15967{,}50$
	$y_0 - y_a = +\ 3588{,}30$	$x_0 - x_a = +\ 1525{,}50$

$(AP) =$	$log\ (y_0 - y_a)$	3.554 889	$log\ (x_0 - x_a)$	3.183 412
$\varphi_a = 66°\,58'\,3{,}2''$	$log\ cotg\ \varphi_a$	9.628 535	$log\ tang\ \varphi_a$	0.371 465
	$log\ (y_0 - y_a)\ cotg\ \varphi_a$	3.183 424	$log\ (x_0 - x_a)\ tang\ \varphi_a$	3.554 877

	$(y_0 - y_a)\ cotg\ \varphi_a = +\ 1525{,}54$	$(x_0 - x_a)\ tang\ \varphi_a = +\ 3588{,}20$
	$x_a = +15967{,}50$	$y_a = -44904{,}30$
Strahl AP	$x = +17493{,}04$	$y = -41316{,}10$ (8)

In gleicher Weise wird die Rechnung auch für die drei anderen Strahlen geführt, wodurch man erhält:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Strahl } BP & x = +17493{,}74 & y = -41315{,}62 \\ \text{Strahl } CP & x = +17493{,}38 & y = -41313{,}51 \\ \text{Strahl } DP & x = +17492{,}97 & y = -41315{,}98 \end{array}\right\} \quad (9)$$

Diese Strahlen-Schnitte sind in Fig. 3. S. 274 aufgetragen.

Der Strahl AA' ist bestimmt durch die Axen-Schnitte R und S, entsprechend der vorstehenden Berechnung (8), ebenso verhält es sich mit den drei anderen Strahlen, welche von B , C und D ausgehen.

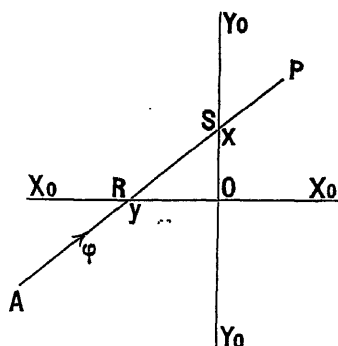
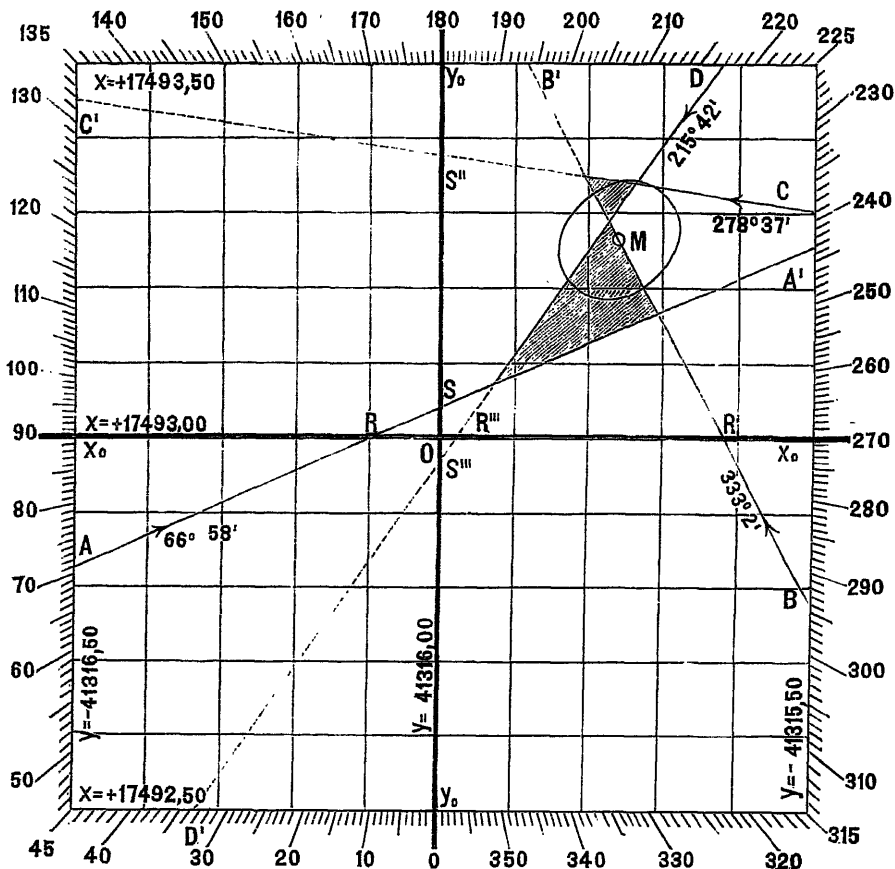
Wenn für einen Strahl die beiden Axen-Schnitte R und S sehr nahe zusammenfallen, was z. B. bei dem Strahl AP stattfindet, so wird die Richtung unsicher, man

kann dann das bekannte Azimut (66° 58′) mitbenützen, und dazu ist die Azimut-Teilung am Rande von Fig. 3. angegeben, welche auch sonst benützt werden kann.

Fig. 3.*)
Fehlerzeigende Figur im Massstab 1 : 10 zu dem vierfachen Schnitt P von Fig. 1. S. 272.

Die schraffierte Fläche ist mit dem auf anderem Wege erhaltenen Viereck Fig. 3. § 84. identisch. Die schraffierte Fläche ist aber nicht die ganze Ausdehnung der fehlerzeigenden Figur, denn dazu gehört auch noch der Schnitt zwischen AA' und CC', welcher rechts über das Quadrat von Fig. 3. hinausfällt.

Indessen kann man auch noch Schnitte mit anderen Coordinaten-Axen als den erstmals angenommenen berechnen. Wir haben in unserem Falle nach den Formeln (7) noch folgende *Rand*-Schnitte berechnet:

---

*) Gedruckte Linien-Netze zum Aufzeichnen solcher Fehler-Figuren können als Beilage zum trigonometr. Formular 12. der Anweisung IX. vom 25. Okt. 1881 von der Reichsdruckerei bezogen werden (vgl. S. 194, oben).

Strahl AP. westlich A: $x = +17492{,}83$, östlich A': $x = +17493{,}25$
Strahl BP. östlich B: $x = +17492{,}76$, nördlich B': $y = -41315{,}88$
Strahl CP. östlich C: $x = +17493{,}30$, westlich C': $x = +17493{,}45$
Strahl DP. nördlich D: $y = -41315{,}62$, südlich D': $y = -41316{,}33$.

Hat man auf diese Weise die fehlerzeigende Figur konstruiert, so wählt man einen endgültigen Punkt M nach Gutdünken aus. Wir nehmen:

$$M \qquad y = -41315{,}75^m \qquad x = +17493{,}25^m \tag{10}$$

Wir haben diese Wahl (zufällig auf dem Strahl BB') als *„nach Gutdünken"* getroffen bezeichnet. In Wirklichkeit haben wir den Punkt nach der M. d. kl. Q. (§ 81.) berechnet und gefunden:

$$\left.\begin{array}{lll} M & y = -41315{,}752^m & x = +17493{,}253^m \\ & \quad \pm 0{,}067 & \quad \pm 0{,}062 \end{array}\right\} \tag{11}$$

Der mittlere Fehler einer Richtung ergab sich

$$m = \pm 4{,}5'' \tag{12}$$

und die ausgeglichenen vier Richtungen, d. h. Azimute wurden:

$$\left.\begin{array}{l} [AP] = 66^\circ\ 57'\ 58{,}1'' \ , \ [BP] = 333^\circ\ 1'\ 50{,}6'' \ , \ [CP] = 278^\circ\ 36'\ 55{,}2'' \\ \qquad [DP] = 215^\circ\ 41'\ 41{,}8'' \end{array}\right\} \tag{11}$$

Bei dieser Gelegenheit wurde auch die in Fig. 3. eingezeichnete Fehler-Ellipse berechnet, und zwar die wahrscheinliche Ellipse, nach Band I. S. 347, mit $s = 0{,}83254$, $W = 0{,}50000$, $\sqrt{A^2 + B^2} = 1{,}1774\ M$.

Es ist gleich wahrscheinlich, dass der wahre Schnittpunkt innerhalb oder ausserhalb dieser Ellipse liegt. (Weiteres hiezu s. § 87.)

§ 86. Fehlerzeigende Figur für Vorwärts-Einschneiden *und* Rückwärts-Einschneiden.

Es ist möglich, auch pothenotische Winkel-Messungen durch äquivalente Gerade zu ersetzen, wie wir in Band I. § 103. S. 304—306 gezeigt haben; und man könnte daher daran denken, für jeden zum Rückwärts-Einschneiden gemessenen Winkel eine Gerade zu zeichnen, also auch für reines Rückwärts-Einschneiden und für die Verbindung von Vorwärts- und Rückwärts-Einschneiden, je eine fehlerzeigende Figur zu konstruieren, ebenso wie für reines Vorwärts-Einschneiden; allein erstens müsste dieses Verfahren noch eine Änderung erleiden, wenn pothenotische *Richtungs*-Messungen vorliegen, und zweitens werden die Figuren für Rückwärts-Schnitte mühsam herzustellen, und ermangeln der *Anschaulichkeit*, welche beim Vorwärts-Einschneiden das Verfahren beliebt gemacht hat.

Aus diesen Gründen sehen wir von dem Konstruieren besonderer Strahlen für Rückwärts-Schnitte ab, und gehen statt dessen darauf aus, die Vorwärts- und Rückwärts-Schnitte zuerst unter sich auszugleichen, und nach dieser Ausgleichung eine Fehler-Figur nach den früheren Regeln § 84. oder § 85. zu konstruieren.

Wir wollen das frühere Beispiel § 85. Fig. 1. S. 272 so ergänzen, dass ausser den vier Richtungs-Messungen auf den Punkten A, B, C, D nun auch ein voller Richtungs-Satz auf dem neuen Punkte P selbst gemessen sei, wie in der folgenden Tabelle unter der Bezeichnung „Rückwärts" angegeben ist.

Richtung	Vorwärts φ'	Rückwärts α	$\varphi' - \alpha$	$\varphi'' = \alpha + 3{,}75'' \pm 180°$	Mittel $\varphi = \frac{\varphi' + \varphi''}{2}$	
(AP)	66° 58′ 3,2″	246° 58′ 3,2″	0,0″	66° 58′ 6,95″	66° 58′ 5,1″	
(BP)	333 1 50,5	153 1 22,9	+ 27,6	333 1 26,65	333 1 38,6	
(CP)	278 36 58,8	98 36 44,5	+ 14,3	278 36 48,25	278 36 53,5	
(DP)	215 41 43,9	35 41 70,8	− 26,9	215 41 74,55	215 41 59,2	
Summe	156,4	141,4	+ 15,0	156,40	156,4	
Mittel	39,1″	35,35″	+ 3,75″	39,10	39,1″	(1)

Diese Tabelle, in welcher unten auch noch Kontroll-Summen und Mittel angegeben sind, erklärt sich wohl nahezu von selbst, wenn man sie mit der entsprechenden tabellarischen Berechnung von § 69. (1) und (5) S. 214—216 vergleicht.

Die Rückwärts-Richtungen α müssen zunächst beliebig orientiert eingesetzt werden; in unserem Falle haben wir das erste $\alpha = 246°\ 58'\ 3{,}2''$ auf das erste $\varphi' = 66°\ 58'\ 3{,}2''$ gerichtet. Nun wird der Satz Rückwärts-Richtungen α in sich selbst so verschoben, dass sein Mittel, welches zunächst $= 35{,}35''$ ist, gleich dem Mittel der φ', d. h. $= 39{,}1''$ wird; die Verschiebung beträgt also $39{,}1 - 35{,}35 = +3{,}75''$, was sich auch als arithmetisches Mittel der $\varphi' - \alpha$ ergiebt. Damit ist auch die weitere Rechnung und die Mittelbildung verständlich gemacht entsprechend der Gleichung:

$$\text{Mittel} \quad \varphi = \frac{\varphi' + \varphi''}{2} \tag{2}$$

Indessen ist über diese Mittelbildung noch ein Wort zu sagen in Bezug auf verschiedene Gewichte der Vorwärts- und Rückwärts-Richtungen.

Nach Band I. § 63. S. 162, Gleichung (14) hat ein neuer Strahl, welcher durch einen Satz von Richtungs-Messungen auf s alte feste Strahlen orientiert wurde, das Gewicht:

$$p = \frac{s}{s+1} \tag{3}$$

Also in unserem Falle, wo wir annehmen, dass die äusseren Strahlen AP, BP u. s. w. je auf $s = 2$ alte feste Strahlen orientiert seien, ist vorstehendes $p = \frac{s}{s+1} = \frac{2}{3}$.

Wenn also die Richtungs-Messungen an sich überall als gleichgewichtig gelten sollen, so ist in der obigen Tabelle am Schluss zu rechnen:

$$\frac{\frac{2}{3}\varphi' + \varphi''}{\frac{2}{3} + 1} = \frac{2\varphi' + 3\varphi''}{5} = \varphi \tag{4}$$

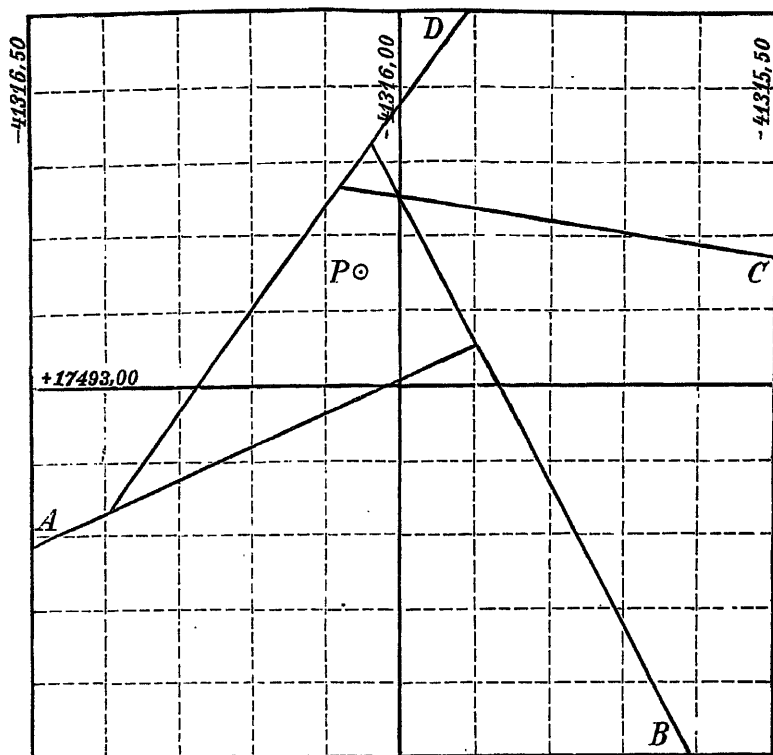
Wir haben zuerst oben eine Tabelle (1) ohne Gewichts-Unterscheidung vorgeführt (entsprechend dem trig. Formular 12. der Anweisung IX. vom 25. Oktober 1881) weil die Nachforschung, auf wie viele alte, feste Strahlen jeder zur Ausgleichung gelangende neue Strahl ursprünglich orientiert war, in solchen Fällen zu umständlich ist, und weil dann die Annahme gleicher Gewichte, d. h. die einfache Mittelbildung nach Gleichung (2), wenn auch theoretisch nicht richtig, so doch in der Anwendung die bequemste ist.

Wenn man aber sich überhaupt auf Gewichts-Unterscheidung einlassen will, so scheint es uns am besten, in der Bevorzugung der Rückwärts-Strahlen noch weiter zu gehen als die Gleichung (3) verlangt, d. h. wir halten die folgende Mittelbildung für gut:

$$\frac{\varphi' + 2\,\varphi''}{3} = \varphi \qquad (5)$$

Die Gründe hiefür sind dieselben wie die schon in Band I. § 66. S. 179 angegebenen. Insbesondere entspricht die Gleichung (5) dem einfachen Fall eines einzigen Dreiecks. Bei *einem* solchen Dreieck sind die Vorwärts-Strahlen AP und BP selbst nur an *einen* festen Strahl angelehnt, in Gleichung (3) ist also $s = 1$ und $p = \frac{1}{2}$ und mit dieser Änderung giebt das obige tabellarische Verfahren (1) dieselbe Fehler-Verteilung, wie die jedenfalls anstandslos angenommene gleiche Verteilung des Winkel-Summen-Widerspruchs gegen 180°.*)

Fig. 1.

Fehlerzeigende Figur für Vorwärts- und Rückwärts-Einschneiden.

*) Der Fall von S. 384 der vorigen Auflage (1877) dieses Buches war ein anderer, ebenfalls in sich richtig, insofern dort *Winkel*-Messungen zu Grunde lagen, während wir jetzt *Richtungs*-Messungen annehmen. Wirkliche Messungen liegen nicht vor, das Beispiel ist ein fingiertes.

Ohne die Frage der Gewichts-Unterscheidung für Vorwärts- und Rückwärts-Strahlen weiter zu verfolgen, können wir nun einsehen, dass *nach* der besprochenen Ausgleichung, mag sie mit irgend welchen Gewichts-Annahmen gemacht sein, die Konstruktion der fehlerzeigenden Figur gerade so gemacht wird, wie für reine Vorwärts-Schnitte bereits in § 84. und § 85. gelehrt wurde. Wir geben daher für die oben unter (1) berechneten Mittel φ sofort die Resultate, bezogen auf $y_0 = -41316{,}00$ und $x_0 = +17493{,}00$:

		φ			x	y
Strahl	AP	66°	58′	5,1″	+ 17493,00	— 41316,01
„	BP	333	1	38,6	+ 17493,25	— 41315,87
„	CP	278	36	53,5	+ 17493,25	— 41314,36
„	DP	215	41	59,2	+ 17493,39	— 41316,28

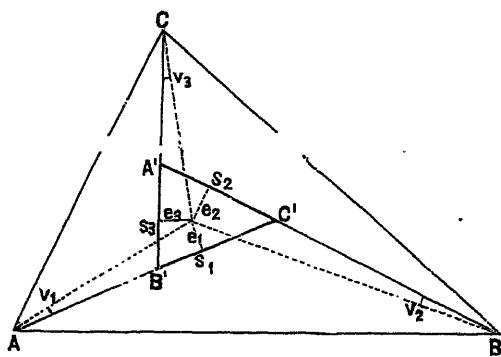
Die zugehörigen Strahlenschnitte zeigt die vorstehende Fig. 1. S. 277, welche gleichen Massstab und gleiche Orientierung hat wie die frühere Fig. 3. § 85.

Dass jetzt nach dem Zutritt der Messungen auf P selbst, die Fehler-Figur grösser statt kleiner geworden ist, ist Zufall, und ausserdem, da das ganze Beispiel ein fingiertes ist, gleichgültig.

§ 87. Schärfere Punktauswahl in der fehlerzeigenden Figur.

Obgleich in praktischer Beziehung die Auswahl eines Punktes in einer fehlerzeigenden Figur *nach Gutdünken* die Hauptrolle spielt, ist doch das, was man über die Konstruktion des richtigen, der Methode der kleinsten Quadrate entsprechenden Punktes bis heute weiss, hier mitzuteilen.

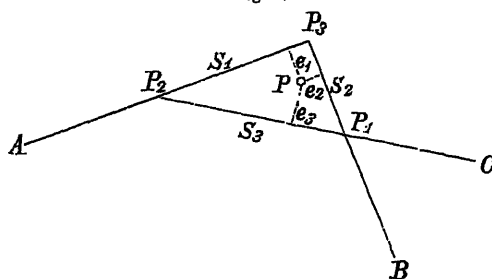
Wenn nur *drei* Strahlen für Vorwärts-Einschneiden vorliegen, so hat die Konstruktion des richtigen Minimums-Punktes keine Schwierigkeit, wie wir schon in Band I. S. 333 gezeigt haben, mit Hilfe einer Figur, welche (nach Verbesserung eines Fehlers in der Mitte) hier in Fig. 1. nochmals hergesetzt wird.

Fig. 1.

Sind s_1, s_2, s_3 die drei Seiten des fehlerzeigenden Dreiecks, und e_1, e_2, e_3 die Abstände des Minimums-Punktes M von diesen Seiten und A, B, C die Strahlenlängen, so bestehen, bei gleich genauen Richtungen, die Verhältnisse:

$$\left.\begin{array}{c} e_1 : e_2 : e_3 \\ = A^2 s_1 : B^2 s_2 : C^2 s_3 \end{array}\right\} \quad (1)$$

wornach sich der Punkt M im Innern des fehlerzeigenden Dreiecks konstruieren lässt,*) indem man zu den Seiten s_1, s_2, s_3 Parallelen zieht in Abständen proportional den Grössen $A^2 s_1$, $B^2 s_2$, $C^2 s_3$.

*) Die Verhältnisse (1) sind als besonderer Fall einer allgemeineren Theorie von *Helmert* zuerst mitgeteilt in der Abhandlung „Studien über rationelle Vermessungen

Fig. 2.

Bei (1) ist angenommen, die drei Strahlen, welche das fehlerzeigende Dreieck bilden, haben *gleiche* Richtungs-Genauigkeit. Ist dieses nicht der Fall und haben die drei Strahlen die Gewichte p_1, p_2, p_3, so geht (1) über in:

$$e_1 : e_2 : e_3 = \frac{A^2}{p_1} s_1 : \frac{B^2}{p_2} s_2 : \frac{C^2}{p_3} s_3$$

Zu einem Zahlenbeispiel wollen wir das frühere Dreieck Fig. 2. § 84. benützen, das wir in nebenstehender Fig. 2. nochmals hersetzen. Der Mittelstrahl $B P_1 P_3$ soll zweifaches Gewicht im Vergleich mit den anderen Strahlen haben, was in verschiedenen Ursachen seinen Grund haben kann.*) Darnach haben wir:

	$s_1 = 1{,}05^m$	$s_2 = 0{,}68^m$	$s_3 = 1{,}28$
Strahlenlängen	$A = 3{,}90^{km}$	$B = 3{,}88^{km}$	$C = 4{,}89^{km}$
Gewichte	$p_1 = 1$	$p_2 = 2$	$p_3 = 1$
	$\frac{A^2}{p_1} s_1 = 16$	$\frac{B^2}{p_2} s_2 = 5$	$\frac{C^2}{p_3} s_3 = 31.$

Damit ist die obige Fig. 2. konstruiert worden.

Ein graphisches Verfahren, um in einer fehlerzeigenden Figur einen Punkt so zu bestimmen, dass die Quadrat-Summe seiner Abstände von mehreren Geraden ein Minimum wird, wurde im Jahr 1876 mitgeteilt in den *„Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'académie des sciences"*, 82. Band, Januar — Juli 1876, S. 682 — 685. Der Verfasser *Bertot* hat zunächst die Bestimmung eines Schiffs-Orts aus mehreren gemessenen Sonnen- oder Stern-Höhen**) im Sinn, eine Aufgabe, welche mit unserer vorliegenden trigonometrischen Aufgabe sehr nahe verwandt ist. Betrachtet man statt

---

1868", § 18. (vgl. Band I. Anmerkung S. 343). Den Fall dreier Strahlen mit der Beweisform Band I. S. 333, und die entsprechende Konstruktion des Punktes *M*, haben wir früher in dem „Monatsblatt des badischen Geometer-Vereins 1871", S. 16 mitgeteilt.

*) Wenn der Mittelstrahl nur deswegen anderes Gewicht haben soll, weil in Fig. 1. § 84. bei *B* zweifache Richtungsanlehnung für den Strahl *BP* stattfindet, so sind nach Band I. S. 162, Gleichung (14), die drei Strahlengewichte bzw. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ also das Gewicht des Mittelstrahls nur $\frac{4}{3}$ mal so gross als die Gewichte der beiden anderen Strahlen. Unsere Annahme $p_b = 2$ muss daher durch verstärktes Messen erklärt werden. Diese (willkürlich zulässige) Annahme stammt in Wirklichkeit daher, dass wir dasselbe Beispiel in der vorigen Auflage dieses Buches S. 375, mit *Winkel*-Messungen behandelten, welche jenes Gewicht ergaben, während wir jetzt *Richtungs*-Messungen annehmen. Das Beispiel ist in beiden Fällen ein fingiertes.

**) Sonnen- oder Stern-Höhen führen in der Ausgleichung für Breite und Ortszeit auf lineare Fehler-Gleichungen, von ähnlicher Art wie bei trigonometrischen Messungen, und jeder linearen Fehler-Gleichung entspricht eine bestimmende Gerade der fehlerzeigenden Figur. (Vgl. *Jordan*, „Grundzüge der astronomischen Zeit- und Orts-Bestimmung, Berlin 1885", § 21.)

der einfachen Qnadrat-Summe der lotrechten Abstände h die Summe $\left[\frac{hh}{LL}\right]$, wo L Strahlen-Längen sind, so geht jene astronomische Aufgabe in unsere trigonometrische Einschneide-Aufgabe über.

In Deutschland wurde dieses Verfahren bekannt hauptsächlich durch einen Bericht von *Helmert* in der „Zeitschr. f. Vermessungswesen 1877", S. 53—58.

Auch in die „Anweisung IX. vom 25. Oktober 1881", S. 224 wurde dieses Verfahren aufgenommen.

Wir erlauben uns, den erwähnten *Helmert*schen Bericht über *Bertots* Verfahren hier abzudrucken:

I. *Sind m Punkte P, P', P'', P''' u. s. w. gegeben, so ist derjenige Punkt G, für welchen $\Sigma(GP^2)$ ein Minimum ist, der Schwerpunkt.*

Dieser aus der Mechanik (Theorie der Trägheits-Momente) bekannte Satz ist wie folgt zu beweisen: Ist A irgend ein anderer Punkt, so wird für jedes P:

$$AP^2 = AG^2 + GP^2 - 2\,AG\,.\,GP\,.\,\cos AGP.$$

Addiert man nun für alle m Punkte, so folgt:

$$\Sigma AP^2 = m\,.\,AG^2 + \Sigma GP^2 - 2\,AG\,.\,\Sigma\,(GP\,.\,\cos AGP).$$

Damit nun ΣGP^2 ein Minimum ist, d. h. $\Sigma AP^2 > \Sigma GP^2$, muss das negative Glied rechter Hand immer kleiner als $m\,.\,AG^2$ bleiben, was unbedingt der Fall ist für $\Sigma(GP\,.\,\cos AGP) =$ Null, d. h. für G als Schwerpunkt. Denn $GP\,.\,\cos AGP$ ist nichts anderes, als das statische Moment von P in Bezug auf eine Axe durch G, die normal zu AG steht.

II. *Sind m Gerade MN, $M'N'$ u. s. w. gegeben, so ist derjenige Punkt G, für welchen die Quadratsumme der normalen Abstände, $\Sigma(GP^2)$, ein Minimum ist, zugleich der Schwerpunkt des Systems der Fusspunkte P der Normalen.*

Auch dieser Satz folgt unmittelbar aus der Theorie der Trägheits-Momente; er kann direkt wie folgt bewiesen werden: Ist nicht G der Schwerpunkt, sondern irgend ein anderer Punkt A und legt man von demselben aus Normalen AQ zu den gegebenen Geraden, so giebt eine leicht zu konstruirende Figur:

$$GP^2 = AG^2 + AP^2 - 2\,AG\,.\,AP \cos GAP.$$

Addiert man nun für alle m Geraden und berücksichtigt, dass A der Schwerpunkt sein soll, so folgt:

$$\Sigma\,(GP^2) = m\,.\,AG^2 + \Sigma\,(AP^2).$$

Setzt man noch mittelst des rechtwinkligen Dreiecks APQ, für AP^2 den Wert $AQ^2 + QP^2$, so folgt:

$$\Sigma\,(GP^2 = m\,.\,AG^2 + \Sigma\,(AQ^2) + \Sigma\,(QP^2) \quad \text{oder} \quad \Sigma\,(GP^2) > \Sigma\,(AQ^2)$$

was der Voraussetzung widerspricht. Es muss daher G mit dem Schwerpunkt zusammenfallen.

III. (Fig. 3. S. 281.) Sind mehrere Gerade AB gegeben und M derjenige Punkt, für welchen die Quadratsumme der Normalen MR ein Minimum wird (also M der Schwerpunkt der Punkte R), so ist für einen *andern* Punkt O der Schwerpunkt der Normalenfusspunkte P nicht in O selbst, sondern in einem davon verschiedenen Punkt G. *Dieser Punkt G ist nun zugleich der Schwerpunkt derjenigen Punkte Q, in welchen ein Kreis über OM, als Durchmesser, die Normalen OP schneidet.*

Fig. 3.
M = Schwerpunkt der Punkte R,
G = Schwerpunkt der Punkte Q.

Da nämlich M Schwerpunkt der Punkte R ist (Satz II.), so ist die Summe der Projektionen der Linien MR auf irgend eine Axe gleich Null. Berücksichtigt man nun die Gleichheit der Länge und Richtung von MR und QP, so folgt, dass die Summe der Projektionen der Linien OP und OQ gleich sind, oder dass die Summe der statischen Momente der Punkte P gleich ist der Summe der statischen Momente der Punkte Q in Bezug auf eine beliebige Axe durch O. Mithin haben die Punkte P und Q denselben Schwerpunkt G.

IV. (Fig. 4.) In jedem gegebenen Falle ist nun M durch Konstruktion der Schwerpunkte für zwei Punkt-Systeme leicht zu finden. Zunächst kennt man von der Figur nur die Geraden AB und den beliebigen Punkt O und hat nun in erster Linie den Schwerpunkt G der Punkte P zu konstruieren. Anstatt des Kreises über OM konstruiert man (da man M noch nicht hat) zunächst einen andern Kreis, der die Normalen OP in Punkten Q' schneidet, und sucht nun den Schwerpunkt g dieser Punkte Q'. Beachtet man aber erstens, dass die Peripherie-Winkel über den Bögen $Q'Q'$ gleich sind denjenigen über den entsprechenden Bögen QQ, weil sie den gemeinsamen Scheitel O haben, und zweitens, dass gleichen Peripherie-Winkeln gleiche Centriwinkel entsprechen, so ist klar, dass die Polygone $Q'Q'Q'\ldots$ und $QQQ\ldots$ einander ähnlich sind, dass ferner die Schwerpunkte G und g in beiden Polygonen eine ähnliche Lage besitzen müssen. Nur der Punkt O selbst nimmt an der Ähnlichkeit keinen Anteil. Dagegen kann man einen zu T (Fig. 3.) ähnlich liegenden Punkt γ angeben (Fig. 4.); es ist das derjenige Punkt, in welchem die Linie OG die Peripherie des Hilfskreises schneidet, denn offenbar gehören zu den Bögen $\gamma Q'$ und TQ gleiche Centriwinkel.

Fig. 4.
G = Schwerpunkt der Punkte P,
g = Schwerpunkt der Punkte Q'.

Verlängert man jetzt γg bis an den Hilfskreis, so ergiebt sich der O entsprechende Punkt o und der nun zu ziehende Durchmesser om des Hilfskreises entspricht dem Durchmesser OM, dergestalt, dass auch $\triangle ogm \sim \triangle OGM$. Ferner ist die Richtung OM identisch mit Om, denn es ist Winkel $\gamma om = \gamma Om$. Um endlich M noch auf Om ausfindig zu machen, hat man OM so zu konstruieren, dass

$$OM : om = OG : og.$$

Nach dieser Theorie wird von *Helmert* das in Fig. 5. S. 282 gezeichnete Beispiel gegeben.

ABC ist ein fehlerzeigendes Dreieck, entstanden aus den Schnitten von drei Geraden, nämlich:

1. Gerade CB mit dem Gewicht $= 1$ oder Länge $= L$
2. Gerade CA „ „ „ $= 1$ „ „ $= L$
3. Gerade BA „ „ „ $= 2$ „ „ $= \frac{L}{\sqrt{2}}$.

Fig. 5.
Fehlerzeigendes Dreieck ABC.
$G =$ Schwerpunkt der Punkte P_1, P_2, $2P_3$,
$g =$ „ „ „ Q_1', Q_2', $2Q_3'$.

Man nimmt einen Punkt O willkürlich an (möglichst in der Nähe des muthmasslichen Minimumspunktes). Dann wird ein Kreis gezogen, welcher durch den angenommenen Punkt O geht. Dieser Kreis ist theoretisch auch willkürlich; man suche aber zu vermeiden, dass die Senkrechten, welche man von O auf die gegebenen Geraden AB, AC, BC u. s. w. fällt, den Kreis unter ungünstig stumpfen Winkeln schneiden. Das nächste ist nämlich, diese Senkrechten OP_1, OP_2, OP_3 zu fällen, und ihre Durchschnitte Q_1', Q_2', Q_3' mit dem Kreise zu markieren.

Nun bestimmt man zwei Schwerpunkte, nämlich:

den Schwerpunkt G der drei Fusspunkte P_1, P_2, P_3 (mit $p_3 = 2$)
den Schwerpunkt g der drei Schnittpunkte Q_1', Q_2', Q_3 (mit $p_3 = 2$)

Die Bestimmung dieser Schwerpunkte geschieht durch Rechnung, d. h. Abmessen der Entfernungen von zwei Geraden, wobei aber die oben angegebenen Gewichte zu berücksichtigen sind.

Z. B. der Abstand des Punktes g von AB wird so erhalten:

$$\begin{array}{llll} Q_1' \text{ von } AB \text{ entfernt} & = 17^{mm} & \times 1 & = 17 \\ Q_2' \quad " \quad " \quad " & = 24 & \times 1 & = 24 \\ Q_3' \quad " \quad " \quad " & = 67 & \times 2 & = 134 \\ \hline & & 4 & 175 \end{array}$$

$$g \text{ von } AB \text{ entfernt} = \frac{175}{4} = 44^{mm} \text{ u. s. w.}$$

Nun zieht man folgende Gerade:

a) $O G \gamma$, oder $G O \gamma$, d. h. bis zum Kreisschnitte γ
b) $\gamma g o$ bis zu dem Kreisschnitte o
c) $o m$ durch den Kreismittelpunkt bis m,
d) $m O M$, d. h. die Richtung nach M.

Der Punkt M selbst, welcher der gesuchte Punkt des Minimums ist, wird erhalten durch den Abstand:

$$O M = \frac{O G}{o g} 2 r$$

wo r der Halbmesser des Kreises ist.

Wenn man diese *Bertot*sche Konstruktion mit der rechnerischen Ausgleichung § 81. S. 261 vergleicht, so kommt man zu der Überzeugung, dass der Konstruktion praktische Bedeutung nicht wohl zukommt.

Ein anderes, schon oft versuchtes Mittel besteht in der Abmessung der Coordinaten aller Linienschnitte, und Ausgleichung nach *Coordinaten-Gewichten*, worüber in § 88. weiteres gesagt werden wird.

Wer an der Auswahl eines Punktes, lediglich nach Gutdünken, Anstoss nimmt, der kann sich auch dadurch helfen, dass er für mehrere Punkte in der mutmasslichen Gegend des Minimums die Summen $\left[\frac{h h}{L L}\right]$ ausrechnet, wo h die Abstände und L die Strahlenlängen sind. Damit erhält man eine Andeutung, wo etwa das Minimum liegen mag; man sieht aber auch, dass gerade in der Gegend des Minimums eine kleine Änderung der Punktlage auf die Quadratsumme $\left[\frac{h h}{L L}\right]$ wenig Einfluss hat, und dass es also auch gar nicht so wichtig ist, den mathematischen Minimums-Punkt scharf zu bestimmen.

Eine geometrische Deutung der Quadrat-Summe $[v v]$ kann zur Aufklärung der Begriffe beitragen. Nach Band I. S. 35 ist:

$$\begin{aligned} [v v] = [a a] x^2 + 2 [a b] x y &+ 2 [a l] x \\ + [b b] y^2 &+ 2 [b l] y \\ &+ [l l] \end{aligned}$$

Man denkt sich nun unter x, y *veränderliche* Coordinaten, d. h. nicht speziell diejenigen Werte, welche $[v v]$ zu einem Minimum machen; dann kann die vorstehende Gleichung betrachtet werden als Gleichung eines *elliptischen Paraboloids*, bei dem es sich darum handelt, die Berührungsstelle einer Ebene parallel der x, y-Ebene zu finden. Einen hierauf gegründeten Versuch haben wir früher in *Schlömilchs* „Zeitschr. für Math. und Physik 1871", S. 164—167 mitgeteilt.

Eine Schrift „Beiträge zu graphischen Ausgleichungen, von *Carl Genge*, Zürich 1877“, geht auch von diesem elliptischen Paraboloid aus, und gründet auf 8 Ordinatenwerte eine Konstruktion des Minimums-Punktes.

§ 88. Coordinaten-Gewichte.

Fig. 1.

Wenn verschiedene Triangulierungsbestimmungen für einen Punkt vorliegen, so kann man daran denken, für jede Abscissen-Bestimmung und für jede Ordinaten-Bestimmung ein Gewicht festzusetzen, und dann nach dem arithmetischen Mittel auszugleichen.

Z. B. in Fig. 1. sei der Punkt P durch Einschneiden von A und B aus erhalten, und der Punkt P' durch Einschneiden von C und D aus. Die Schnitte P und P' sind also ganz unabhängig.

In der Nähe von P oder P' ist ein Näherungspunkt (P) mit den Näherungs-Coordinaten (Y) und (X) angenommen, und man habe:

$$\text{Coordinaten von } P: \quad (Y)+v \qquad (X)+u \tag{1}$$

$$\text{Coordinaten von } P': \quad (Y)+v' \qquad (X)+u' \tag{2}$$

Indem man die Gewichte von v und u den mittleren Fehler-Quadraten der Coordinaten umgekehrt proportional setzt, hat man nach Band I. § 102. S. 303, Gleichungen (3) und (4), mit Übergang zu den teilweise neuen, in unserer Fig. 1. eingeschriebenen Bezeichnungen:

$$p_y = \frac{\sin^2(\varphi-\psi)}{r^2 \sin\psi + s^2 \sin^2\varphi} \quad , \quad p_x = \frac{\sin^2(\varphi-\psi)}{r^2 \cos^2\psi + s^2 \cos^2\varphi} \tag{3}$$

und entsprechende Formeln gelten für p_y' und p_x'.

Nun ist nach dem arithmetischen Mittel für ungleichgewichtige Bestimmungen zu nehmen:

$$\frac{p_y v + p_y' v'}{p_y + p_y'} = (y) \qquad \frac{p_x u + p_x' u'}{p_x + p_x'} = x \tag{4}$$

Die ausgeglichenen Coordinaten des Punktes P oder P' wären dann:

$$(Y)+(y) \qquad (X)+(x) \tag{5}$$

Ohne jetzt zu untersuchen, ob das eine richtige Ausgleichung ist, ob es vielleicht als Näherung zu gebrauchen ist und dergleichen, wollen wir nun die Ausgleichung der vier Strahlen von A , B , C , D aus, nach der Methode der kleinsten Quadrate betrachten, und zwar zuerst A und B zusammen und C und D zusammen, nachher alle vier zusammen.

Die zwei Strahlen AP und BP für sich allein sollen diese Normal-Gleichungen geben:

$$\left.\begin{array}{l}[a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,l] = 0 \\ [a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,l] = 0\end{array}\right\} \qquad (6)$$

und die zwei anderen Strahlen CP' und DP' sollen geben:

$$\left.\begin{array}{l}[a'\,a']\,x + [a'\,b']\,y + [a'\,l'] = 0 \\ [a'\,b']\,x + [b'\,b']\,y + [b'\,l'] = 0\end{array}\right\} \qquad (7)$$

dann giebt die Gesamt-Ausgleichung aller vier Strahlen diese Normal-Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}([a\,a] + [a'\,a'])\,x + ([a\,b] + [a'\,b'])\,y + ([a\,l] + (a'\,l']) = 0 \\ ([a\,b] + [a'\,b'])\,x + ([b\,b] + [b'\,b'])\,y + ([b\,l] + [b'\,l']) = 0\end{array}\right\} \qquad (8)$$

Die Auflösung dieser Gleichungen (8) giebt die richtigen, der Methode der kleinsten Quadrate entsprechenden Coordinaten-Korrektionen y und x, welche aber mit den nach der Gewichtsmethode (4) erhaltenen (y) und (x) im allgemeinen *nicht* identisch sind.

Es besteht aber eine gewisse Verwandtschaft zwischen beiden Auflösungen, womit wir uns nun beschäftigen.

Zuerst kann man einsehen, dass die anfangs in (1) eingeführten u und v dieselben Werte sind, welche man erhält durch Auflösung des ersten Normal-Gleichungssystems (6), d. h.:

$$\left.\begin{array}{l}[a\,a]\,u + [a\,b]\,v = -[a\,l] \\ [a\,b]\,u + [b\,b]\,v = -[b\,l]\end{array}\right\} \qquad (9)$$

Ebenso verhält es sich mit (2) und (6), d. h.:

$$\left.\begin{array}{l}[a'\,a']\,u' + [a'\,b']\,v' = -[a'\,l'] \\ [a'\,b']\,u' + [b'\,b']\,v' = -[b'\,l']\end{array}\right\} \qquad (10)$$

Damit werden die Gleichungen (8) diese:

$$\left.\begin{array}{l}([a\,a] + [a'\,a'])\,x + ([a\,b] + [a'\,b'])\,y = [a\,a]\,u + [a'\,a']\,u' + [a\,b]\,v + [a'\,b']\,v' \\ ([a\,b] + [a'\,b'])\,x + ([b\,b] + [b'\,b'])\,y = [a\,b]\,u + [a'\,b']\,u' + [b\,b]\,v + [b'\,b']\,v'\end{array}\right\} \qquad (11)$$

Nun sieht man, dass x und y unabhängig von einander werden und dass x unabhängig von v, v', sowie y unabhängig von u, u' wird, wenn der besondere Fall eintritt:

$$[a\,b] = 0 \qquad [a'\,b'] = 0 \qquad (12)$$

Dann zerfallen die Gleichungen (11) in die zwei unabhängigen Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}([a\,a] + [a'a'])\,x = [a\,a]\,u + [a'a']\,u' \\ ([b\,b] + [b'\,b'])\,y = [b\,b]\,v + [b'b']\,v'\end{array}\right\} \qquad (13)$$

Und nun lässt sich mit Hilfe der Gewichts-Coëfficienten $[\alpha\,\alpha]$, $[\alpha\,\beta]$, $[\beta\,\beta]$ in Band I. S. 42 zeigen, dass in *diesem Falle* (12) die Auflösungen (4) und (13) identisch werden. Denn es ist nach der „*Zusammenfassung*" unten auf S. 42 Band I. $[a\,b] = 0$:

$$D = [a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b] = [a\,a]\,[b\,b]$$

$$p_y = \frac{D}{[a\,a]} = [b\,b] \quad \text{und} \quad p_x = \frac{D}{[b\,b]} = [a\,a] \qquad (14)$$

Zur geometrischen Deutung der Gleichungen (12) haben wir:

$$\left.\begin{array}{ll}a_1 = -\dfrac{\sin\varphi}{r} & b_1 = +\dfrac{\cos\varphi}{r} \\ a_2 = -\dfrac{\sin\psi}{s} & b_2 = +\dfrac{\cos\psi}{s}\end{array}\right\} \qquad (15)$$

$$0 = [a\,b] = a_1\,b_1 + a_2\,b_2 = -\frac{1}{2\,r}\sin 2\,\varphi - \frac{1}{2\,s}\sin 2\,\psi$$

also z. B. mit $r = s$: $0 = \sin 2\varphi + \sin 2\psi$

$$2\varphi + 2\psi = 360^\circ \qquad \varphi + \psi = 180^\circ$$

Die beiden Geraden liegen symmetrisch gegen die Coordinaten-Axen.

Man kann die vorstehende Betrachtung auch weiter verallgemeinern, und man wird finden, dass zwei oder mehrere unabhängige Punkt-Bestimmungen dann nach Coordinaten-Gewichten vereinigt werden können, wenn für jede dieser Bestimmungen die Axen der Fehler-Ellipse parallel der X- und Y-Axe sind.

Es giebt noch einen anderen sehr schönen Satz, welcher die Frage der Coordinaten-Gewichte aufhellt.

Hat man mehrere Fehler-Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_1 x + b_1 y + l_1 \\ v_2 &= a_2 x + b_2 y + l_2 \\ v_3 &= a_3 x + b_3 y + l_3 \\ &\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

so sind x und y aus folgenden Gleichungen zu bestimmen:

$$\left.\begin{aligned} [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,l] = 0 \\ [a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,l] = 0 \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Andererseits denke man sich die Gleichungen (16) in allen Combinationen zu zweien aufgelöst; z. B. die *zwei* Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} 0 &= a_1 x + b_1 y + l_1 \\ 0 &= a_2 x + b_2 y + l_2 \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

sollen geben:

$$y = y_{1\cdot 2} \quad , \quad x = x_{1\cdot 2} \tag{19}$$

und dazu rechnet man:

$$\pi_{1\cdot 2} = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \tag{20}$$

Thut man dieses für alle anderen Combinationen, so kann man bilden:

$$\frac{y_{1\cdot 2}\,\pi_{1\cdot 2} + y_{1\cdot 3}\,\pi_{1\cdot 3} + y_{2\cdot 3}\,\pi_{2\cdot 3} + \ldots}{\pi_{1\cdot 2} + \pi_{1\cdot 3} + \pi_{2\cdot 3} + \ldots} = y \tag{21}$$

und entsprechend für x.

Damit bekommt man *dieselben* Werte y und x wie aus den Normal-Gleichungen (17).

Was den Beweis dieses schönen Satzes (21) betrifft, so kann man den besonderen Fall mit nur *zwei* Unbekannten x und y einfach durch Auflösung aller Klammern $[a\,a] = a_1^2 + a_2^2 = a_3^2 + \ldots$ u. s. w. nachweisen, ähnlich wie in Band I. § 16. und § 34.*)

Die Gewichte π nach (20) lassen sich im Falle des Vorwärts-Einschneidens nach Fig. 1. leicht angeben, es ist nämlich nach (15):

$$\pi_{1\cdot 2} = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 = \frac{\sin^2(\varphi - \psi)}{r^2\, s^2} \tag{22}$$

Dieses ist mit den früher angenommenen Coordinaten-Gewichten p_y und p_x in (3) nicht identisch.

Mit dem *Jakobi*schen Satz weiss man also, dass es möglich ist, nach Coordinaten-Gewichten π auszugleichen. Andererseits aber sieht man, dass ein praktischer Vorteil hierin im Allgemeinen nicht liegt.

---

*) Der allgemeinere Satz, in Determinanten, ist von *C. G. J. Jakobi* mitgeteilt in *Crelles* „Journal für reine und angewandte Mathematik, 22. Band, 1841", S. 285—318: „De formatione et proprietatibus Determinantium". Diese Mitteilung verdanke ich Herrn Prof. *v. Mangoldt* (vgl. Band I. S. 87).

§ 89. Schluss-Betrachtungen über Kleintriangulierung.

Unter „Kleintriangulierung“ versteht man eine solche trigonometrische Vermessung, welche nicht selbständig auf einer besonders hiefür gemessenen Grundlinie aufgebaut wird, sondern sich an eine „Haupttriangulierung“ anschliesst, wodurch mindestens *zwei* Punkte gegeben sind. Diese durch die Haupttriangulierung gelieferten Punkte sollen durch rechtwinklige Coordinaten gegeben sein, und wir setzen ferner für den Begriff der *Klein*triangulierung fest, dass hiebei die Erde als Ebene betrachtet werden darf, und dass man es durchaus mit rechtwinkligen *ebenen* Coordinaten zu thun hat.

In Bezug auf die Anlage und die dadurch bedingte Ausgleichung eines Kleintriangulierungsnetzes hat man zwei wesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden, nämlich Punkteinschaltung (Fig. 1.) und Netzeinschaltung (Fig. 2. S. 288). Im ersten Fall wird immer nur *ein* Punkt, durch mehrfache Messungen, festgelegt, und nachher ebenso wie die ursprünglich gegebenen Punkte unabänderlich beibehalten, und weiteren Punktbestimmungen als gegeben zu Grunde gelegt. In Fig. 1. sind die durch starke Linien verbundenen Punkte A , B , C u. s. w. ursprünglich gegeben, und es wird immer nur *ein* Punkt nach dem andern eingeschaltet. Die Numerierung zeigt nahezu die Aufeinanderfolge der Einschaltungen. Der Punkt (1) ist bestimmt durch die Verbindungen mit C D K J E, dann wird der Punkt (4) eingefügt durch die Verbindungen mit J K D C (1), es tritt also (1) bereits als gegebener Punkt von demselben Range wie J K D C . . . auf. Der Punkt (13) stützt sich auf K (1) (4), vielleicht auch D u. s. f. Damit ist das Prinzip genügend erläutert.

Die Einschaltungen und Ausgleichungen der Punkte können hiebei nach der M. d. kl. Q. oder durch fehlerzeigende Figuren oder sonstwie gemacht sein.

Eine wesentlich andere Anordnung zeigt Fig. 2. S. 288 mit *Netz*-Einschaltung. Es sollen wieder die stark verbundenen Punkte A , B , C u. s. w. gegeben sein. Es sind dann Partialnetze angelegt und zwischen die gegebenen Punkte eingefügt; und wenn eine gute Ausgleichung dieser Partialnetze oder Partialketten ausgeführt wird, so kann man dadurch mit geringerem Aufwand von Winkelmessarbeit die gleiche Genauigkeit erzielen, wie bei der Punkteinschaltungs-Methode.

Dieses führt zur allgemeinen Vergleichung der beiden Anordnungen Fig 1. und Fig. 2. S. 288.

Die fortgesetzte Punkteinschaltung Fig. 1. erfreut sich allgemeiner Beliebtheit bei den Trigonometern; Fig. 1. ist ein Badisches Netz von 1862, giebt aber ebensogut auch ein Bild von den neueren Preussischen Kataster-Triangulierungen. Der Trigonometer hat hier viel zu messen, und auch viel zu rechnen, aber er braucht nie einen neuen Schritt zu thun, ehe nicht alles Vorhergehende fest und zuverlässig ist, und die einzelnen Punkteinschaltungen lassen sich ohne viele theoretische Hilfsmittel erledigen. Der Trigonometer gleicht hier dem vorsichtigen Kaufmann, der nur Geschäfte mit kleinem Gewinn, aber guter Sicherheit unternimmt.

Betrachten wir dagegen die Netzeinschaltung von Fig. 2., so ist wohl nicht zu zweifeln, dass man hier mit weniger Messungs-Arbeit auskommen kann, als bei den Punkteinschaltungen, aber zu der Berechnung ist bei den Netzeinschaltungen viel mehr Ausgleichungs-Arbeit und Theorie erforderlich, wenn die Vorzüge des gegenseitigen Stützens und Verstrebens ausgenützt werden sollen.

Einen Übergang von der einfachen Punkteinschaltung zur Netzeinschaltung

Fig. 1.
Kleintriangulierungsnetz mit Punkteinschaltung.

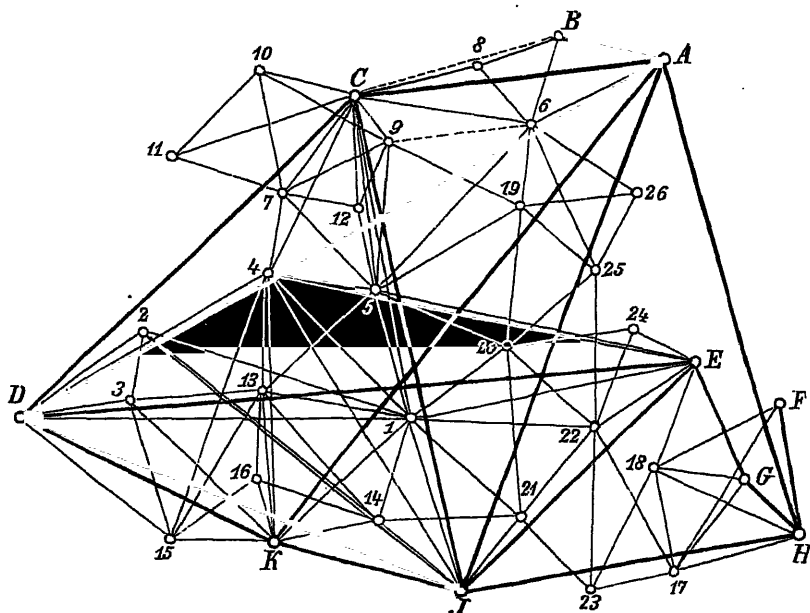
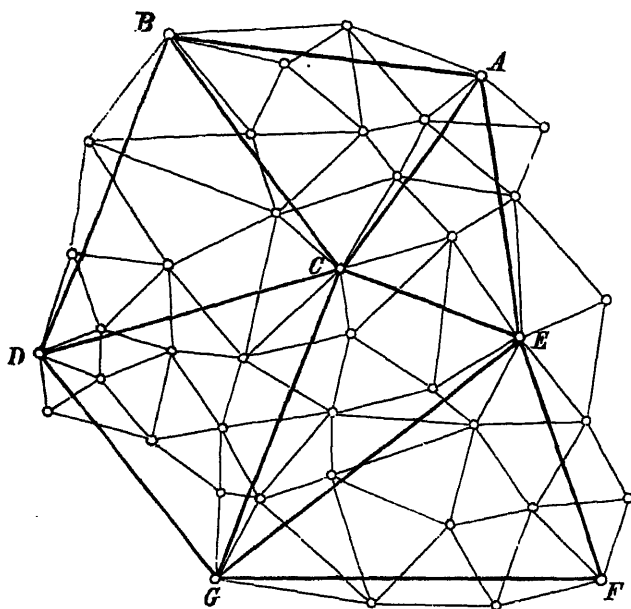



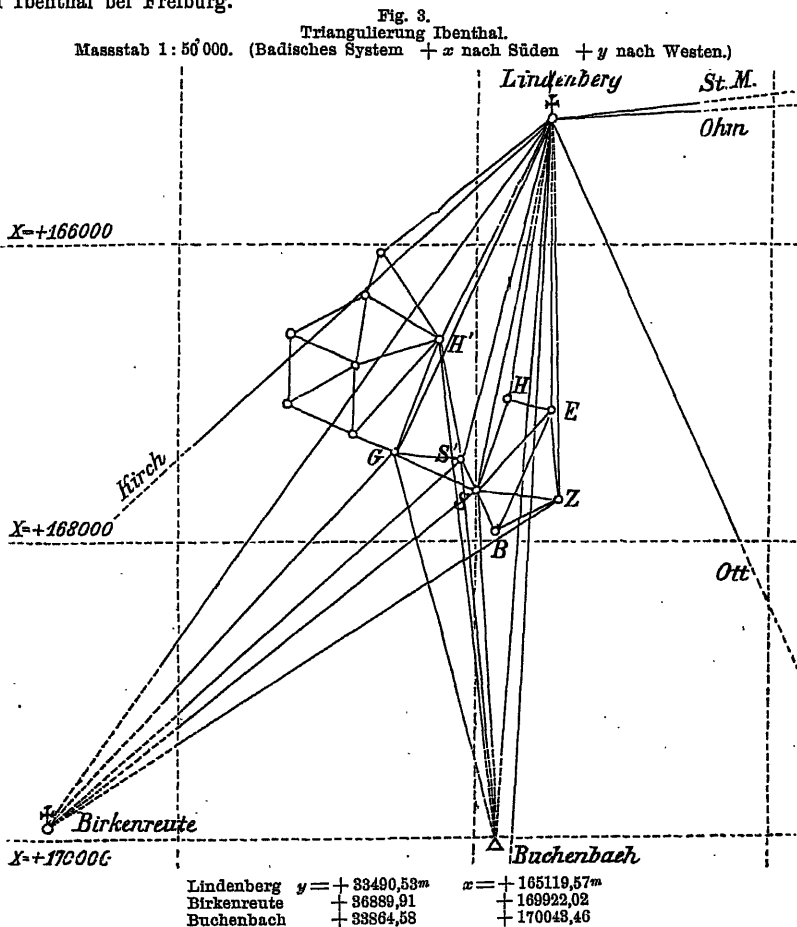
Fig. 2.
Kleintriangulierungsnetz mit Netzeinschaltung.

bildet die Doppel-Punkteinschaltung, von welcher wir in Band I § 65. S. 167 ein Beispiel von der trigonometrischen Abteilung der Landes-Aufnahme mitgeteilt haben.

In der That hat die trigonometrische Abteilung der Landes-Aufnahme auf solchem Wege in den letzten Jahren ganze Netze in die festen Rahmen der Ketten eingeschaltet, z. B. das Weser-Netz, mit welchem man in Fig. 3. S. 203 den inneren leeren Raum zwischen den Umfangsketten ausgefüllt denken mag.

Unser grösseres Triangulierungs-Beispiel § 73. (Hannover, Linden) enthält ein selbständiges Netz III. Ordnung (Fig. 1. S. 228) auf *einer* Basis Ägidius—Wasserturm, mit zahlreichen Punkteinschaltungen. Für ähnliche Fälle kann das als Muster dienen, allein eine so schön in sich abgerundete Triangulierungsarbeit giebt es selten; fast immer hat man zahlreiche Anschlüsse an *ältere* Punkte zu machen, die selbst dadurch kontrolliert werden sollen.

Ein solches Beispiel geben wir in der nachfolgenden Fig. 3. von einer im Jahr 1872 mit Karlsruher Studierenden gemachten Triangulierung zu Eisenbahn-Vorarbeiten im Ibenthal bei Freiburg.

Fig. 3.
Triangulierung Ibenthal.
Massstab 1 : 50000. (Badisches System $+x$ nach Süden $+y$ nach Westen.)

Lindenberg	$y = +33490{,}53^m$	$x = +165119{,}57^m$
Birkenreute	$+36889{,}91$	$+169922{,}02$
Buchenbach	$+33864{,}58$	$+170043{,}46$

Es waren ursprünglich *drei* Punkte gegeben: Buchenbach, Birkenreute und Lindenberg, die beiden letzteren Kirchtürme. Nachdem sich aber aus Anschluss-Messungen ergeben hatte, dass der Turm auf Lindenberg durch Umbau verschoben worden war (was oft vorkommt), nahm die ganze Messung folgenden Verlauf:

Es wurde Lindenberg neu pothenotisch bestimmt aus 8 älteren entfernten Punkten der badischen Triangulierung (Fig. 3. zu ergänzen mit Feldberg südlich und Kandel nördlich) mit Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate, welche zum weiteren aber nicht mehr gebraucht wurde, indem alles weitere nach Gutdünken ausgeglichen wurde.

Die drei Punkte S S' G in der Mitte, wurden jeder für sich pothenotisch gegen Lindenberg, Buchenbach und Birkenreute bestimmt, dann das kleine Verbindungsdreieck S S' G zur Versicherung genommen, $S\,S' = 222{,}66^m$ unmittelbar gemessen.

Das nächste war die pothenotische Bestimmung von Z aus Birkenreute, S und Lindenberg, und zur Versicherung aus dem Dreieck Lindenberg, S, Z.

In ähnlicher Weise wurde fortgefahren; jeder neue Punkt mindestens zweifach unabhängig bestimmt, und aus den erhaltenen Bestimmungen ein Mittel genommen. Die Widersprüche betrugen dabei häufig $0{,}1^m$ und mehr. Doch war das für den gestellten Zweck, tachymetrische Messtischaufnahme in 1 : 5000, hinreichend genau.

Vergleichung verschiedener Arten der Punkteinschaltung.

Nachdem wir in dem Vorstehenden erkannt haben, dass die fortgesetzte Punkteinschaltung nach Fig. 1. und Fig. 3. in der Praxis grosse Wichtigkeit hat, wollen wir die verschiedenen Ausgleichungsarten hiefür betrachten und vergleichen.

1) *Mittelbildung in den Coordinaten.*

Man bestimmt jeden Punkt auf mindestens zwei Wegen, rechnet die Coordinaten für jeden einzelnen Bestimmungsweg gesondert aus, und nimmt dann ein Mittel aus den Coordinaten.

Wenn man glaubt, die verschiedenen Bestimmungen nicht als gleich gut achten zu können, so nimmt man nicht das einfache Mittel, sondern rückt von dem einfachen Mittel näher gegen die gute Bestimmung.

Beispielshalber sei in Fig. 3. S. 289 der Punkt Z doppelt bestimmt:

1) pothenotisch aus Birk. S, Lind.:	$y = +\,33433{,}12$	$x = +\,167729{,}74$
2) aus dem Dreieck Lind. S, Z.:	$y = +\,33433{,}33$	$x = +\;\;16729{,}61$
Einfaches Mittel:	$y = +\,33433{,}22$	$x = +\;\;16729{,}68.$

Wir geben aber aus verschiedenen Gründen der pothenotischen Bestimmung den Vorzug, und setzen deshalb:

Punkt Z: $y = +\,33433{,}20$ $x = +\;\;16729{,}70.$

Man hat häufig versucht, solche Mittelbildungen durch Coordinaten-Gewichte zu verbessern. Wir haben in § 88. gezeigt, dass, wenn man diese Gewichte nicht etwa selbst wieder nach Gutdünken ansetzt, diese Methode sehr umständlich ist.

Die Methode der Coordinaten-Mittelbildung nach Gutdünken von Fall zu Fall, im Zweifel *einfaches* arithmetisches Mittel, ist namentlich Solchen zu empfehlen, welche nur selten trigonometrische Punktbestimmungen machen. Oft begnügt man sich auch mit *einem* Dreieck oder mit *einer* pothenotischen Ausrechnung; dann soll aber wenigstens noch ein Versicherungs-Azimut dazu genommen werden.

2) Graphische Ausgleichung durch fehlerzeigende Figuren. (§ 84.—86.)

Für reines Vorwärts-Einschneiden, z. B. bei unzugänglichen Kirchtürmen, ist dieses Verfahren sehr gut. Auch in dem Falle des Vorwärts- und Rückwärts-Einschneidens mit vorläufiger Winkel-Ausgleichung nach § 86. ist nichts dagegen einzuwenden. Die Auswahl des schliesslichen Punktes in der Fehler-Figur treffe man nach Gutdünken.

Die Methode der fehlerzeigenden Figuren hat vor allen anderen den Vorzug der *Anschaulichkeit.* Ein Blick auf diese Figuren zeigt sofort, was man von der Genauigkeit zu halten hat. In Baden ist die Methode fehlerzeigender Figuren nach § 84. seit 50 Jahren im Gebrauch (jedoch ohne die Modifikation § 86.).

3) Die Methode der kleinsten Quadrate (nach § 81.—83.)

ist für Punkteinschaltungen, objektiv betrachtet, zweifellos die beste.

Der einzige Vorwurf, der dieser Methode gemacht wird, betrifft die Rechen-Arbeit. Dieser Vorwurf ist aber erstens subjektiv, denn wer überhaupt geringe Rechen-Gewandtheit hat, wird auch die Summen-Coëfficienten $[a\,a]$, $[a\,b]$, $[b\,b\,.\,1]$ u. s. w. nicht gerne ausrechnen; zweitens ist der Vorwurf dann ungerecht, wenn die Rechnungen ohne Ziffernverschwendung schematisch (S. 261) und namentlich mit dem *Rechenschieber* gemacht werden. Manche in die Öffentlichkeit gebrachten Vorschläge von Coordinaten-Gewichten und Ähnliches, verlangen *mehr* Rechen-Arbeit, als die reine Methode der kleinsten Quadrate.

Die Punkteinschaltung nach der M d. kl. Q. hat vor den anderen Methoden für den einzelnen Punkt auch den Vorzug, dass sie eindeutige, von persönlicher Entscheidung unabhängige Coordinaten-Werte giebt; für eine Reihe von Punkten trifft dieses aber nicht mehr zu, denn wenn wir z. B. für ein Netz wie Fig. 1. § 73. S. 228 oder Fig. 1. § 89. S. 288 mit zahlreichen, aufeinander folgenden Punkteinschaltungen, die Theodolit-Messungen fertig vorliegend denken, so werden zwei verschiedene Rechner doch durchaus nicht identische Coordinaten erlangen, weil in der *Aufeinanderfolge* der Einschaltungen und in vielen Nebenumständen dem freien Ermessen noch ein weiter Spielraum gelassen ist.

Eine Vergleichung zwischen der M. d. kl. Q. und verschiedenen Näherungs-Methoden haben wir an dem Beispiele Fig. 1.*) § 85. S. 272, in der Art durchgeführt, dass für fünf verschiedene Fälle sowohl die Ausgleichung nach der M. d. kl. Q. als auch nach anderen Methoden gemacht wurde; es ergaben sich dabei je 8 Quotienten von der Form $\frac{\varDelta y}{m_y}$ und $\frac{\varDelta x}{m_x}$, wo $\varDelta y$ und $\varDelta x$ die Abweichungen der anderen Methoden gegen die M. d. kl. Q., und m_y, m_x die mittleren Coordinaten-Fehler für die M. d. kl. Q. sind. Diese 16 Quotienten wurden:

$$\frac{\varDelta y}{m_y} = 0{,}55 \quad 0{,}17 \quad 0{,}12 \quad 0{,}22 \quad 0{,}28 \quad 0{,}67 \quad 0{,}00 \quad 0{,}01$$

$$\frac{\varDelta x}{m_x} = 0{,}65 \quad 0{,}40 \quad 0{,}15 \quad 0{,}18 \quad 0{,}59 \quad 0{,}67 \quad 0{,}31 \quad 0{,}01$$

---

*) „Monatsblatt des badischen Geometer-Vereins 1871“, Nr. 2—5. Es sind dabei verschiedene Combinationen von Winkeln in Fig. 1. S. 272 als gemessen angenommen. Die auszugsweise Mitteilung jener Vergleichs-Rechnungen, welche in der 2. Auflage (1877) dieses Buches in § 121.—123. gegeben war, unterdrücken wir jetzt zur Raum-Ersparung.

Der Durchschnittswert dieser 16 Quotienten ist:

$$\frac{\Delta}{m} = 0{,}31$$

d. h.: Man kann bei trigonometrischen Punkteinschaltungen mit den gewöhnlichen Näherungs-Methoden, der M. d. kl. Q. so nahe kommen, dass die Abweichungen im Durchschnitt nur etwa *ein Drittel* des im günstigsten Falle zu fürchtenden mittleren Fehlers beträgt.

Die Gesamt-Vergleichung der verschiedenen Arten trigonometrischer Punkteinschaltung stellt sich nun so, dass die M. d. kl. Q. mit ihren schönen Nebenresultaten für mittlere Fehler, immer die Königin der Ausgleichungen bleiben wird.

Indessen nur wer berufsmässig (als „Trigonometer") solche Ausgleichungen macht, wird den vollen Genuss der M. d. kl. Q. empfinden. Wer nur selten einen trigonometrischen Punkt zu berechnen hat, wird durch die vorher erwähnte Coordinaten-Mittelbildung oder fehlerzeigende Figur (beides mit Auswahl nach Gutdünken) mehr befriedigt werden.

Kapitel IX.

Polygonale Züge.

§ 90. Grundformeln.

Wenn mehrere Punkte (0), (1), (2), (3) . . . (n) einer Ebene in der Aufeinanderfolge ihrer Numerierung durch Gerade verbunden werden, so entsteht ein offener polygonaler Zug, wie in Fig. 1. angedeutet ist, in welcher vorerst P und Q ausser Betracht bleiben sollen.

Die Gestalt des Zuges an und für sich, ohne Beziehung zu einem Coordinaten-System, ist bestimmt durch Messen der n Seiten und der Brechungs-Winkel.

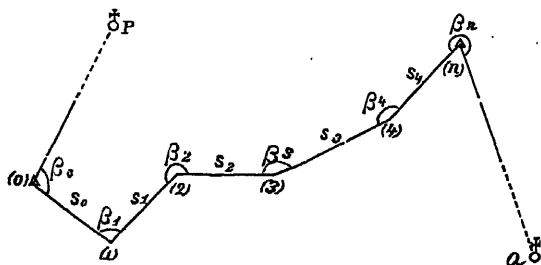
Fig. 1.

Bei $n+1$ Punkten hat man n Seiten und $n-1$ Brechungs-Winkel.

Wir setzen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Seite} & (0)\,(1) = s_0 \\ \text{"} & (1)\,(2) = s_1 \\ \text{"} & (2)\,(3) = s_2 \\ & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \text{"} & (n-1)\,(n) = s_{n-1} \end{array}\right\} \quad (1)$$

Die ($n-1$) Brechungs-Winkel sind:

$$\left.\begin{array}{lllll} \text{im Punkte} & (1): & (0) & (1) & (2) = \beta_1 \\ \text{" "} & (2): & (1) & (2) & (3) = \beta_2 \\ \text{" "} & (3): & (2) & (3) & (4) = \beta_3 \\ & & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \text{" "} & (n-1): & (n-2) & (n-1) & (n) = \beta_{n-1} \end{array}\right\} \quad (2)$$

Über die Brechungs-Winkel β ist eine besondere Bemerkung zu machen:

Zwischen zweien von einem Punkt ausgehenden Strahlen können zwei verschiedene Brechungs-Winkel β gemessen werden, welche sich zu 360° ergänzen; wir setzen daher, um jeder Zweideutigkeit vorzubeugen, fest, dass als Brechungs-Winkel β stets der vom vorhergehenden Punkt zum nachfolgenden Punkt im positiven Sinn (von links nach rechts) gemessene Winkel gilt. Die Wahl der Brechungs-Winkel ist also abhängig von dem Sinn, in welchem man den Zug durchlaufen denkt; kehrt man diesen Sinn um, so geht jeder Brechungs-Winkel β in seine Horizont-Ergänzung $360^\circ - \beta$ über.

Nach diesen einfachen Erklärungen stellen wir uns die Aufgabe, die Coordinaten aller Eckpunkte des Zuges in Bezug auf ein vorgeschriebenes Coordinaten-System zu berechnen.

Hiezu sollen folgende Grössen (ausser den schon unter (1) und (2) erwähnten) gegeben sein:

1) Die Coordinaten y_0 x_0 des ersten Punktes (0).
2) Die Coordinaten x_p y_p eines Punktes P, welcher von (0) aus sichtbar ist.
3) Der Anfangs-Winkel $(P)(0)(1) = \beta_0$, welcher nun zu den oben gegebenen Brechungs-Winkeln β_1, β_2 . . . β_{n-1} hinzukommt.

Es ist nun klar, wie man den Zug in dem Punkte (0) an das Coordinaten System anschliessen kann: Man berechnet aus den Coordinaten von (0) und P das Azimut $((0)P)$:

$$tang\,((0)P) = \frac{y_p - y_0}{x_p - x_0} \tag{3}$$

dann hat man auch:

$$\text{Azimut } ((0)(1)) = \text{Azimut } ((0)P) + \beta_0 \tag{4}$$

Zur weiteren Azimut-Übertragung nehmen wir eine einfachere Bezeichnung an:

$$\left.\begin{array}{llllll} ((0)(1)) & = \text{Azimut von} & (0) & \text{nach } (1), & = \alpha_0 \\ ((1)(2)) & = \;\;\text{„} \quad\;\; \text{„} & (1) & \;\;\text{„} \quad (2), & = \alpha_1 \\ ((2)(3)) & = \;\;\text{„} \quad\;\; \text{„} & (2) & \;\;\text{„} \quad (3), & = \alpha_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ ((n-1)(n)) & = \text{Azimut von} & (n-1) & \text{nach } (n), & = \alpha_{n-1} \end{array}\right\} \tag{4}$$

Nun ist der Brechungs-Winkel β_1 gleich der Azimut-Differenz: Vorwärts ((1)(2)) — rückwärts ((1)(0)). Das Vorwärts-Azimut (1)(2) ist nach den Bezeichnungen (4) zu setzen $= \alpha_1$ und das Rückwärts-Azimut ((1)(0)) ist die Umkehrung des Azimutes α_0, d. h. $= \alpha_0 \pm 180^\circ$. Der Brechungs-Winkel β_1 ist daher als Azimut-Differenz so zu schreiben:

$$\left.\begin{array}{rl} & \beta_1 = \alpha_1 - (\alpha_0 \pm 180^\circ) \\ \text{oder} & \alpha_1 = \alpha_0 + \beta_1 \pm 180^\circ \end{array}\right\} \tag{5}$$

Eine entsprechende Formel gilt auch für β_2, β_3 u. s. w., und man sieht ein, dass man damit Schritt für Schritt die Azimute aller Strecken allmählich ableiten kann; hat man aber die Azimute, so kann man mit den schon zu Anfang bei (1) angegebenen Seiten s alle Coordinaten schrittweise nach den Formeln (7) oder (7') S. 189 berechnen.

Ehe wir das ausführlich durchnehmen, wollen wir aber den in Fig. 1. angedeuteten Fall sogleich mit behandeln, dass nicht nur der Anfangspunkt (0), sondern auch der Endpunkt (n), an das Coordinaten-System angeschlossen sei, wodurch mehrfache Messungs-Proben entstehen; d. h. wir nehmen nun im Zusammenhang folgendes:

In Fig. 1. sind *vier* Punkte durch ihre Coordinaten gegeben, nämlich:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{Punkt } P & \text{mit den Coordinaten} & y_p & x_p \\ \text{„} \ (0) & \text{„ „ „} & y_0 & x_0 \\ \text{„} \ (n) & \text{„ „ „} & y_n & x_n \\ \text{„} \ Q & \text{„ „ „} & y_q & x_q \end{array}\right\} \quad (6)$$

Wir berechnen α° und α_n aus den Gleichungen:

$$tang\ \alpha^\circ = \frac{y_0 - y_p}{x_0 - x_p} \quad , \quad tang\ \alpha_n = \frac{y_q - y_n}{x_q - x_n} \quad (7)$$

Das hier neu eingeführte Zeichen α° ist das Gegen-Azimut des oben in (3) berechneten Azimutes $((0)\,P)$. Es ist in der neuen Aufgabe konsequenter, *alle* Azimute, also auch das des Anlagestrahls $(0)\,P$, in *einem* Sinn durch den ganzen Zug P , (0) . . . (n) , Q zu zählen.

Wenn man das Gesetz der Gleichung (5) wiederholt anwendet, so hat man:

$$\left.\begin{array}{rlll} & \alpha_0 = \alpha^\circ & + \beta_0 & \pm 180^\circ \\ & \alpha_1 = \alpha_0 & + \beta_1 & \pm 180^\circ \\ & \alpha_2 = \alpha_1 & + \beta_2 & \pm 180^\circ \\ & \ldots & \ldots & \ldots \\ & \alpha_{n-1} = \alpha_{n-2} & + \beta_{n-1} & \pm 180^\circ \\ & \alpha_n = \alpha_{n-1} & + \beta_n & \pm 180^\circ \\ \hline \text{Summe:} & \alpha_n = \alpha^\circ & + [\beta] & \pm p\,180^\circ \end{array}\right\} \quad (8)$$

Dabei ist $\pm p\,180^\circ$ ein gewisses unbestimmt gelassenes Vielfaches von 180°, dessen Betrag nicht weiter untersucht zu werden braucht, weil wir $\pm 360^\circ$ an jedem Azimute willkürlich haben (vgl. (3) und (4) S. 189).

Abgesehen von diesem $\pm p\,180^\circ$ giebt die Gleichung (8):

$$[\beta] = \alpha_n - \alpha^\circ \quad (9)$$

d. h. die algebraische Summe $[\beta]$ aller gemessenen Brechungs-Winkel β muss gleich der Differenz des Abschluss-Azimutes α_n und des Anfangs-Azimutes α° sein.

Völlig genau wird das nicht der Fall sein, wegen der Messungsfehler. Es wird ein Widerspruch w auftreten:

$$[\beta] - (\alpha_n - \alpha^\circ) = w \quad (10)$$

Wenn dieser Widerspruch w gewisse Grenzen nicht überschreitet, so verteilt man ihn zu gleichen Teilen auf die einzelnen Brechungs-Winkel β, und rechnet dann nach (8) die sämtlichen Azimute α widerspruchsfrei durch.

Hat man somit alle Azimute α und alle Strecken-Längen s, so hat man die Coordinaten-Berechnung:

$$\left.\begin{array}{rlll} & y_1 - y_0 = s_0\ sin\ \alpha_0 & & x_1 - x_0 = s_0\ cos\ \alpha_0 \\ & y_2 - y_1 = s_1\ sin\ \alpha_1 & & x_2 - x_1 = s_1\ cos\ \alpha_1 \\ & y_3 - y_2 = s_2\ sin\ \alpha_2 & & x_3 - x_2 = s_2\ cos\ \alpha_2 \\ & \ldots & & \ldots \\ & y_n - y_{n-1} = s_{n-1}\ sin\ \alpha_{n-1} & & x_n - x_{n-1} = s_{n-1}\ cos\ \alpha_{n-1} \\ \hline \text{Summen:} & y_n - y_0 = [s\ sin\ \alpha] & & x_n - x_0 = [s\ cos\ \alpha] \end{array}\right\} \quad (11)$$

Damit hat man wieder zwei Proben, ähnlich wie bei (8).

Im allgemeinen werden kleine Widersprüche bleiben:

$$[s \sin \alpha] - (y_n - y_0) = w_y \qquad [s \cos \alpha] - (x_n - x_0) = w_x. \tag{12}$$

Bleiben die Widersprüche w_y und w_x in gewissen Grenzen, so verteilt man dieselben auf die einzelnen $s \sin \alpha$ und $s \cos \alpha$, und rechnet dann die Coordinaten selbst nach den Formeln (11) aus.

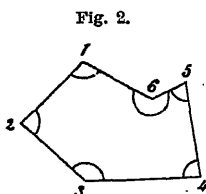
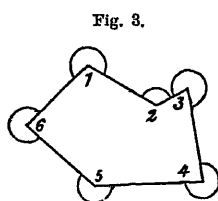
Alles dieses wollen wir an einem Zahlenbeispiel in folgendem § 91. zeigen.

Geschlossene Polygone.

Die Winkelsumme eines geschlossenen Polygons von n Ecken ist, wenn sich die Seiten nicht schneiden,

$$\text{entweder } [\beta] = (n-2)\,180^\circ \quad \text{oder} \quad [\beta] = (n+2)\,180^\circ. \tag{13}$$

Diese zwei Fälle gelten, je nachdem die Numerierung von rechts nach links (Fig. 2.) oder von links nach rechts (Fig. 3.) geht.

Gewöhnlich wird die erste Numerierung (Fig. 2.) angewendet, damit die Innenwinkel als Polygonwinkel erscheinen.

Hat man z. B. bei einem Viereck, dessen Seiten sich nicht schneiden, die Numerierung nach Fig. 2., so erhält man die Innenwinkel, deren Summe ist:

$$[\beta] = (n-2)\,180^\circ = (4-2)\,180^\circ = 360^\circ \tag{14}$$

Hat man die Numerierung nach Fig. 3., so erhält man die Aussenwinkel, deren Summe ist:

$$[\beta] = (n+2)\,180^\circ = (4+2)\,180^\circ = 1080^\circ \tag{15}$$

Wenn dagegen zwei Seiten des Vierecks sich *schneiden*, so dass das Viereck ein „verschränktes“ ist, so wird, wie man sich an einer Figur überzeugt, die Summe der Winkel unter allen Umständen = 720°.

Wir verfolgen dieses nicht weiter, da geschlossene Vielecke in der praktischen Polygonometrie wenig Bedeutung haben.

§ 91. Beispiel einer Zugs-Berechnung.

Der in Fig. 1. S. 296 gezeichnete Zug, den wir berechnen wollen, hat 9 Punkte:

Hard, (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), *Neubruch*.

Hard und Neubruch, sowie die zwei weiteren Punkte Capelle und Brauerei (Br. Fig. 1.) sind trigonometrisch bestimmt, und haben folgende, fest gegebene Coordinaten:

	y	x	
Capelle . . .	— 7773,87^m	+ 46101,76^m	(1)
Hard	— 7853,19	+ 45313,21	
Neubruch . .	— 7077,54	+ 46002,10	
Brauerei . .	— 7708,68	+ 46101,27	

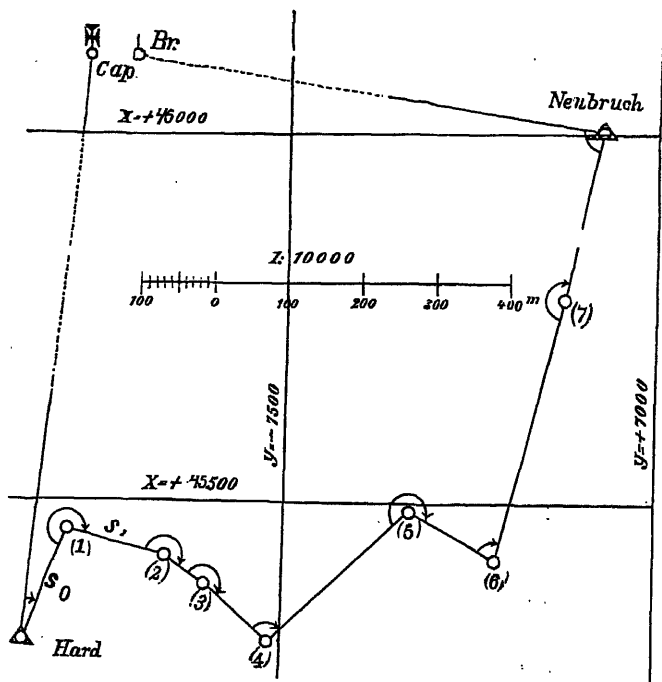
Schon ehe die Messung eines Zuges zwischen Hard und Neubruch begonnen wird, kann man, zur Vorbereitung, die zwei Azimute berechnen, welche in (7) des vorigen § 90. S. 294, mit α° und α_n bezeichnet wurden:

Hard . .	— 7853,19	+ 45313,21	*log* — 79,32	1.899 393$_n$
Capelle .	— 7773,87	+ 46101,76	*log* — 788,55	2.896 829$_n$
	— 79,32	— 788,55	*log tang* α°	9.002 564

Azimut von Capelle nach Hard $= \alpha^\circ = 185^\circ\ 44'\ 39''$ (2)

Brauerei .	— 7708,68	+ 46101,27	*log* — 631,14	2.800 126$_n$
Neubruch	— 7077,54	+ 46002,10	*log* + 99,17	1.996 380
	— 631,14	+ 99,17	*log tang* α_n	0.803 746$_n$

Azimut von Neubruch nach Brauerei $\alpha_n = 278^\circ\ 55'\ 47''$. (3)

Fig. 1.*)

*) Dieses Beispiel ist von der Gemarkung Grünwinkel bei Karlsruhe. Wir haben aber die badischen Coordinaten, welche $+x$ nach Süden und $+y$ nach Westen zählen, (vgl. S. 186 unten), für unser Buch *umgestellt*, so dass nun in Fig. 1., dem allgemeinen Gebrauch entsprechend, $+x$ nach Norden und $+y$ nach Osten zählt.

Folgendes sind die gemessenen Brechungs-Winkel und Seiten:

	Brechungswinkel	Seiten	
Hard	$\beta_0 = 16^\circ\ 8'\ 14''$	$s_0 = 159{,}60^m$	
(1)	$\beta_1 = 261^\circ\ 52'\ 20''$	$s_1 = 135{,}72$	
(2)	$\beta_2 = 196^\circ\ 47'\ 10''$	$s_2 = 66{,}45$	
(3)	$\beta_3 = 189^\circ\ 14'\ 0''$	$s_3 = 117{,}33$	
(4)	$\beta_4 = 98^\circ\ 5'\ 0''$	$s_4 = 253{,}83$	(4)
(5)	$\beta_5 = 251^\circ\ 1'\ 40''$	$s_5 = 131{,}13$	
(6)	$\beta_6 = 74^\circ\ 36'\ 35''$	$s_6 = 365{,}22$	
(7)	$\beta_7 = 178^\circ\ 50'\ 55''$	$s_7 = 224{,}85$	
Neubruch	$\beta_8 = 86^\circ\ 32'\ 40''$		
	$[\beta] = 1353^\circ\ 8'\ 34''$		

Die weitere Rechnung wird tabellarisch gemacht, wie auf S. 298—299 ausführlich gezeigt ist (im Wesentlichen nach dem trigonometrischen Formular 19. der Anweisung IX. vom 25. Oktober 1881).

Wir verfolgen diese tabellarische Rechnung im Einzelnen:

Spalte 1. 2.) Die Spalten 1. und 2. dienen nur zu Verweisungen u. s. w.

Spalte 3. und 4.) Die Spalten 3. und 4. werden mit den soeben unter (4) mitgeteilten Punktbezeichnungen und den gemessenen Brechungswinkeln ausgefüllt; zugleich kann man auch die Summe $[\beta] = 1353^\circ\ 8'\ 34''$ unten bilden.

Spalte 5.) In die Spalte 5. setzt man oben und unten die früher S. 000 zur Vorbereitung berechneten Azimute $\alpha^\circ = 185^\circ\ 44'\ 39'$, und $\alpha_n = 278^\circ\ 55'\ 47''$. Unten in der Spalte 5. berechnet man die Differenz $\alpha_n - \alpha^\circ = 93^\circ\ 11'\ 8''$. Dieselbe Differenz schreibt man auch herüber in die Spalte 4. mit: Soll ... $3^\circ\ 11'\ 8''$, dabei überzeugt man sich, dass $1353^\circ - 93^\circ = 1260^\circ$ ein ganzes Vielfaches von 180° ist, nämlich $= 7 \times 180^\circ$.

Spalte 4.) Die so erhaltene Differenz $-2'\ 34''$ oder $= -154''$ wird auf die neun Winkel der Spalte 4. gleichförmig verteilt, was auf einen Winkel rund $17''$ ausmacht, weshalb überall die Korrektion $+17''$ beigeschrieben ist (und am Schluss $+18''$, um die Summe $154''$ genau voll zu haben).

Spalte 4. und 5.) Nun kommt die Azimutrechnung nach den Formeln (8) § 90. S. 296. Wir schreiben den Anfang ausführlich:

$$\begin{array}{rr}
\alpha^\circ = & 185^\circ\ 44'\ 39'' \\
 & +17'' \\
 & +\ 16^\circ\ \ 8'\ 14'' \\
\hline
 & 201^\circ\ 53'\ 10'' \\
 & -180^\circ \qquad\quad \\
\hline
\alpha_0 = & 21^\circ\ 53'\ 10'' \\
 & +17'' \\
 & +261^\circ\ 52'\ 20'' \\
\hline
 & 283^\circ\ 45'\ 47'' \\
 & -180^\circ \qquad\quad \\
\hline
\alpha_1 = & 103^\circ\ 45'\ 47''
\end{array}$$

. . . . u. s. w.

Coordinaten-Berechnung

Nr. des Zuges.	Punkt	Brechungswinkel β	Azimut α	Strecke s Meter	$log\ s$ / $log\ sin\ \alpha$ / $log\ s\ sin\ \alpha$	$log\ s$ / $log\ cos\ \alpha$ / $log\ s\ cos\ \alpha$
1., 2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Zug Nr. 1. Die Azimute 185° 44′ 39″ und 278° 55′ 47″ sind von (2) und (3) S. 000 entnommen.			**185° 44′ 39″**			
	Hard	+ 17 16° 8′ 14″			2.203 033	2.203 033
			21° 53′ 10″	159,60	9.571 433	9.967 514
					1.774 466	2.170 547
	(1)	+ 17 261° 52′ 20″			2.132 644	2.132 644
			103° 45′ 47″	135,72	9.987 348	9.376 407$_n$
					2.119 992	1 509 051$_n$
	(2)	+ 17 196° 47′ 10″			1.822 495	1.822 495
			120° 33′ 14″	66,45	9.935 079	9.706 161$_n$
					1.757 574	1.528 656$_n$
	(3)	+ 17 189° 14′ 0″			2.069 409	2.069 409
			129° 47′ 31″	117,33	9.885 572	9.806 181$_n$
					1.954 981	1.875 590$_n$
	(4)	+ 17 98° 5′ 0″			2.404 543	2.404 543
			47° 52′ 48″	253,83	9.870 253	9.826 519
					2.274 796	2.231 062
	(5)	+ 17 251° 1′ 40″			2.117 702	2.117 702
			118° 54′ 45″	131,13	9.942 186	9.684 373$_n$
					2.059 888	1.802 075$_n$
	(6)	74° 36′ 35″			2.562 555	2.562 555
			13° 31′ 37″	365,22	9.369 035	9.987 783
					1.931 590	2.550 338
	(7)	+ 17 178° 50′ 55″			2.351 893	2.351 893
			12° 22′ 49″	224,85	9.331 223	9.989 782
				1454,13 = [s]	1.683 116	2.381 675
	Neubruch	+ 18 86° 32′ 40″				
	Summe	1353° 8′ 34″				
	Soll	...3 11 8	**278° 55′ 47″**			
	Fehler	— 2′ 34″	93° 11′ 8″			
		$\frac{154}{9} = 17''$				

eines Polygon-Zuges.

Ordinaten-unterschied $s \sin \alpha$ +	−	Abscissen-unterschied $s \cos \alpha$ +	−	Verbesserter Ordinaten-unterschied Δy und **Ordinate y** Meter	Verbesserter Abscissen-unterschied Δx und **Abscisse x** Meter	Punkt
9.		10.		11.	12.	13.
				— 7853,19	**+ 45313,21**	Hard
+ 3		+ 5				
+ 59,49		+ 148,10		+ 59,52	+ 148,15	
				— 7793,67	**+ 45461,36**	(1)
+ 4			+ 5			
+ 131,82			— 32,29	+ 131,86	— 32,24	
				— 7661,81	**+ 45429,12**	(2)
+ 3			+ 5			
+ 57,22			— 33,78	+ 57,25	— 33,73	
				— 7604,56	**+ 45395,39**	(3)
+ 3			+ 5			
+ 90,15			— 75,09	+ 90,18	— 75,04	
				— 7514,38	**+ 45320,35**	(4)
+ 4		+ 5				
+ 188,28		+ 170,24		+ 188,32	+ 170,29	
				— 7326,06	**+ 45490,64**	(5)
+ 3			+ 5			
+ 114,79			— 63,40	+ 114,82	— 63,35	
				— 7211,24	**+ 45427,29**	(6)
+ 3		+ 5				
+ 85,43		+ 355,09		+ 85,46	+ 355,14	
				— 7125,78	**+ 45782,43**	(7)
+ 3		+ 5				
+ 48,21		+ 219,62		+ 48,24	+ 219,67	
+ 775,39	0,00	+ 893,05	— 204,56	**— 7077,54**	**+ 46002,10**	Neubruch
				+ 775,65	+ 688,89	
+ 775,39		+ 688,49				
Soll + 775,65		Soll + 688,89				
Fehler $w_y = -0{,}26$		$w_x = -0{,}40$				
$\frac{0{,}26}{8} = 0{,}03$		$\frac{0{,}40}{8} = 0{,}05$				

$$\sqrt{w_y^2 + w_x^2} = f = 0{,}48_m$$

Spalte 7. und 8.) Mit den Azimuten α aus Spalte 5. und den Entfernungen s aus Spalte 6. kann die logarithmische Rechnung $\log s \sin \alpha$ und $\log s \cos \alpha$ gemacht werden (mit fünfstelligen oder sechsstelligen Logarithmen).

Spalte 9. und 10.) Einsetzung der $s \sin \alpha$ und $s \cos \alpha$ selbst in je zwei Spalten für + und —. Dann Addition der Columnen, so dass man unten hat:

$$[s \sin \alpha] = + 775{,}39 \qquad [s \cos \alpha] = + 688{,}49.$$

Spalte 11. und 12.) Oben und unten werden die gegebenen Coordinaten eingesetzt, und unten die Differenz gebildet:

$$\begin{array}{rlrll} y_0 = & -\,7853{,}19 & , \quad x_0 = & +\,45313{,}21 & \text{Hard} \\ & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & \\ y_n = & -\,7077{,}54 & , \quad x_n = & +\,46002{,}10 & \text{Neubruch} \\ \hline y_n - y_0 = & +\ \ 775{,}65 & x_n - x_0 = & +\ \ 688{,}89 & \end{array}$$

Spalte 9. und 10.) Diese soeben in den Spalten 11. und 12. berechneten Coordinaten-Differenzen werden als „*Soll*" links herüber gesetzt und zeigen die Widersprüche

$$w_y = -\,0{,}26^m \qquad w_x = -\,0{,}40^m.$$

Diese Widersprüche verteilen wir gleichförmig, d. h. wir geben den $s \sin \alpha$ die Korrektion $+\,0{,}03^m$ oder $+\,0{,}04^m$ und den $s \cos \alpha$ die Korrektion $+\,0{,}05^m$.

Spalte 11. und 12.) Die so korrigierten $s \sin \alpha$ und $s \cos \alpha$ setzt man von 9. und 10. nach 11. und 12. hinüber, z. B.:

$$s \sin \alpha = +\,59{,}49 \quad , \quad \Delta y = \overset{+\,0{,}03}{59{,}49} = +\,59{,}52 \quad \text{u. s. w.}$$

dann addiert man Schritt für Schritt die Spalten 11. und 12. herunter, und muss auf die vorher unten schon eingesetzten Coordinaten von Neubruch herauskommen.

Zulässige Widersprüche.

Ohne jetzt schon auf die Fehlergesetze einzugehen, nach welchen sich der Winkelsummen-Widerspruch w und die Coordinaten-Widersprüche w_y und w_x zusammensetzen, wollen wir nur die hiefür giltigen amtlichen Bestimmungen der Anweisung IX. vom 25. Oktober 1881, hier zusammenstellen.

Nach S. 22 und S. 40 dieser Anweisung darf der Gesamt-Winkelfehler eines Zuges den Betrag von $1{,}5\sqrt{n}$ Minuten in der Regel nicht übersteigen, wobei n die Anzahl der Brechungswinkel, den Anschluss und Abschlusswinkel mitgerechnet, bezeichnet. Diesem entspricht folgende Tabelle:

n	w_{max}	n	w_{max}
2	2,1′	10	4,7′
4	3,0′	15	5,8′
6	3,7′	20	6,7′
8	4,2′	25	7,5′
10	4,7′	30	8,2′

$$w_{max} = 1{,}5\sqrt{n} \qquad (5)$$

Unser Beispiel S. 298—299 hat, mit $n = 9$, den Widerspruch $w = -\,2'\,34''$, was nach vorstehender Tabelle (5) noch zulässig ist

Über die zulässigen Coordinaten-Widersprüche w_y und w_x (welche theoretisch sehr schwer zu behandeln sind) hat die Anweisung IX. vom 25. Oktober 1881, S. 23 dasselbe Grenzfehler-Gesetz angenommen, welches wir bereits in den Gleichungen (9)

S. 27 für die reine Längenmessung zitiert haben, nämlich, für drei Klassen von Verhältnissen:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{I. günstig} & \sqrt{w_y^2 + w_x^2} = f = & 0{,}01 \sqrt{4\,[s] + 0{,}0050\,[s]^2} \\ \text{II. mittel} & \text{„} \qquad \text{„} & 0{,}01 \sqrt{6\,[s] + 0{,}0075\,[s]^2} \\ \text{III. ungünstig} & \text{„} \qquad \text{„} & 0{,}01 \sqrt{8\,[s] + 0{,}0100\,[s]^2} \end{array}\right\} \quad (6)$$

Diesem entspricht folgende Tabelle:

Summe der Seiten $[s]$	Zulässig $f = \sqrt{w_y^2 + w_x^2}$ im Falle		
	I. günstig	II. mittel	III. ungünstig
200^m	$0{,}32^m$	$0{,}39^m$	$0{,}45^m$
400	0,49	0,60	0,69
600	0,65	0,79	0,92
800	0,80	0,98	1,13
1000	0,95	1,16	1,34
1500	1,31	1,61	1,86
2000	1,67	2,05	2,36
2500	2,03	2,48	2,88
3000	2,39	2,92	3,38

Unser Beispiel S. 298—299 hat $w_y = -0{,}26$, $w_x = -0{,}40$, also die Hypotenuse hiezu $\sqrt{0{,}26^2 + 0{,}40^2} = 0{,}48 = f$. Die Seiten-Summe ist $[s] = 1454^m$, und hiefür ist nach vorstehender Tafel der Fehler $0{,}48^m$ in allen drei Klassen noch wohl zulässig, wie überhaupt solche amtliche Fehlergrenzen gewöhnlich so weit gehalten sind, dass der sorgfältig arbeitende Landmesser sie leicht einhalten kann.

Auch über die *Verteilung* der Coordinaten-Widersprüche w_y und w_x können wir hier, ohne Theorie, einiges sagen: die einfachste Verteilung ist die *gleich*förmige, welche wir auf S. 298—299 angewendet haben. Die Anweisung IX. vom 25. Oktober 1881 empfiehlt, auf S. 286, Verteilung nach dem Verhältnis der Streckenlängen. Andere Anweisungen verlangen Verteilung im Verhältnis der Coordinaten-Unterschiede u. dgl.

Da einfache theoretische Gesetze hier fehlen, und da im Endergebnis die verschiedenen Verfahren sich meist wenig unterscheiden, halten wir es für das Beste, bis zum Betrag von $2 - 3^{cm}$ auf einen Wert $s \sin \alpha$ oder $s \cos \alpha$, *gleich*förmig, und den Rest proportional oder nach Gutdünken zu verteilen.

Grobe Seitenfehler.

Wenn in einer Seitenmessung ein grober Fehler, z. B. von 5^m ist, so hat dieses zur Folge, dass der ganze Zug von da an in der Richtung der falschen Seite um 5^m verschoben wird. Wenn daher zwei grobe Fehler w_y und w_x beim Abschluss zum Vorschein kommen, so sieht man zuerst zu, ob $\sqrt{w_y^2 + w_x^2}$ ungefähr $= 5^m$, oder eine andere runde Zahl ist, und zweitens sieht man zu, ob der Quotient $w_y : w_x$ mit einem der Quotienten $s \sin \alpha : s \cos \alpha$ nahezu übereinstimmt. Ist dieses der Fall, so wird man in dem betreffenden s den Fehler vermuten. Allerdings bei sehr nahe geradliniger Erstreckung des ganzen Zuges ist mit diesem Kennzeichen wenig zu erreichen.

Doch kann man *sehr* grobe Fehler hiernach ziemlich sicher auffinden. Beispielsweise ergab sich $\sqrt{w_y^2 + w_x^2} = 27^m$, und beim Nachsehen der verdächtigen Seite fand sich, dass in Folge eines Schreibfehlers 103^m statt 130^m gesetzt war.

Schärfe der Rechnung.

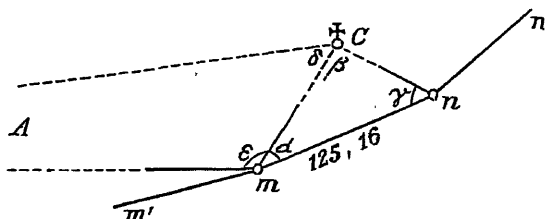
Die Züge werden gewöhnlich nur auf Centimeter genau berechnet, wie auch unser Musterbeispiel auf S. 298—299 zeigt. Indessen für *Stadt*-Vermessungen und andere wichtige Fälle ist doch die Ausrechnung auf Millimeter wegen der Häufung von Abrundungsfehlern nötig. So sind auch die Züge der Lindener Stadtvermessung § 93. Fig. 1. auf Millimeter genau durchgerechnet.

§ 92. Anschluss eines Zuges an einen hochgelegenen Punkt (Kirchturm).

Herunterbringen eines Punktes.

Wenn ein Zug in der Nähe eines trigonometrisch bestimmten Kirchturms oder eines ähnlichen unzugänglichen hochgelegenen Punktes vorbei geht, so kann man nicht unmittelbar, sondern nur durch eine Hilfsmessung anschliessen.

Diese Hilfsmessung wurde bei der Berliner Stadtvermessung „*Herunterbringen*" genannt, was ein ganz bezeichnender Ausdruck ist (jedoch nicht zu verwechseln mit unmittelbarem Abloten, vgl. S. 224).

Fig. 1.
Herunterbringen des Punktes C.

Nach Fig. 1. haben wir folgendes:

Ein Zug $m' m n n'$ wird in der Nähe eines Kirchturms C, dessen Coordinaten gegeben sind, vorbeigeführt.

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden:

Erster Fall: Wenn in der Nähe von C ein weiterer durch Coordinaten gegebener Punkt A sichtbar ist, was in dem Punkt m der Fall sein soll, so kann man die Coordinaten von m berechnen, und kann daher auf m den Zug in Beziehung auf Azimute und Coordinaten an- oder abschliessen, wie wenn der Punkt m unmittelbar ein trigonometrischer Punkt wäre.

Zweiter Fall: Wenn ein weiterer trigonometrischer Punkt A in der Nähe von m nicht sichtbar ist, so kann man zwar die Entfernung mC durch eine Hilfsmessung bestimmen, folglich den Zug in C in Beziehung auf Coordinaten abschliessen, nicht aber in Beziehung auf das Azimut.

Unter Voraussetzung des ersten Falles nehmen wir als gegeben die Coordinaten von C und von A, nämlich:

	y	x
Punkt C	$-7773{,}87$	$+46101{,}76$
Punkt A	$-8240{,}62$	$+46014{,}26$

Es wird die Zugseite mn mit C zu einem Dreieck verbunden, gleichzeitig wird auch in m der entfernte Punkt A angezielt; man misst also folgende drei Winkel:

$$\varepsilon = 122^\circ\, 51'\, 30'' \qquad \alpha = 29^\circ\, 28'\, 20'' \qquad \gamma = 50^\circ\, 49'\, 40''$$

und die Seite $mn = 125{,}16$.

Aus α und γ erhält man auch $\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma) = 99^\circ\, 42'\, 0''$ und damit lässt sich berechnen:

$$Cm = \frac{mn}{\sin\beta} \sin\gamma = 98{,}438$$

Aus den oben gegebenen Coordinaten von C und A berechnet man das Azimut und die Entfernung von C nach A, nämlich:

$$(CA) = 259^\circ\, 22'\, 56'' \qquad \log CA = 2.676585$$

Sobald CA berechnet ist, hat man dieselbe Aufgabe, wie früher in Fig. 1. S. 220, d. h. man hat in dem Dreieck ACm zwei Seiten CA und Cm und den nicht eingeschlossenen Winkel $AmC = \varepsilon$. Daraus berechnet man den spitzen Winkel bei A, nämlich:

$$\sin A = \frac{mC}{AC} \sin\varepsilon \quad , \quad A = 10^\circ\, 1'\, 40''.$$

Damit hat man auch $\delta = 180^\circ - (A + \varepsilon) = 47^\circ\, 6'\, 50''$.

Um die Coordinaten von C auf m überzutragen, hat man bereits die Entfernung Cm oben bestimmt, das Azimut (Cm) findet sich ebenfalls, nämlich:

$$(Cm) = (CA) - \delta = 212^\circ\, 16'\, 6''.$$

Damit wird:

$$y_m = y_c + Cm \sin(Cm) \qquad x_m = x_c + Cm \cos(Cm)$$
$$y_m = -7826{,}42^m \qquad x_m = +46018{,}53^m$$

womit die Aufgabe gelöst ist.

Zweiter Fall. Wenn der Punkt A in m nicht sichtbar ist, so kann man nur das Hilfsdreieck mCn messen, hat aber keine Orientierung für dasselbe.

§ 93. Anlage eines Polygon-Netzes.

Polygon-Netze werden selten selbständig angeordnet, sondern zur gegenseitigen Verbindung zwischen trigonometrische Punkte gelegt. Die Polygon-Züge sind das wichtigste Verbindungsglied zwischen der Triangulierung und der Klein-Vermessung*).

Unser erstes Beispiel (Fig. 1. S. 305) schliesst sich unmittelbar an unsere Lindener Triangulierung an, welche wir früher auf S. 228 dargestellt haben. Die 10 trigonometrischen Bodenpunkte (pothenotische Schnitte) bilden die Knotenpunkte des Polygon-Netzes. Die Entfernung der trigonometrischen Punkte, also die Länge eines

*) Über die geschichtliche Entwicklung der Theodolit-Polygon-Züge, welche von den Rheinlanden aus in alle deutschen Landes-Vermessungen übergegangen sind, haben wir einige Mitteilungen in der „Zeitschrift f. Verm. 1886“, S. 535, und 1887, S. 25 und S. 58.

Haupt-Zuges ist in diesem Falle nur etwa 700—800 Meter, weil es sich um eine *Stadt*-Vermessung handelt, bei welcher grosse Genauigkeit erfordert wird, und bei welcher nachher noch viele Polygon-Züge zweiter und dritter Ordnung gelegt werden.

Ein zweites Beispiel, mit einer *Land*-Gemeinde, Grünwinkel bei Karlsruhe, zeigt Fig. 2. S. 306, von welcher auch unser früheres Beispiel S. 296, mit der Berechnung S. 298—299 entnommen ist (Zug $H\,a\,N$ südöstlich). Es sind hier (S. 306) nur *sechs* trigonometrische Punkte vorhanden, und zwar vier zugängliche Bodenpunkte A, D, N, H, und zwei unzugängliche Punkte, C = Capelle und B = Brauerei.

Die Zahl der Punkte ist: im Umfang 33 Polygonpunkte,
„ Innern 72 „
„ „ 10 Schnittpunkte,
im Ganzen 115 Punkte auf 1,64 qkm

oder 70 Punkte auf 1 qkm.

Was die *Zahl der Polygonpunkte* im allgemeinen betrifft, so giebt die Anweisung IX. vom 25. Oktober 1881 S. 17 hierüber ungefähr folgendes:

Anzahl n der Polygonpunkte auf 1 qkm (100 ha):

Durchschnittliche Parzellengrösse	über 50 Are	50—5 Are	unter 5 Are (Städte)
Karten-Massstab	1 : 2000	1 : 1000	1 : 500
Ebene, ohne Hindernisse . . .	$n = 13$	$n = 33$	$n = 100$
Mittel-Verhältnisse	$n = 20$	$n = 50$	$n = 133$
Berge und Hindernisse	$n = 40$	$n = 100$	$n = 200$

Numerierung der Polygonpunkte.

In unserem Lindener Netz (Fig. 1. S. 305) ist die Numerierung ohne besonderes System gemacht, sie zeigt einfach die *Zeit*-Folge der Züge, und das ist das bequemste.

Wird im Laufe der Vermessung ein Punkt eingeschaltet, so wendet man Zwischen-Numern an, z. B. am Wasserturm S. 305 wurde (62a) zwischen (62) und (53) nachträglich eingeschaltet, um das Polygon um den Wasserturm vollends zu schliessen.

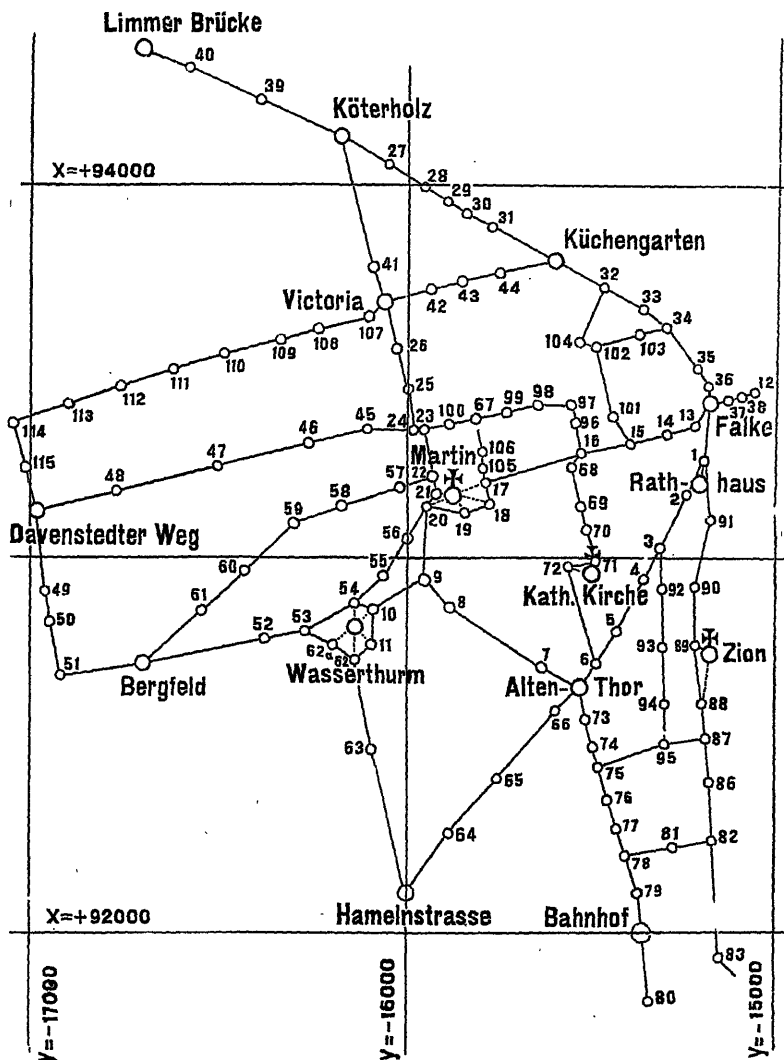
Nach der Preussischen Anweisung IX. vom 25. Oktober 1881 (§ 31.) werden die Polygonpunkte gemarkungsweise, mit Eins beginnend, fortlaufend numeriert, jedoch *einschliesslich der trigonometrischen Beipunkte* (trigonometrische Punkte niederster Ordnung). Im übrigen ist die Numerierung willkürlich, etwa der *Zeit*-Folge der Auswahl oder der Messung entsprechend.

Bei der badischen Kataster-Vermessung bestehen besondere Vorschriften über die Numerierung (Anweisung von 1863, § 41.). Es wird in jeder Gemarkung in der Ortschaft mit (1) begonnen, dann geht die Numerierung nach Norden, und kommt in der ganzen Gemerkung in dem Sinn von Norden über Westen, Süden und Osten herum. In nicht bewohnten Gemarkungen beginnt die Numerierung auf einem nördlichen Punkte in der Nähe der Gemarkungs-Grenze, und wird von da über West, Süd und Ost fortgeführt. Die Numern der Punkte werden im Felde auf eingeschlagenen Pflöcken oder Schindeln beigeschrieben. Die Numern der Gemarkungs-Grenz*steine*, welche von der übrigen Numerierung unabhängig sind, werden endgültig eingehauen.

Was man über die *Anordnung der Züge* im allgemeinen sagen kann, ist in Kürze folgendes:

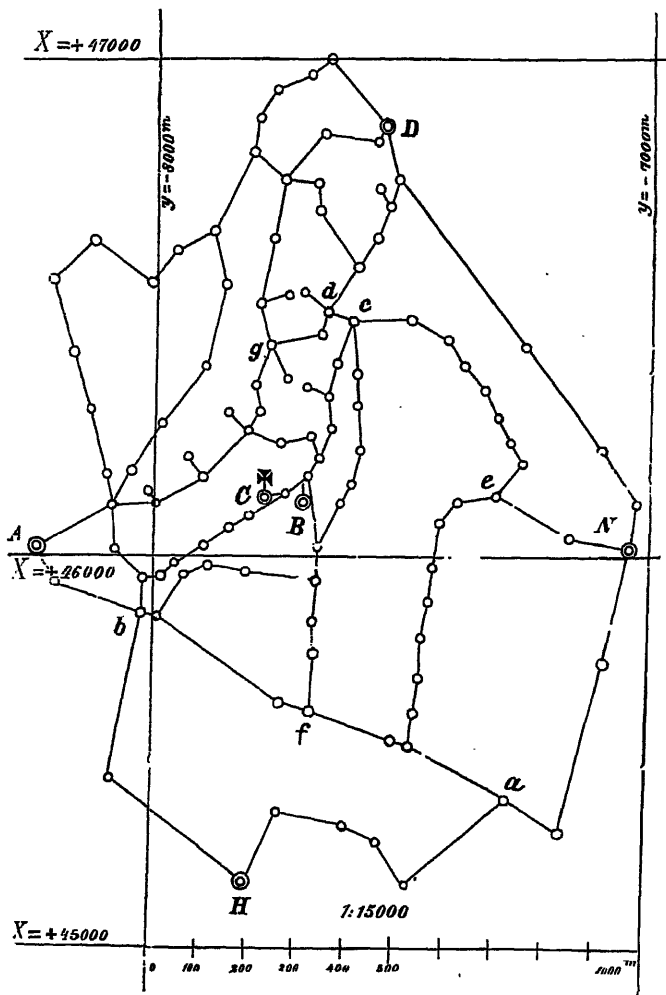
Man unterscheidet Hauptzüge und Nebenzüge.

Die Hauptzüge sollen auf dem kürzesten Weg und mit Vermeidung stark aus- und einspringender Ecken einen Dreieckspunkt mit dem andern verbinden. Die Zugs-

Fig. 1.
Polygonometrisches Netz der Stadt Linden bei Hannover.
(Massstab 1 : 20000.)
120 Haupt-Polygon-Punkte auf 3 qkm.

seiten sollen möglichst gleich lang, und nicht zu kurz, d. h. mindestens 100 Meter, höchstens 300 Meter und im Mittel etwa 150 Meter lang sein.

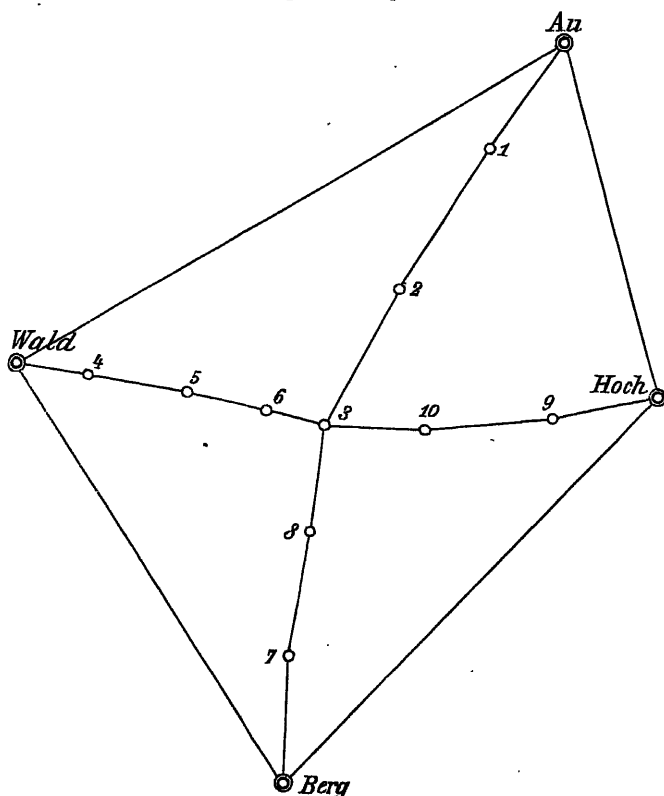
Die Nebenzüge legen sich in gleicher Weise zwischen je zwei Punkte der Hauptzüge.

Jeder Punkt soll nach möglichst vielen Richtungen hin Verbindungen haben. Lange parallel laufende Züge ohne Querverbindungen sind ungünstig.

Fig. 2.
Polygonometrisches Netz der Gemarkung Grünwinkel bei Karlsruhe.
(Massstab 1 : 15000.)
115 Punkte auf 1,64 qkm.

Zug-Verknotung.

In vielen Fällen ist es nützlich, nicht geradezu die Züge als Verbindungen zwischen den trigonometrischen Punkten anzuordnen, sondern von mehreren trigonometrischen Punkten nach einem Zentralpunkt zusammen zu rechnen. Ein solcher Fall ist in untenstehender Fig. 3. gezeichnet. Man rechnet hier von vier Seiten her nach dem Punkte (3), gleicht die vier Azimute in (3) zusammen aus, und berechnet dann die Coordinaten des Punktes (3) von vier Seiten her. Wenn die Wege hier nahezu gleich sind, wie in dem Beispiel Fig. 3., so wird man die Coordinaten-Ausgleichung in dem Punkte (3) durch einfache Mittelbildung bewerkstelligen; sind die Wege sehr ungleich, so bildet man zuerst auch das einfache Mittel, rückt dann aber nach Gutdünken noch nötigenfalls nach der einen oder anderen Seite. Theoretisch unsichere Ausgleichungs-Gewichte haben hier wenig Wert.

Fig. 3. *)

Zug-Verknotung.

---

*) Diese Figur ist einer Mitteilung von Kataster-Geometer *Fuhrmann* in Donaueschingen, in der „Zeitschr. f. Verm. 1880", S. 294—297, entnommen.

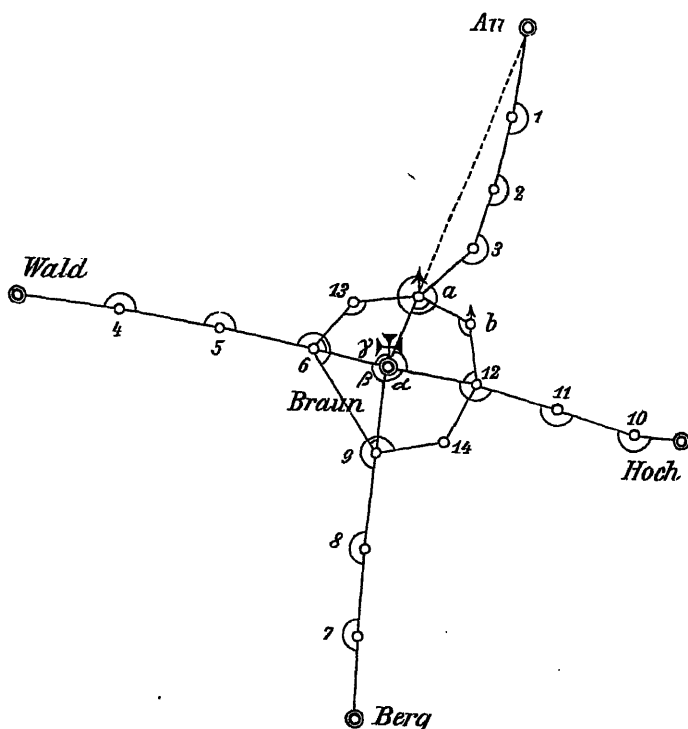
Zug-Verknotung mit Kirchturm-Anschluss.

Nachdem das Anschliessen an Kirchtürmen durch „*Herunterbringen*" in § 92. behandelt ist, können wir auch den kranzförmigen Anschluss rund um einen Turm herum als theoretisch erledigt betrachten, denn es handelt sich hier nur um wiederholtes Herunterbringen, mit gegenseitigen Proben.

Ein klares, übersichtlich gezeichnetes Beispiel zeigt Fig. 4., und auch unser Lindener Netz (Fig. 1. S. 305) hat zwei solche Kranz-Polygone, um den Wasserturm, und um den Martin-Kirchturm.

Über die Rechnungs-Führung und Ausgleichung lässt sich nichts allgemeines sagen; es kommt dabei alles auf praktisches Gefühl und Verständnis des Rechnenden an.

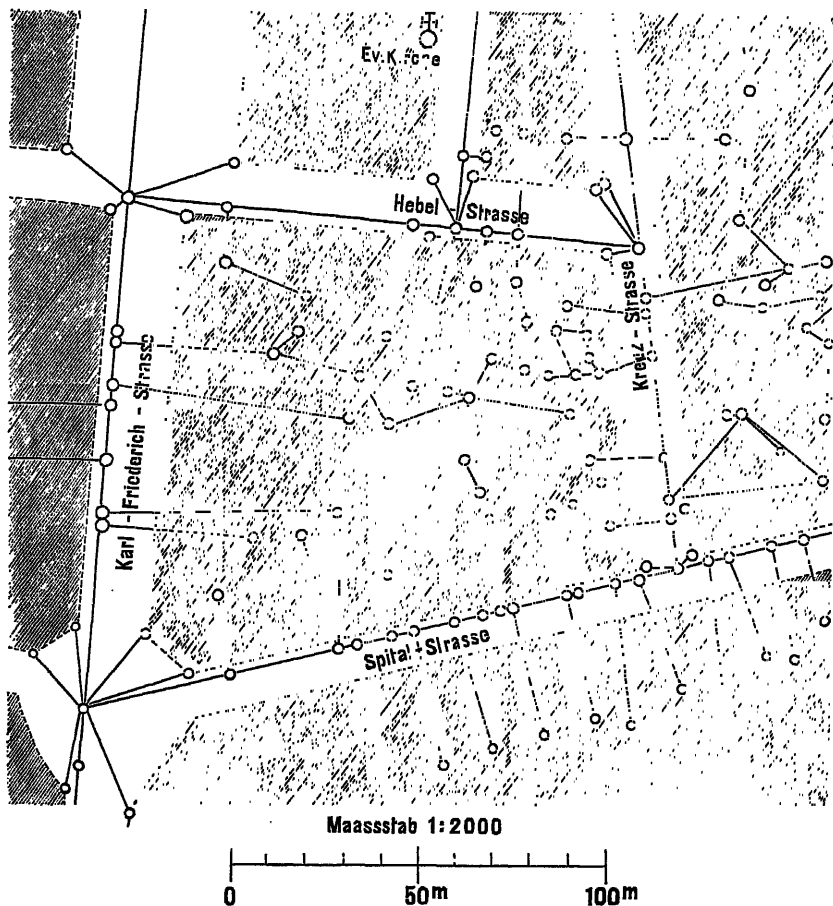
Anschluss an die Klein-Vermessung. Je nachdem man mit der polygonometrischen Messung mehr oder weniger ins Kleine geht, oder früher Winkelspiegel- (Kreuzscheiben-) Messungen anschliesst, gestaltet sich die Anordnung verschieden. Ein Bei-

Fig. 4.*)
Zug-Verknotung mit Kirchturm-Anschluss.

*) Diese Figur ist einer Mitteilung von Kataster-Geometer *Fuhrmann* in Donaueschingen, in der „Zeitschr. f. Verm. 1880", S. 294—297, entnommen.

spiel für den ersten Fall, sehr weit ins Kleine getriebene Polygon-Messung, allerdings mit vielen, tot auslaufenden Strahlen, zeigt Fig. 5. von der Karlsruher Stadt-Vermessung (vgl. „Zeitschr. f. Verm. 1887“, S. 316).

Fig. 5.

Teil des Polygon-Netzes der Karlsruher Stadt-Vermessung.

(Im Mittel 2260 Polygon-Punkte auf 1 Q.-Kilometer.)

Klein-Punkte. Solche Punkte, welche durch reinen Linien-Anschluss (oder auch mit dem Winkelspiegel) gewonnen werden, und nach Coordinaten berechnet werden, nennt die Preussische Kataster-Vermessung „*Klein-Punkte*“.

Wenn z. B. auf einer Geraden, von welcher zwei Punkte durch Coordinaten gegeben sind, weitere Punkte mit Latten eingemessen werden, so kann man auch deren Coordinaten leicht berechnen (Formular 22. der Anweisung IX. vom 22. Oktbr. 1881).

Ähnlich verhält es sich mit Winkelspiegel- (Kreuzschreiben-) Aufnahmen, Bogen-Schnitten und Diagonalen-Schnitten, welche wir bereits in § 61. bis § 63. (S. 195—200 behandelt haben.

§ 94. Festlegung und Versicherung der Polygon-Punkte.

Die Anordnungen, welche man zur Festlegung und Versicherung der Polygon-Punkte zu treffen hat, sind verschieden, je nachdem es sich um freies Feld oder Städte handelt.

I. Polygon-Punkte im freien Feld.

Es fragt sich zuerst, welche Vermarkung der Gemarkungs-, Gewannen- und Eigentums-Grenzen vorhanden ist, und ob man diese als dauernd betrachten darf. Z. B. im Grossherzogtum Baden wurde beim Beginn der Katastervermessung (1854) ein Vermarkungs-Gesetz erlassen (abgedruckt in der „Zeitschr. f. Verm. 1887, S. 400—404), und dann die Polygon-Punkte wenn möglich auf Gemarkungs- und Gewannen-Grenzsteine und auf Eigentums-Grenzsteine gelegt.

Es wird dabei die Stein*mitte* als Polygonpunkt genommen und durch ein Loch mit dem Steinmeisel bezeichnet. Über einem solchen Punkt kann man zwar den Theodolit centrisch aufstellen, allein man kann auf der Steinmitte keinen Stab einstecken für das Anzielen von anderen Punkten her. Am besten ist es, den Punkt auf dem Stein selbst (ohne Bake) anzuzielen, und nach dieser Rücksicht die Punkte auszuwählen; ist aber dieses nicht möglich, so steckt man jeweils einen Stab in der gerade in Betracht kommenden Richtung hinter oder vor den Stein, oder lässt für die kurze Dauer der Winkelmessung durch einen Gehilfen einen Stab centrisch und lothrecht aufhalten.

In den Landes-Grenzen, in Staatsforsten u. s. w., hat man oft Steine, die über 0,5^m aus dem Boden hervorragen; dann ist es das allerbeste, man stellt den Theodolit *auf die Steine selbst*, und setzt auch Signale, etwa wie unsere später folgende Fig. 4. und Fig. 6. § 96., auf die Steine. Damit bekommt man ausgezeichnete Resultate, sogar wenn man wegen geringer Steinoberfläche einen Theodolit der kleinsten Art anwenden muss.

Im Gegensatz zu dieser in Süddeutschland allgemein als gut geltenden Benützung vorhandener Steine als Polygon-Punkte, hat die preussische Anweisung IX. vom 25. Oktober 1881 (S. 18—19) den umgekehrten Satz ausgesprochen: „die gleichzeitige Benutzung von Grenzsteinen oder ähnlichen Marken als Polygon-Punkte ist im allgemeinen grundsätzlich zu vermeiden, damit das Polygon-Netz möglichst unabhängig von den mehr oder minder wandelbaren Grenzbezeichnungen erhalten wird.“

„Die Polygon-Punkte sind im Felde in dauerhafter Weise, und zwar möglichst *unterirdisch* zu vermarken“ (durch Drain-Röhren von 4,5^{cm} lichter Weite).

II. Polygon-Punkte in Städten.

Wir beginnen mit einer Mitteilung von *Berlin* („Zeitschr. f. Verm. 1881“, S. 18). Wegen der fortgesetzten Aufwühlungen des Bodens für Kanalisation, Gas- und Wasserleitung u. s. w. wurden die Vermessungs-Zeichen hauptsächlich auf die Bürgersteige gelegt, wie in folgenden Figuren angedeutet ist:

Fig. 1.
Geometrische Punktbezeichnungen in den Strassen von *Berlin*.

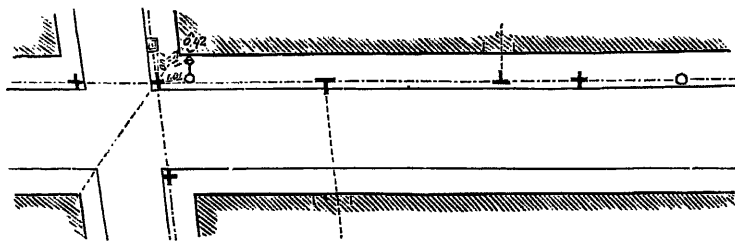



Fig. 2.
Erklärung der Zeichen von Fig. 1.

+ + Kreuze in Bordschwellen, Polygon-Punkte.

T ⊥ Anker in Bordschwellen, für die Stückvermessung.

O o Eisenbolzen 0,55^m lang, im Pflaster.

Von demselben Grundsatze, Freilassung der Strasse selbst, ging die *Karlsruher* Stadtvermessung aus, indem sie ebenfalls die Bordsteine der Bürgersteige zur Polygon-Punktbezeichnung wählte.

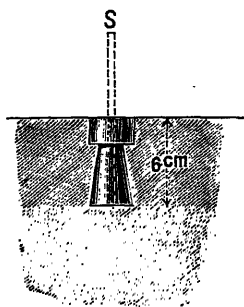
Fig. 3.
Karlsruher Stadt-Vermessung.
Polygon-Punkt *P*.

In nebenstehender Fig. 3. bezeichnet GRF das Eckhaus eines Blockes, mit der Spitze R. $ABCD$ ist der durch Bordsteine begrenzte Bürgersteig. Nun wird der Polygon-Punkt P auf der Verlängerung von AB und DC genommen, und zunächst für sich auf dem Pflaster durch ein eingehauenes + bezeichnet. Dies geschieht, wenn P auf einen Pflasterstein selbst fällt; fällt P in eine Fuge zwischen zwei Steinen, so wird ein eiserner Nagel von 10^{cm} Länge und 1^{cm} Dicke eingeschlagen.

Diese Bezeichnung des Polygon-Punktes P reicht während der Polygonmessung selbst aus; zur weiteren Bezeichnung hat man die eingehauenen Striche B und C, welche um eine *ganze* Meterzahl von P abstehen, z. B. $BP = CP = 4^m$, oder nach Umständen 3^m, 5^m u. s. w. Diese Masse sind natürlich aufgeschrieben, indessen da man die Verlängerung AB und DC geradezu sieht, so kann man hiernach und nach der Bestimmung $BP = CP =$ *ganze* Meterzahl, den Punkt P immer wieder sofort herstellen, wenn das Zeichen + auf dem Pflaster oder der eiserne Nagel zwischen dem Pflaster verloren sein sollte. Die Linie AB oder DC bezieht sich nicht auf die Kante der Bordsteine, sondern auf die Mittellinie der Bordsteine, damit das Auflegen der Messlatten längs AB oder DC möglichst bequem wird.

Mit *A* und *D* sind Punkte angedeutet, welche auf den Polygon-Seiten liegen (Kleinpunkte) und zum Anschluss der Stückvermessung dienen (vgl. Fig. 5. S. 309). (Weiteres über die Karlsruher Stadtvermessung s. „Zeitschr. f. Verm. 1887", S. 313—318.)

Nach diesem teilen wir einige von uns selbst gemachte Erfahrungen mit, betreffend die im Sommer 1887 von uns ausgeführte Triangulierung und Polygonisierung der Stadt Linden bei Hannover, deren Netze wir schon früher in § 73. S. 228 und Fig. 1. S. 305 mitgeteilt haben.

Fig. 4.

Nach dem Vorgang der soeben erwähnten Stadtvermessungen von Berlin und Karlsruhe hatten wir zuerst die Absicht, die Polygon-Punkt-Zeichen einfach auf den Bordquadern der Bürgersteige anzubringen, allein da Linden eine erst in der Entstehung begriffene Stadt ist, fanden sich nur wenige hierzu geeignete Quader vor. Die Bezeichnung geschah auf solchen Quadern nach Fig 4. durch eingegossene eiserne Bolzen. Diese Bolzen haben ein oben eingebohrtes Loch von 5^{mm} Durchmesser, welches nicht nur an und für sich eine scharfe Punktbestimmung giebt, sondern auch zum Anzielen auf 50^{m} bis 300^{m} Entfernung leicht und genau hergerichtet werden kann durch Einstecken eines Stiftes, wie in Fig. 4. angedeutet ist (nötigenfalls mit einem kleinen Blatt Papier).

Solche Bolzen wie Fig. 4. sind ferner angebracht worden auf Steinen, welche ursprünglich anderen Zwecken dienten, z. B. Strassen-Kilometersteinen, Nivellementssteinen u. s. w. und auf einer grösseren Zahl von Steinen, welche besonders zu diesem Zwecke gesetzt wurden.

An vorhandenen Merkmalen wurden auch die Hydranten der Wasserleitung ins Auge gefasst. Es wurde mitgeteilt, dass die Hydranten-*Kästen* nicht dauernd seien, wohl aber die darunter befindlichen prismatischen Schieberstangen. Solcher wurden mehrere als Polygon-Punkte genommen; indessen wurde gleich nach der Messung die Erfahrung gemacht, dass drei derselben von der Wasser-Behörde wieden verlegt werden mussten.

Diese Hydranten führten aber dazu, selbst solche eiserne Kappen zu setzen, und dadurch tiefer liegende Röhren zu bedecken. Damit gelangten wir zu der in Fig. 5. S. 313 angedeuteten Anordnung (welche Ähnlichkeit mit einer früher von Herrn *Gerke* in Altenburg in der „Zeitschr. f. Verm. 1887", S. 201 beschriebenen Einrichtung hat, jedoch weniger schwer ist).

Der geometrische Punkt ist bestimmt durch die Axe *A* einer versenkten schmiedeeisernen Röhre *R* von 30^{cm} Länge und 5^{cm} Durchmesser. (Solche Röhren wurden als ausgediente Sideröhren erhalten, ausgeglüht und mit Theer angestrichen.)

Die Röhre *R* ist mit einem Cement-Mantel *C* umgeben, und damit sie von oben zugänglich bleibt, durch einen gusseisernen Hydranten-Kasten *K* von 20^{cm} Tiefe und 9^{cm} lichter Weite überdeckt, mit Zwischenlage eines Holzstückes *H*; die lichte obere Weite, 9^{cm}, des etwas konisch gestalteten Kastens, beschränkt sich jedoch auf 7^{cm}, wegen des links oben angebrachten Zapfens *Z* zur Führung des Deckels *D*. Dadurch kommt auch die Axe *A* der Röhre gegen die Kastenmitte gewöhnlich etwas excentrisch zu liegen.

Das in der Mitte durchbohrte Holzbrett *H*, auf welches der Kasten zur Vermehrung der Standfestigkeit aufgenagelt ist, liegt auf dem Cement *C* nur lose auf, und die Röhre *R* ragt *nicht* in das Holz oder in den Kasten hinein, damit bei Weg-

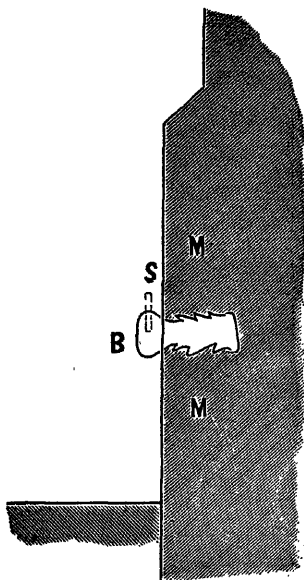
nahme der oberen Teile im Falle von Umpflasterung u. s. w. doch die Röhre selbst unverrückt bleibt.

Fig. 5.
Röhre mit Kappe. Massstab 1 : 10.

Mit Einrechnung der in das Polygon-Gebiet fallenden pothenotischen Punkte hatten wir für die Stadt Linden, deren Polygon-Netz bereits auf S. 305 mitgeteilt ist, folgendes:

Eiserne Bolzen Fig. 4. in Bordquadern und in solchen Steinen, welche schon vorher da waren	28
Eiserne Bolzen Fig. 4. in solchen Steinen, welche für die Vermessung besonders gesetzt wurden	33
Eiserne Röhren mit Kappen Fig. 5. . . .	54
Hydranten der Wasserleitung	8
Summa . . .	123

Mauerbolzen. Zur Versicherung für die *Zukunft* haben wir eine grosse Zahl von Mauerbolzen (etwa 70) nach Andeutung von Fig. 6. anbringen lassen, welche mit in das polygonometrische Netz aufgenommen wurden. Der Bolzen B ist in die Mauer M wie ein Nivellementsbolzen eingegossen, und unterscheidet sich von letzterem nur durch ein Loch zum Einstecken eines Stiftes S. Die nur 2—3^{mm} dicken Stifte S lassen sich mit dem Theodolit unmittelbar anzielen.

Fig. 6.
Polygon-Versicherungs-Mauerbolzen.

Es ist theoretisch klar, dass aus zwei solchen nach Coordinaten berechneten Mauerbolzen sich der alte in der Nähe befindlich gewesene Polygon-Punkt wieder herstellen lässt; hat man einen fernen trigonometrischen Punkt, z. B. Kirchturm u. s. w. sichtbar, so genügt sogar *ein* Versicherungs-Mauerbolzen, um entweder den ursprünglichen Polygon-Punkt oder einen anderen Coordinaten-Punkt wieder herzustellen. (Eine Strassenkreuzung mit Anordnung zweier Versicherungs-Mauerbolzen haben wir in der „Zeitschr. f. Verm. 1888", S. 8 gezeichnet.)

§ 95. Längen-Messung.

Nachdem das Wichtigste über Längenmessung bereits in § 8. – § 12. behandelt ist, haben wir hier nur einige Besonderheiten, namentlich in Bezug auf Stadt-Vermessungen vorzuführen, im Anschluss an die Vermessung von Linden (§ 93. Fig. 1. S. 305).

Die Polygon-Seiten wurden mit den gewöhnlichen, früher auf S. 15 und S. 21 beschriebenen süddeutschen fünf Meter-Latten gemessen. Die Linien sind meist nahezu horizontal, doch teilweise auch geneigt bis zu 4°; die Latten wurden überall der Neigung des Bodens entsprechend gelegt, und die Höhenwinkel dazu mit dem Theodolit bei der Horizontal-Winkelmessung gelegentlich mit abgelesen. Das genügt in den meisten Fällen, wo aber eine merkliche *Änderung* der Neigung auf die Erstreckung einer Seite zu erkennen war, wurden besondere Neigungs-Winkel mit dem auf S. 18. beschriebenen Neigungsmesser oder ähnlichen Freihand-Instrumenten genommen, oder sonst kleine Korrektionen angebracht (vgl. die nachfolgenden Fig. 1. und 2. S. 316).

Besondere Sorgfalt wurde auf die Vergleichung der Messlatten mit dem Normalmass verwendet, und zwar mit Benutzung des auf S. 21 beschriebenen Vergleichs-Apparates; mit welchem man die Vergleichungen leicht auf $0{,}1^{mm}$ genau erhält.

Die Vergleichung wurde meist für jeden Feldmess-Tag besonders gemacht, z. B.:

	Latte Nr. 5.	Latte Nr. 8.
15. Oktober 1887	$5^m + 4{,}20^{mm}$	$5^m + 2{,}17^{mm}$

Diese Mass-Vergleichungen und die Neigungswinkel zusammen geben für jede Strecke eine Reduktions-Berechnung, welche durch folgendes Beispiel veranschaulicht wird:

Gemessen von (52) nach (53), $l' = 142{,}579^m$ aufliegend.

		Neigungswinkel $\alpha = 1° \; 8'$
Messlatte Nr. 5.	$5^m + 4{,}20^{mm}$	$\log l' = 2.154\,056$
„ Nr. 8.	$5^m + 2{,}17^{mm}$	$\log \cos \alpha = 9.999\,915$
		$\log (1 + e) = 0.000\,276$
	$10^m + 6{,}37^{mm}$	$\log l = 2.154\,247$
	$(1 + e) = 1{,}000\,637$	$l = 142{,}642^m$

Jede Linie ist hin und her gemessen, meist mit denselben Latten und nach kurzer Zwischenzeit von denselben Arbeitern. Aus den dadurch erhaltenen Differenzen kann man den mittleren unregelmässigen Fehler der Längen-Messung bestimmen, wie folgender Auszug aus der Gesamt-Berechnungs-Tabelle zeigt:

Strecke	Messung 1 l_1	Messung 2 l_2	d	d^2	$\frac{d^2}{l}$
Falke — (1)	153,135^m	153,120^m	+ 15^{mm}	225	1,5
(1) — (2)	102,180	102,180	0	0	0,0
(2) — (3)	158,055	158,068	— 13	169	1,1
(3) — (4)	95,498	95,490	+ 8	64	0,7
(4) — (5)	154,862	154,870	— 8	64	0,4
(5) — (6)	94,400	94,408	— 8	64	0,7
(6) — Altenthor	81,764	81,763	+ 1	1	0,0
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
152 Strecken				Summa .	119,6

$$\text{Mittlere Differenz} = \sqrt{\frac{119,6}{152}} = 0,887^{mm}.$$

Dieses ist die mittlere Differenz zweier Messungen von 1^m. Der mittlere Fehler des Mittels zweier solcher Messungen ist $m = \pm\, 0,444^{mm}$, also der mittlere Fehler des Mittels aus zwei Messungen der Länge l:

$$m = 0,444 \sqrt{l}. \tag{1}$$

Damit ist Folgendes berechnet:

Länge l	Mittlerer Fehler m	Länge l	Mittlerer Fehler m
100^m	$\pm$ 4^{mm}	300^m	$\pm$ 0,008^m
150	$\pm$ 5	500	$\pm$ 0,010
200	$\pm$ 6	1000	$\pm$ 0,014

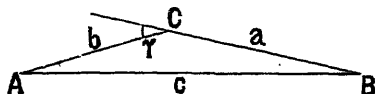
(2)

Einseitig wirkende Fehler, von welchen später in §. 98. die Rede sein wird, sind hier nicht berücksichtigt.

Vergleicht man hiemit die amtlichen Fehlergrenzen der Anweisung IX. vom 25. Oktober 1881, welche wir früher auf S. 27 citiert haben, so hat man z. B. für 100^m Länge die grösste zulässige Abweichung zweier Messungen, im günstigsten Falle $a = 0,21^m$; das entspricht dem mittleren Fehler einer Messung: $m = \pm\, 0,05^m$, während unsere obige Tabelle (2) für $l = 100^m$, nur $m = \pm\, 4^{mm}$, also nur etwa den zehnten Teil des vorigen $\pm\, 0,05^m$ beträgt. Dieses Verhältnis erklärt sich erstens dadurch, dass man auf harten Stadt-Wegen mit Latten viel genauer messen kann als im freien Felde, zweitens dadurch, dass in unserer Tabelle die Lattenfehler selbst nicht inbegriffen sind.

Messungs-Hindernisse.

Wenn eine Linie AB nicht unmittelbar gemessen werden kann, so besteht das nächste Hilfsmittel in der Anlage eines Dreiecks ACB, dessen Seiten a und b, nebst

Fig. 1.
Hilfsdreieck ACB.

dem eingeschlossenen Winkel γ gemessen werden können. Mag man nun alle Winkel des Dreiecks ABC, oder nur zwei oder nur einen gemessen haben, so ist die Rechnung immer einfach.

Im Falle von Fig 1. ist:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2\,ab\cos\gamma \tag{3}$$

Darnach kann man unmittelbar rechnen. Wenn aber γ klein ist, so ist es besser, so umzuformen:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2\,ab\left(1 - 2\sin^2\frac{\gamma}{2}\right) = (a+b)^2 - 4\,ab\sin^2\frac{\gamma}{2}.$$

Nun setzt man:

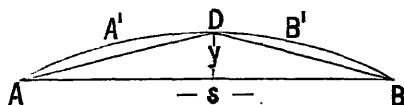
$$2\sqrt{ab}\,\sin\frac{\gamma}{2} = x \tag{4a}$$

Folglich ist:

$$c = \sqrt{(a+b+x)(a+b-x)} \tag{4}$$

Bei kleinem Winkel γ mag das die bequemste Rechnung sein.

Ein zweiter, oft vorkommender Fall ist in Fig 2. angedeutet.

Fig. 2.
Flaches Dreieck ADB
oder flacher Bogen $AA'DB'B$

Wenn neben einer schlecht zu messenden Geraden AB ein bequem zu messender Weg ADB in *geringem Abstand* y hinführt, so misst man lieber ADB, und reduciert es durch eine Näherungsformel auf AB.

Wir betrachten zwei Fälle, erstens zwei *Gerade* AD und DB mit einem Brechungspunkte D und zweitens einen *Bogen* $AA'DB'B$.

Für den ersten Fall hat man mit $AB = s$:

$$AD = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + y^2} = \frac{s}{2}\sqrt{1 + \frac{4y^2}{s^2}} = \frac{s}{2}\left(1 + \frac{2y^2}{s^2}\right) = \frac{s}{2} + \frac{y^2}{s}$$

folglich:

$$AD + DB - s = 2\,AD - s = 2\,\frac{y^2}{s} \tag{5}$$

Für den zweiten Fall, Bogen ADB, hat man unter Annahme eines (in Fig. 2. nicht eingeschriebenen) Centriwinkels α und Halbmessers r:

$$\text{Bogen } ADB = r\alpha$$

$$\text{Gerade } AB = s = 2r\sin\frac{\alpha}{2} = 2r\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^3}{48}\right)$$

$$\text{Bogen } ADB - s = r\,\frac{\alpha^3}{24}$$

Es ist aber:

$$\tan\frac{\alpha}{4} = \frac{2y}{s}\ ,\quad \alpha = \frac{8y}{s} + \ldots$$

$$r = \frac{s}{\alpha} + \ldots$$

folglich:

$$\text{Bogen } ADB - s = \frac{8}{3}\,\frac{y^2}{s} = 2{,}667\,\frac{y^2}{s} \tag{6}$$

Vergleicht man die beiden Formeln (5) und (6), so findet man nur verhältnismässig geringe Abweichung, und wenn man ferner bedenkt, dass es viele Fälle giebt, in welchen man gar nicht genau sagen kann, ob die Seitwärts-Abweichung eine Brechung oder ein Bogen war, so kann man für *kleine* Querabweichungen y wohl einen Mittelwert zwischen den Formeln (5) und (6) nehmen, d. h. für Fig. 2. allgemein annehmen:

$$\text{Geradstreckungs-Reduktion} = \frac{(1,5\, y)^2}{s} \qquad (7)$$

Diese Formel ist auch anzuwenden, wenn eine Linie in *vertikalem* Sinne einen Buckel oder eine Einbuchtung macht, und man nur die Neigung im ganzen gemessen hat. Es sei z. B. eine 200^m lange Linie über einen 1^m hohen Buckel gemessen, so wird die Reduktion nach (7):

$$= \frac{1,5^2}{200} = 0,011^m.$$

§ 96. Winkel-Messung.

Als Instrument zu Polygon-Zügen nimmt man gewöhnlich ein einfaches Nonien-Instrument, etwa nach S. 141 oder S. 142. (Unsere mehrfach erwähnte Lindener Polygonisierung ist mit dem Instrument S. 142 gemacht.)

Ein Höhenkreis an dem Theodolit ist angenehm, weil man die Neigungen für schiefe aufliegende Längen-Messungen gelegentlich damit ablesen kann.

Das Feldschreibbuch kann nach S. 210—211 eingerichtet sein; *ein* Satz von Winkeln ist oft genügend, es empfiehlt sich aber aus manchen Gründen, *zwei* unabhängige Sätze zu messen.

Die willkürliche Limbus-Stellung kann man in zweierlei Art bequem wählen: Erstens kann man immer die Ablesung links (vorhergehender Punkt) nahezu auf 0° 0′ 0″ bzw. auf 180° 0′ 0″ stellen und damit das Ausrechnen der Winkel bequemer machen, man kann auch förmlich zweimal *repetieren* (vgl. S. 180), von 0° 0′ 0″ anfangend, und hat dann etwa:

0° 0′ 0″	179° 59′ 50″	
148° 50′ 40″		
Durchschlagen		
297° 41′ 20″	17° 41′ 0″	
297° 41′ 20″	297° 41′ 10″	297° 41′ 15″
		β = 148° 50′ 37,5″

Andererseits kann man die Willkürlichkeit der Limbus-Stellung dadurch ausnützen, dass man immer nahezu *auf Azimute* stellt.

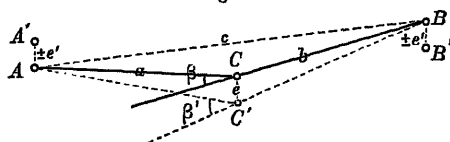
Man schreibt sich zu diesem Zweck den trigonometrischen Abriss des Ausgangspunktes in das Feldschreibbuch und orientiert hiernach; auf jedem folgenden Punkte stellt man auf die vorhergehende Ablesung etwa 1′ genau ein.

Diese kleine Mühe lohnt sich nachher reichlich in der Übersichtlichkeit aller Tabellen, namentlich wenn viele Nebenstrahlen zu Anschlüssen, Versicherungen u. s. w. vorkommen, denn man hat dann immer sofort im Feldbuche Azimute auf einige Minuten genau.

In dieser Weise haben wir die Lindener Polygonisierung gemacht.

Alles Weitere, was sich auf Winkel-Messung bezieht, ist von der Frage der Centrierung und Signalisierung beeinflusst, denn bei den kurzen Zielweiten (in Städten manchmal weniger als 50^m) wirken Centrierungsfehler sehr schädlich.

Wir betrachten in Fig. 1. zuerst den Fall eines nahezu *geradlinig* gestreckten Zuges.

Fig. 1.

Es seien A, C, B drei Punkte eines gestreckten Zuges, C der Theodolit-Standpunkt, A und B die Signale; dann hat man ausser dem reinen Theodolit-Winkelmessungs-Fehler noch drei Excentricitäts-Einflüsse in Rechnung zu nehmen:

1) Excentricität e des Theodolits, quer zur Zugsrichtung gemessen,
2) Excentricität e' des Signals A, quer zur Zugsrichtung gemessen,
3) Excentricität e' des Signals B, quer zur Zugsrichtung gemessen.

Diese drei Excentricitäten geben nach Andeutung der Figur folgende Winkel-Fehler:

$$1)\quad \beta' - \beta = CAC' + CBC' = \frac{e}{a}\,\varrho + \frac{e}{b}\,\varrho = \frac{a+b}{ab}\,e\,\varrho \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 2) & ACA' = \dfrac{e'}{a}\,\varrho \\ 3) & BCB' = \dfrac{e'}{b}\,\varrho \end{array}\right\} \tag{2}$$

Diese drei Teile sind unabhängig, und verbinden sich mit dem reinen Winkel-Messungsfehler μ zu dem mittleren Fehlerquadrat eines Winkels für den *gestreckten* Zug:

$$m^2 = \mu^2 + \left(\frac{a+b}{ab}\,e\,\varrho\right)^2 + \left(\frac{e'}{a}\,\varrho\right)^2 + \left(\frac{e'}{b}\,\varrho\right)^2 \tag{3}$$

Wenn der Zug *nicht* nahezu gerade gestreckt ist, d. h. wenn β in Fig. 1. nicht sehr klein ist, wie bei der Herleitung der Formel (1) angenommen wurde, wenn vielmehr β einen beliebigen Wert hat, so denken wir uns um die drei Punkte A, B und C einen Kreis beschrieben, und zählen die Excentricität e im Punkte C rechtwinklig (radial) zu diesem Kreise, indem eine Excentricität tangential zu dem Kreise ebenso unschädlich ist, wie bei dem geradlinigen Zug eine Excentricität in der Zugrichtung selbst.

Den Winkelfehler $\beta' - \beta$, welcher in dem Dreieck ABC durch eine radiale Excentricität e erzeugt wird, haben wir früher schon aus anderer Veranlassung, in Band I. § 103., entwickelt, und dort in Gleichung (11) S. 306 gefunden:

$$dp = -\frac{AP \,.\, BP}{AB}\,d\varphi$$

Setzt man die dort gültigen Bezeichnungen in die jetzt gebrauchten Bezeichnungen um, so ist:

$$dp = \pm e \quad , \quad d\varphi = \frac{\beta' - \beta}{\varrho} \quad , \quad AP = a \quad , \quad BP = b \quad , \quad AB = c \; ,$$

also nun:

$$\pm e = \frac{ab}{c}\,\frac{(\beta' - \beta)}{\varrho}, \qquad \text{oder} \qquad \beta' - \beta = \frac{c}{ab}\,e\,\varrho \tag{4}$$

Dieses $(\beta' - \beta)$ tritt in das zweite Glied von (3) ein, und man hat daher das mittlere Fehler-Quadrat eines Winkels in einem beliebig gebrochenen Zug:

$$m^2 = \mu^2 + \left(\frac{c}{ab}\,e\,\varrho\right)^2 + \left(\frac{e'}{a}\,\varrho\right)^2 + \left(\frac{e'}{b}\,\varrho\right)^2 \tag{5}$$

Setzt man hier $e' = e$, so wird:

$$m^2 = \mu^2 + (e\,\varrho)^2 \frac{c^2 + b^2 + a^2}{a^2\,b^2} \text{*)} \qquad (6)$$

Wenn man in (5) wieder $c = a + b$ setzt, d. h. wenn man wieder einen geradlinig gestreckten Zug annimmt, so geht (5) wieder in (3) über, wie es sein soll.

Wir wollen von der allgemeinen Formel (5) oder (6) hier keinen weiteren Gebrauch machen, sondern zu der Formel (3) für den gestreckten Zug zurückkehren, und dafür eine kleine Tabelle berechnen, mit den Annahmen:

mittlerer reiner Winkel-Messungsfehler $\mu = \pm 10''$
mittlere Theodolit-Excentricität $e = \pm 5^{mm}$
" Signal-Excentricität $e' = \pm 10^{mm}$

Diese Annahmen 5^{mm} und 10^{mm} Excentricität sind ziemlich grob, und etwa in Feld und Wald, nicht bei Stadtmessungen denkbar.

Damit wurde folgendes Täfelchen zur Übersicht berechnet:

Mittlerer Polygon-Winkelfehler m nach der Formel (3)
mit $\mu = \pm 10''$, $e = \pm 5^{mm}$, $e' = \pm 10^{mm}$

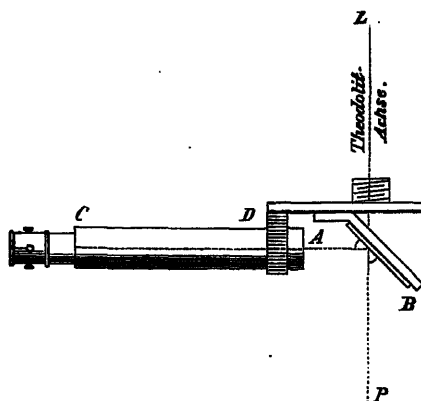
a oder b	50^m	100^m	200^m	300^m	∞
50^m	1′ 12″	1′ 04″	51″	49″	47″
100^m	1′ 04″	37″	29″	28″	25″
200^m	51″	29″	20″	18″	15″
300^m	49″	28″	18″	16″	13″
∞	47″	25″	15″	13″	10″

Man kann daran denken, nach diesem Gesetze *Winkelgewichte* zu berechnen, und die Verteilung des Azimut-Widerspruchs auf die einzelnen Winkel eines Zuges entsprechend ungleich zu machen. Das könnte man aber nur für ganz besondere gut bekannte Verhältnisse einrichten.

Die Hauptsache war für uns, durch den Anblick der vorstehenden Fehler-Tabelle vor Nachlässigkeit im Centrieren zu warnen.

Ablotung. Das gewöhnliche Abloten mit Schnur-Lot ist eine der unangenehmsten Verrichtungen wegen Schwankens im Winde u. s. w.

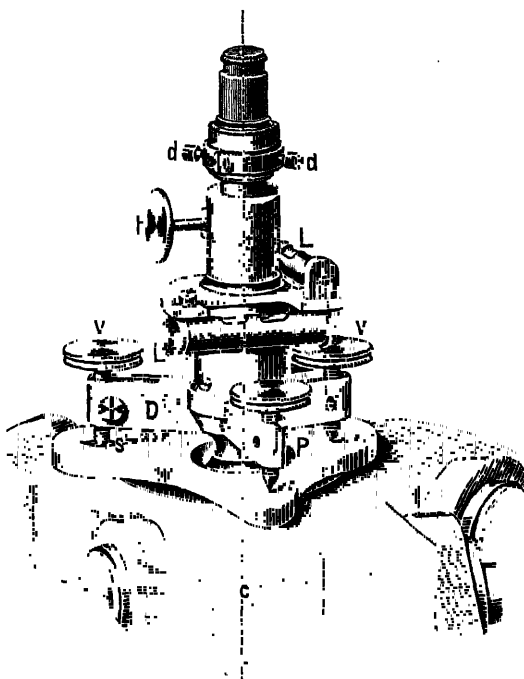
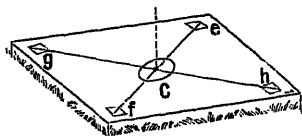
Unser erster Versuch eines optischen Abloters, mit einem unter dem Theodolit schief unter 45° angebrachten Spiegel mit Diopter oder Fernröhrchen, ist in Fig. 2. angedeutet.

Fig. 2.
Spiegel AB unter dem Theodolit.

(Karlsruher Sammlung.)

*) Diese Formel wurde zuerst von *Helmert* in anderer Weise entwickelt und mitgeteilt in der „Zeitschr. f. Verm. 1877“, S. 115.

Dieses Instrumentchen leidet aber an Umständlichkeit der Prüfung und Berichtigung (welche in der vorigen Auflage dieses Buches 1877, S. 230—231, angegeben war).

Ein optischer Abloter, mit vertikalem Fernröhrchen, wurde von *Nagel* in der Zeitschrift „Civilingenieur" Jahrgang 1886, Heft 3., Tafel XIV., und in der „Zeitschr. f. Verm. 1888", Heft 2., beschrieben, wovon wir die nachstehende Fig. 3. entnehmen:

Fig. 3.
Ablote- und Centrier-Vorrichtung.

(Mechaniker *Hildebrand*.)

Wir haben auch unsere nachher zu besprechenden Signale Fig. 5. S. 321 zum optischen Abloten einrichten lassen, indem statt des vertikalen cylindrischen Stabes $E' E C$ ein Fernröhrchen oder auch nur ein vertikales Diopter eingesetzt wird, welches so gerichtet sein muss, dass es genügend genau vertikal zielt, wenn die Dosen-Libelle L einspielt.

Indessen ist bei unseren Theodolit-Polygon-Zügen das genaue Abloten an sich nicht ebenso wichtig, wie das centrische *Umsetzen* des Theodolits und der Signale, zu welchen wir nun übergehen.

Umsetzen des Theodolits und der Signale.

Das Umsetzen des Theodolits und der angezielten Zeichen ist bei Theodolit-Zügen deswegen noch wichtiger, als das Abloten, weil ein Fehler von einigen Millimetern, im Abloten allein, sich nicht fortpflanzt, dagegen ein Fehler im Umsetzen gerade so wie ein Winkel-Messungsfehler wirkt, der sich in ungünstigster Weise fortpflanzt bzw. vergrössert (vgl. den späteren § 98.).

Fig. 4.
Stativ-Signal.
(Massstab etwa 1 : 0000.)
Höhe = 40 cm.

(Hannov. Samml.; Mech. *Randhagen.*)

Zur Verminderung der Umsetz-Fehler haben wir die Anwendung von *drei Stativen* mit den in Fig. 4. und Fig. 5. gezeichneten Signalen und Fusslagern am besten gefunden.

Das Stativ-Signal Fig. 4., welches mit einem Theodolit abwechselnd auf *demselben* Stativ gebraucht wird, besteht aus einem Dreifuss A mit drei Stellschrauben B, welche entweder auf Unterlagsplättchen D, oder auf einem besonderen Fusslager Fig. 5. aufstehen.

In dem Dreifuss Fig. 4. steckt centrisch und vertikal eine Eisenstange CEE', welche mit C auf einen beliebigen Punkt centriert werden kann, und mit ihrem oberen, in der Dicke abnehmenden Ende E' zum Anzielen auf verschiedene Entfernungen dient. Zum Vertikalstellen dient eine Dosen-Libelle L. (Statt dieser cylindrischen Stange EC kann auch ein Diopter oder ein Fernröhrchen zum optischen Abloten wie bei Fig. 3. S. 320 eingesteckt werden, wie schon im Vorhergehenden bemerkt worden ist.)

Fig. 5.
Fusslager des Stativ-Signals und des Theodolits.
Doppelter Massstab von Fig. 4.

(Hannov. Sammlung; Mechaniker *Randhagen.*)

Hat man einen Theodolit und zwei Signale (Fig. 4.) mit *gleich* weiten Fussspitzen, so kann man den Theodolit und die Signale unmittelbar auf dem Stativ selbst oder auf den Unterlagsplättchen D (Fig. 4.) umsetzen.

Wenn dagegen der Theodolit und die Signale *verschiedene* Fussschrauben-Weite haben, so dient statt der Scheibchen D in Fig. 4. das Fusslager Fig. 5., welches drei unter Winkeln von 120° auslaufende scharfe Rinnen darbietet, in welche die Stativ- bzw. Signal-Spitzen ein-

gesetzt werden, ähnlich wie z. B. die Stativplatten zuweilen mit solchen dreistrahligen Rinnen ausgerüstet sind.

Man denke sich nun das aus Messing gegossene dreizackige Stück ABC (Fig. 5.) auf eine hölzerne Stativplatte mit rundem Loch von etwa 10^{cm} Durchmesser gelegt. Dann hat man bei der Aufstellung des Statives selbst, einen guten Spielraum von 5^{cm}. Steht das Stativ, so wird mit gewöhnlichem Lot oder durch ein an Stelle der Stange CE gestecktes Visierrohr abgelotet. Ist dieses geschehen, so werden bei SSS drei Schraubenspitzen, welche bisher hochgestellt waren, hinabgeschraubt, dass sie sich in das Holz der Stativplatte eindrücken lassen, und damit die ganze Platte während des Messens und Umsetzens genau in ihrer Lage erhalten.

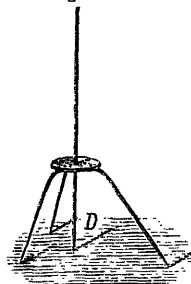
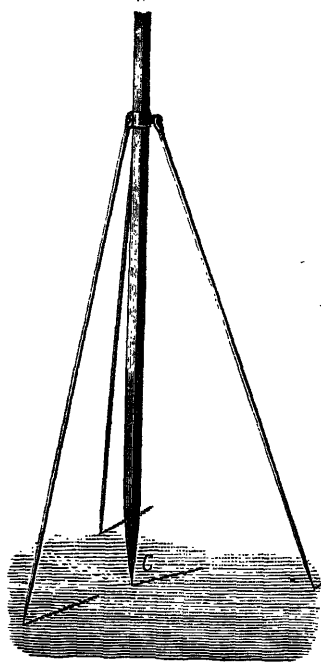



Fig. 6.

A B C D E
S T S'

Fig. 7.

(Hannov. Sammlung.)

Das Aufstellen der Stative mit den Fusslagern (Fig. 5.) besorgt ein Gehilfe des Polygonometers; derselbe kann dem Winkelmessenden stets 1—2 Stationen voraus sein, weshalb häufig sogar *vier* Stative gleichzeitig gebraucht werden können.

Die Messung eines Zuges $ABCDE$ (Fig. 6.) geschieht nun so: Man nimmt mindestens *drei* Stative von möglichst gleicher Konstruktion der Oberplatten, auf welche sowohl der Theodolit als auch zwei Signale (Fig. 4. S. 321) abwechselnd gestellt werden können. In Fig. 6. seien die drei Stative auf den Punkten ABC centrisch aufgestellt. Auf dem Stativ über B steht der Theodolit, auf den Stativen über A und C stehen die Signale Fig. 4. Mit dem Theodolit T misst man nach den gut vertikal gestellten Signalstäbchen EE'. Nach der Messung in B bleiben die zwei Stative über B und C stehen, und das Stativ über A wird von dort nach D gebracht. Der Theodolit wandert von dem Stativ B auf das Stativ C, und die Stative über B und D werden wieder mit den zwei Signalen besetzt.

Fig. 8.

Hannov. Sammlung.)

Mit diesem Verfahren haben wir einen mittleren Polygon-Winkelfehler von $\pm 15''$ erhalten (vgl. § 98.), während die Winkel-Messung an sich, in zwei Sätzen, einen mittleren Fehler von etwa $\pm 10''$ hat.

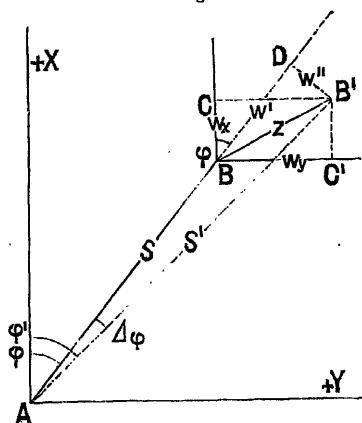
Zum Schluss wollen wir noch in Fig. 7. und Fig. 8. zwei einfache Geräte vorführen, welche man bei Winkel-Messungen in Städten, auf festem Pflaster u. s. w., brauchen kann.

Fig. 7. ist ein ganz einfaches, $25—30^{cm}$ hohes Gestell zum Bezeichnen von Boden-Punkten D zur Winkel-Messung auf kürzere Entfernung.

Fig. 8. zeigt einen vom Schlosser gefertigten eisernen Dreifuss zum Festhalten einer gewöhnlichen Bake lotrecht über einem Punkte C auf Pflaster oder sonstigem hartem Boden.

§ 97. Längenfehler und Querfehler.

Wenn ein nahezu geradlinig gestreckter Zug zwischen den zwei Punkten A und B Fig. 1. gelegt ist, und, in Folge der Messungsfehler, von A ausgehend statt in den richtigen Punkt B, in den falschen Punkt B' ausmündet, so stellt der Abstand $BB' = z$ den Abschlussfehler nach Grösse und Richtung vor.

Fig. 1.

Man kann diesen Schlussfehler z in zweifacher Weise in Componenten zerlegen:

1) Projicierung auf die Coordinaten-Axen-Richtungen giebt:

$$BC = w_x \quad , \quad BC' = w_y \qquad (1)$$

2) Projicierung auf die Gerade AB giebt:

$$BD = w' \quad , \quad B'D = w'' \qquad (2)$$

Wir führen weiter die Azimute φ , φ' und die Längen S , S' der Linien AB und AB' ein, bezeichnen mit x_a, y_a , x_b, y_b die festgegebenen Coordinaten der Punkte A und B, mit $[s \sin \alpha]$ und $[s \cos \alpha]$ die in der Coordinaten-Berechnung des Zuges AB' auftretenden Projektions-Summen, so bestehen die Gleichungen:

$$[s \sin \alpha] - (y_b - y_a) = w_y \quad , \quad [s \cos \alpha] - (x_b - x_a) = w_x \qquad (3)$$

$$tang\, \varphi = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \quad , \quad S = \frac{y_b - y_a}{\sin \varphi} = \frac{x_b - x_a}{\cos \varphi} \qquad (4)$$

$$tang\, \varphi' = \frac{[s \sin \alpha]}{[s \cos \alpha]} \quad , \quad S' = \frac{[s \sin \alpha]}{\sin \varphi'} = \frac{[s \cos \alpha]}{\cos \varphi'} \qquad (5)$$

$$w' = S' - S \quad , \quad w'' = \frac{\Delta \varphi}{\varrho} S \text{ oder } = \frac{\Delta \varphi}{\varrho} S' \qquad (6)$$

Die zwei letzten Gleichungen (6) gelten nur genähert, aber hinreichend genau.

Durch diese Gleichungen (1) bis (6) sind alle Fehlerbeziehungen, mit denen wir uns beschäftigen wollen, bestimmt; allein es ist manchmal erwünscht, die Beziehungen zwischen w_x , w_y einerseits und w' , w'' andererseits, auf kürzerem Wege zu haben, als durch die Gleichungen (4) und (5). Diesen kürzeren Weg erhält man durch Coordinaten-Umformung nach § 61. S. 195. Wir haben dort, wenn $a = 0$ und $b = 0$ ist, die zwei Gleichungen angegeben:

$$y = x' \sin \varepsilon + y' \cos \varepsilon \quad , \quad x = x' \cos \varepsilon - y' \sin \varepsilon \qquad (7)$$

Diese zwei Gleichungen kann man auf Fig. 1. anwenden mit den Bezeichnungen φ statt ε, w_x, w_y statt x, y und w', w'' statt x', y'; wir haben daher:

$$w_y = w' \sin \varphi + w'' \cos \varphi \quad , \quad w_x = w' \cos \varphi - w'' \sin \varphi \qquad (8)$$

Diese zwei Gleichungen kann man auch nach w' und w'' auflösen, und dann hat man:

$$w' = w_y \sin \varphi + w_x \cos \varphi \quad , \quad w'' = w_y \cos \varphi - w_x \sin \varphi \qquad (9)$$

Statt $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$ kann man hier auch nach (4) die Seite S mit den Coordinaten-Differenzen $y_b - y_a$ und $x_b - x_a$ einführen, oder man kann auch (um auf die

Formeln und Bezeichnungen der Anweisung IX. überzugehen) für diesen Zweck eben so genau setzen:

$$\sin\varphi = \frac{[\varDelta y]}{S} \quad , \quad \cos\varphi = \frac{[\varDelta x]}{S}$$

und damit geht (9) über in:

$$w' = \frac{w_y[\varDelta y] + w_x[\varDelta x]}{S} \quad , \quad w'' = \frac{w_y[\varDelta x] - w_x[\varDelta y]}{S} \tag{10}$$

Wir wollen auch noch den Quotienten q zwischen der polygonometrischen Entfernung $AB' = S'$ und der trigonometrischen Entfernung $AB = S$ einführen, d. h.:

$$q = \frac{S'}{S} \text{ also } q - 1 = \frac{S' - S}{S} = \frac{w'}{S} \tag{11}$$

Mit (10) giebt dieses:

$$q - 1 = \frac{w_y[\varDelta y] + w_x[\varDelta x]}{S^2} \tag{12}$$

und wenn wir auch den in Fig. 1. mit $\varDelta\varphi$ eingeschriebenen Verdrehungswinkel $\varphi' - \varphi$ ähnlich ausdrücken, so haben wir:

$$\varDelta\varphi = \frac{w''}{S}\varrho = \frac{w_y[\varDelta x] - w_x[\varDelta y]}{S^2}\varrho \tag{13}$$

Wenn man noch $S^2 = [\varDelta y]^2 + [\varDelta x]^2$ setzt, so bekommt man:

$$q - 1 = \frac{w_y[\varDelta y] + w_x[\varDelta x]}{[\varDelta y]^2 + [\varDelta x]^2} \quad , \quad \varDelta\varphi = \frac{w_y[\varDelta x] - w_x[\varDelta y]}{[\varDelta y]^2 + [\varDelta x]^2}\varrho \tag{14*)}$$

Ob man geradezu nach den Formeln (4), (5) und (6), oder nach den Differentialformeln (10), (12), (13) oder (14) rechnen will, hängt von Umständen und vom Gutdünken ab.

Wenn man die Azimute φ, φ' und die Entfernungen S, S' ohnehin haben muss, was oft vorkommt, dann bieten die scheinbar numerisch kürzeren Differential-Berechnungen nach (10), (12), (13) oder (14), keinen Vorteil gegen (4), (5) und (6).

Zur Probe mag es sich empfehlen, nach beiden Arten zu rechnen.

Beispielshalber nehmen wir von unserem Zuge § 91. S. 298—299:

$$\begin{array}{lr@{\qquad}lr}
[s\sin\alpha] = & +775{,}39 & [s\cos\alpha] = & +688{,}49 \\
(y_b - y_a) = & +775{,}65 & (x_b - x_a) = & +688{,}89 \\
\hline
w_y = & -0{,}26 & w_x = & -0{,}40
\end{array}$$

Damit berechnet man:

$$\left.\begin{array}{lr@{\qquad}lr}
\varphi' = & 48^\circ\ 23'\ 50'' & S' = & 1036{,}940^m \\
\varphi = & 48\ \ 23\ \ 25 & S' = & 1037{,}402^m \\
\hline
\varphi' - \varphi = & +25'' & S' - S = & -0{,}462^m \\
\frac{\varphi' - \varphi}{\varrho}S = & +0{,}126 = w'' & & -0{,}462 = w'
\end{array}\right\} \tag{15}$$

Dasselbe bekommt man auch durch die Formeln (9) oder (10).

---

*) Diese Formeln (14) sind im Wesentlichen dieselben, wie die Formeln für $q - 1$ und φ, welche auf dem Coordinaten-Berechnungsformular 19. der Anweisung IX. vom 25. Oktober 1881, rechts oben in Anmerkung stehen; nur ist dort φ, mit Weglassung von ϱ, in analytischem Masse gerechnet.

Graphische Bestimmung von w' und w''. Wenn man für einen Zug eine Zeichnung nach Fig. 1. in *richtigen Verhältnissen* aufträgt, wobei jedoch die Entfernungen S und S', wenn man sie überhaupt mit aufnimmt, in viel kleinerem Massstab als die Widersprüche w aufgetragen werden, so kann man bei gegebenen w_x und w_y, die zugehörigen w' und w'' aus der Zeichnung entnehmen.

Als ein grösseres Beispiel von Berechnungen nach den oben entwickelten Formeln (3)—(6) u. s. w. geben wir in der folgenden Tabelle die Züge der Lindener Stadt-Vermessung Fig. 1. § 93. S. 305:

Zug Nr.	S	S'	$S'-S$	$\frac{S'-S}{S}$	$\varphi'-\varphi$	$\frac{\varphi'-\varphi}{\varrho} S$
1	825,84^m	825,63^m	— 0,21^m	— 0,00025	+ 24″	+ 0,10
2	612,03	611,97	— 0,06	— 0,00010	+ 2	+ 0,01
3	807,43	807,29	— 0,14	— 0,00017	— 18	— 0,07
4	547,31	547,21	— 0,10	— 0,00018	+ 10	+ 0,03
5	679,10	678,88	— 0,22	— 0,00032	— 4	— 0,01
6	562,12	562,00	— 0,12	— 0,00021	+ 15	+ 0,04
8	575,65	575,51	— 0,14	— 0,00024	+ 31	+ 0,09
9	480,40	480,22	— 0,18	— 0,00037	+ 5	+ 0,01
10	474,71	474,59	— 0,12	— 0,00025	— 2	— 0,00
11	1047,17	1047,00	— 0,17	— 0,00016	— 19	— 0,10
13	923,07	922,96	— 0,11	— 0,00012	+ 75 (?)	+ 0,34
14	838,75	938,56	— 0,19	— 0,00020	— 38	— 0,17
15	643,76	643,57	— 0,19	— 0,00029	— 6	— 0,02
16	743,92	743,73	— 0,19	— 0,00026	— 1	— 0,00
17	554,62	554,54	— 0,08	— 0,00014	+ 6	+ 0,02
18	653,30	653,16	— 0,14	— 0,00022	— 12	— 0,04
19	1057,65	1057,57	— 0,08	— 0,00007	— 3	— 0,02
20	528,34	528,27	— 0,07	— 0,00013	+ 6	+ 0,02
21	524,81	524,70	— 0,11	— 0,00021	+ 43	+ 0,11
22	432,84	432,61	— 0,23	— 0,00053	— 16	— 0,03
23	174,62	174,56	— 0,06	— 0,00034	+ 31	+ 0,02
24	325,98	325,94	— 0,04	— 0,00012	+ 14	+ 0,02
25	156,28	156,26	— 0,02	— 0,00013	+ 49	+ 0,04
26	1092,52	1092,49	— 0,03	— 0,00003	— 33	— 0,17
Sa. 24	15362,22^m	15359,22^m	— 3,00^m	— 0,00504	± 463	± 1,48

$$\text{Mittel} \quad \frac{-3{,}00}{15361} = -0{,}00019 \qquad \begin{matrix} -0{,}00021 \\ \pm 0{,}00002 \end{matrix} \qquad \pm 19'' \qquad \pm 0{,}06^m$$

$$\text{Gesamtmittel} \; -0{,}00020 \tag{16}$$

Wir wollen von dieser Tabelle zuerst den weniger wichtigen Teil erledigen, nämlich die Verdrehungen $\varphi'-\varphi$ mit dem Mittelwert $\pm 19''$ und die Querkorrektionen mit dem Mittelwert $\pm 0{,}06^m$.

Diese Werte sind befriedigend, sowohl nach Grösse als nach Vorzeichenwechsel.

Viel mehr Interesse bieten die Längenfehler $S' - S$, welche alle in gleichem Sinne auftreten und im Mittel rund $-0{,}00020$ oder $0{,}20^m$ auf 1000^m ausmachen. Da unsere trigonometrische Basis schlechthin *vorläufig* war, wie wir schon zu Anfang, § 73. S. 229, angegeben haben, können wir daran denken, nicht unsere Züge nach dem trigonometrischen Netze zu korrigieren, sondern die Basis unseres Netzes zu verbessern, d. h. jetzt anzunehmen, (nach 16):

$$\text{Basis} = 2392{,}456\,(1 - 0{,}00020) = 2391{,}98^m \tag{17}$$

Dieser Wert wurde in der „Zeitschr. f. Verm. 1888", S. 18 veröffentlicht; inzwischen sind die Neumessungen der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme verfügbar geworden, und nach diesen ist:

$$\text{Basis} = 2391{,}67^m \tag{18}$$

Dieses ist nur um $0{,}31^m$ kleiner als unser lediglich aus den Polygonzügen abgeleiteter Wert 2391,98 nach (17).

Betrachtet man die Differenz $0{,}31^m$ als einseitig wirkenden Fehler unserer Längen-Messungen (§ 95. S. 315), so macht das, relativ gerechnet, einen einseitig positiven Fehler von $0{,}13^m$ auf 1000^m, was sehr wahrscheinlich ist.

Wenn die Differenzen $S' - S$ oder $\frac{S' - S}{S}$ in einer Vermessuug zweifellos nach *einer* Seite (+ oder —) hin neigen, was bei genauer Behandlung fast immer der Fall sein wird, so bringt man an den Längen-Messungen eine entsprechende konstante Verhältnis-Korrektion (logarithmisch) an.

§ 98. Fehler-Gesetze der Zugmessung.

Nachdem in den vorhergehenden § 95. und § 96. die Längen-Messungen und Winkel-Messungen für sich behandelt worden sind, können wir die wichtigsten Gesetze über die *Zusammenwirkung* der Einzelfehler in der Zugmessung behandeln.

Wenn der mittlere Winkelfehler (einschliesslich Excentricitäts-Einflüssen) in allen Punkten eines Zuges als gleich angenommen wird, etwa $= \pm \varepsilon$, so ist bei n Winkel-Punkten, der Schlussfehler w die Zusammenwirkung von n Einzelfehlern:

$$w = \pm \varepsilon \pm \varepsilon \pm \varepsilon + \ldots .$$

$$w^2 = \varepsilon^2 + \varepsilon^2 + \varepsilon^2 + \ldots = n\,\varepsilon^2$$

$$w = \varepsilon \sqrt{n} \tag{1}$$

Wenn eine grössere Zahl von gemessenen Zügen und die Abschlussfehler w derselben vorliegen, so erhält man aus jedem Zug einen Wert ε^2, nämlich nach (1):

$$\varepsilon_1^2 = \frac{w_1^2}{n_1} \qquad \varepsilon_2^2 = \frac{w_2^2}{n_2} \qquad \varepsilon_3^2 = \frac{w_3^2}{n_3} \ldots .$$

Wenn die Anzahl der verfügbaren Züge $= z$ ist, so wird der Mittelwert von ε:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{z}\left(\frac{w_1^2}{n_1} + \frac{w_2^2}{n_2} + \frac{w_3^2}{n_3} + \ldots\right)} \tag{2}$$

Wir wenden diese Formel auf die Hauptzüge des Lindener Netzes Fig. 1. § 93. S. 305 an, d. h. auf diejenigen der dort gezeichneten Züge, welche unmittelbar zwischen trigonometrischen Punkten liegen (die Punkte (10), (62) und (20) gelten als „heruntergebrachte" Punkte wie trigonometrische Punkte). So wurde folgende Tabelle von 14 Zügen erhalten:

Nr.	Zug von — bis	n	w	$\frac{w^2}{n}$
1	Falke—Altenthor	8	+ 51″	325
2	Altenthor—(10)	5	+ 22	97
3	Falke—(20)	9	+ 17	32
4	(20)—Victoria	8	— 21	55
5	Köterholz—Küchengarten	7	— 48	329
6	Küchengarten—Falke	7	+ 22	69
7	Falke—(12)—Falke	5	+ 23	106
8	Köterholz—Limmerbrücke	4	— 47	552
9	Victoria -Köterholz	3	+ 21	147
10	Victoria—Küchengarten	5	+ 41	336
11	(62)—Hamelnstrasse	3	— 14	65
12	Hamelnstrasse—Altenthor	5	— 49	480
13	Altenthor—Bahnhof	8	+ 13	21
14	Victoria—Davenstedt. Str.	11	— 67	408
				3022

$$\text{Mittlerer Winkelfehler: } \varepsilon = \sqrt{\frac{3022}{14}} = \pm 15'' \tag{3}$$

Dieser Wert ist sehr klein, die Genauigkeit wurde hauptsächlich durch die in § 96. S. 321 beschriebenen Signal- und Umsetz-Vorrichtungen erreicht (vgl. S. 322).

Im allgemeinen ist die Polygon-Winkel-Genauigkeit in der Praxis bei gewöhnlicher Feldmessung geringer, nämlich der mittlere Winkelfehler etwa $\pm 30''$ bis $\pm 1'$.

Die Anweisung IX. vom 25. Oktober 1881, S. 22, § 39. 3., deren höchste zulässige Abschlussfehler wir bereits in § 91. S. 300 angegeben haben, setzt:

$$\textit{Grenz}\text{wert } w_{max} = 1{,}5' \sqrt{n} \tag{4}$$

was einem *mittleren* Winkelfehler von etwa 30″ entspricht.

Wenn man nun weiter nach den Punktverschiebungen in einem Zuge fragt, so hat man sich zuerst über das Wesen der *ungünstigen Winkelfehler-Fortpflanzung* Rechenschaft zu geben, welche in einem solchen Polygon-Zug stattfindet.

Wir beschränken jedoch unsere Betrachtung im Anschluss an Fig. 1. auf einen nahezu geradlinig gestreckten gleichseitigen Zug.

In diesem Falle sind die Längenfehler und die Winkelfehler von einander unabhängig, denn die Längenfehler erzeugen nur Verschiebungen in der Hauptrichtung des Zuges, und die Winkelfehler erzeugen nur Verschiebungen quer zur Zugrichtung.

Über die Verteilung der Längenfehler in einem geradlinigen Zuge haben wir bereits früher in § 12. S. 29 bis 30, alles gesagt, was hierüber theoretisch zu sagen ist.

Fig. 1.

Wir beschäftigen uns nun mit den Querverschiebungen, und betrachten in Fig. 1. einen Zug, welcher von einem

festen Punkte A mit gleichlangen Seiten s sich nahezu geradlinig nach B, $C \ldots G$ erstreckt.

Wenn in irgend einem Punkte C ein Winkelfehler ε stattfindet, so wird dadurch der ganze folgende Teil C, $D \ldots G$ des Zuges um den Winkel ε verdreht, d. h. wenn C der dritte Punkt von Anfang an ist, so ist:

$$q = GG' = (n-2)\, s\, \varepsilon \tag{5}$$

Nach diesem Gesetz hat man folgende Fehler-Häufung:

Winkelfehler ε	im Punkte	A	giebt:	q_0	$= \pm\, n s \varepsilon$
„	„	B	„	q_1	$= \pm\, (n-1)\, s \varepsilon$
„	„	C	„	q_2	$= \pm\, (n-2)\, s \varepsilon$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
„	„	E	„	q_{n-2}	$= \pm\, 2\, s \varepsilon$
„	„	F	„	q_{n-1}	$= \pm\, 1\, s \varepsilon$

Die Zusammenwirkung aller dieser Fehler giebt den mittleren Querfehler:

$$m_q = \sqrt{(n s \varepsilon)^2 + ((n-1)\, s \varepsilon)^2 + \ldots (2 s \varepsilon)^2 + (s \varepsilon)^2}$$

$$m_q = s\, \varepsilon \sqrt{n^2 + (n-1)^2 + \ldots 2^2 + 1^2}$$

Nach der Theorie der Reihen*) lässt sich die Summe der Quadrate in geschlossener Form darstellen, nämlich:

$$\left. \begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \ldots (n-1)^2 + n^2 &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \\ \text{also:} \quad m_q &= s\, \varepsilon \sqrt{\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}} \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

Dieser Ausdruck zeigt deutlich, wie rasch die Querabweichung wächst. Wir wollen eine Seitenlänge $s = 150^m$ und einen mittleren Winkelfehler $\varepsilon = \pm 30''$ annehmen (in der Formel $\varepsilon = 30'' : \varrho''$). Damit berechnet man für verschiedene Werte n folgendes:

Zahl der Seiten n	Länge des Zuges $L = ns$	Mittlere Querabweichung m_q
5	750^m	$\pm\, 0{,}16^m$
10	1500	$\pm\, 0{,}43$
15	2250	$\pm\, 0{,}77$
20	3000	$\pm\, 1{,}17$

(7)

Wenn n eine einigermassen grosse Zahl ist, so kann man in der Formel (6) eine sehr gute Näherung einführen. Man kann dann n^2 und n gegen n^3 vernachlässigen, und hat damit:

$$m_q = s\, \varepsilon \sqrt{\frac{n^3}{3}} \tag{8}$$

Weiter setzt man nun nach Fig. 1.:

$$n = \frac{L}{s} \tag{9}$$

*) Im folgenden § 99. wird in Gleichung (19) und (20) diese Summierung näher betrachtet werden.

und damit wird (8):

$$m_q = \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{L^3}{s}} = 0,577\,\varepsilon\sqrt{\frac{L^3}{s}} \tag{10}$$

Wir haben daraus in Worten den wichtigen Satz:

Die mittlere Querabweichung m_q eines langen Polygon-Zuges wächst proportional der $1^1/_2$-Potenz der Gesamtlänge L und ist *umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Streckenlänge* s.

Aus dem letzteren folgt, dass bei Theodolit-Zügen die Seiten s möglichst *lang* genommen werden sollen.

Im Gegensatz hiezu steht der Bussolen-Zug (und die Nivellierung), welcher, wie wir später sehen werden, das Fehler-Gesetz hat:

$$m_q = \varepsilon'\sqrt{L\,s} \tag{11}$$

d. h. bei einem Bussolen-Zug wächst die mittlere Querabweichung proportional der Quadratwurzel der Streckenlänge s, und deswegen sollen die Seiten s beim Bussolen-Zug möglichst *klein* gemacht werden.

Dagegen ist der mittlere Richtungsfehler ε' in (11) bei einem Bussolen-Zug viel grösser als der mittlere Winkelfehler ε in (10) bei einem Theodolitzug, nämlich etwa $\varepsilon' = \pm 0,1^\circ = \pm 6'$, während für den Theodolit, wie wir gesehen haben, nur etwa $\varepsilon' = \pm 30''$, d. h. der *zwölfte Teil* von ε' anzunehmen ist.

Man kann daher die Vergleichung beider Arten von Zügen so fassen:

Der *Theodolit-Zug* ist im einzelnen sehr genau, hat aber eine ungünstige Fehler-Fortpflanzung, und soll deswegen möglichst lange Seiten s (bis 300^m) haben.

Der *Bussolen-Zug* ist im Einzelnen ungenau, hat aber eine sehr günstige, auf weite Entfernungen brauchbare Fehler-Fortpflanzung, und soll möglichst kleine Seiten s (20^m bis 50^m) haben.

Man kann diese Verhältnisse noch anschaulicher machen, wenn man die beiden Gleichungen (10) und (11) durch Kurven darstellt.

Die Verteilung eines Winkelsummen-Widerspruches w auf die Brechungswinkel haben wir schon in dem Zahlen-Beispiel von § 91. S. 298 ohne Theorie erledigt, indem wir den Widerspruch w *gleichförmig* verteilten.

Will man diesen Fall theoretisch behandeln, so wird man auf dieselben Formeln geführt, welche wir schon früher zur Ausgleichung von Längenmessungen in § 12. S. 29—30, aufgestellt haben.

Wir betrachten einen Zug von n Winkelpunkten in zwei Teilen, so dass $n = n_1 + n_2$ ist. Dann lässt sich das Azimut der Strecke, welche zwischen dem $n_1$ten und dem $(n_1 + 1)$ten Winkelpunkt liegt, in zweifacher Weise ableiten:

1) Vom Anfangspunkt her über n_1 gemessene Brechungswinkel β, deren mittlere Fehler $= \varepsilon$ ist, also mit dem mittleren Fehler $\varepsilon\sqrt{n_1}$ oder mit dem Gewicht $p_1 = \frac{1}{n_1}$.

2) Vom Endpunkt her über n_2 gemessene Brechungswinkel, entsprechend mit dem mittleren Fehler $\varepsilon\sqrt{n_2}$ oder mit dem Gewicht $p_2 = \frac{1}{n_2}$.

Die Summe $[\beta]$ der gemessenen Brechungswinkel soll gegen die Azimute einen Widerspruch w geben, man hat also wieder die Aufgabe von § 12. S. 29, und man kann die dort entwickelten Formeln auf den neuen Fall anwenden, wenn man an Stell

von l und l' bzw. n_1 und n_2 schreibt, und auch L durch $n_1 + n_2$ ersetzt. Auf diese Weise giebt uns die frühere Formel für M auf S. 30:

$$M = \frac{w}{n_1 + n_2} \sqrt{n_1 n_2} \tag{12}$$

M bedeutet jetzt das ausgeglichene Azimut der Strecke, welche zwischen den zwei Brechungspunkten n_1 und $n_1 + 1$ liegt.

Der mittlere Fehler eines ausgeglichenen Azimutes ist somit am grössten in der Mitte des Zuges, woselbst $n = n'$ ist, und erreicht dort seinen Maximalwert $M_{max} = \frac{w}{2}$.

Weil hiernach die ausgeglichenen Azimute an verschiedenen Stellen des Zuges sehr *verschieden* genau sind, darf ein Theodolit-Zug zum Zweck der Ausgleichung nicht als ein starres Ganzes *gedreht* werden, sondern er muss *gebogen* werden. Weiteres hierüber giebt die Theorie des folgenden § 99.

§ 99. Fehlertheorie des gestreckten gleichseitigen Zuges.

Fig. 1.

Wir betrachten in Fig. 1. einen Zug von nahezu geradliniger Erstreckung von gleich langen Seiten, mit n Brechungspunkten, also mit $n - 1$ Seiten von der Länge s.

Die nahezu geradlinige Erstreckung ist so aufzufassen, dass alle Brechungswinkel so nahe $= 180°$ sind, dass auch die Azimute alle nahezu gleich bleiben, und indem die Haupt-Zugs-Richtung als X-Axe genommen wird, sollen die Azimute α sämtlich so klein sein, dass in den Genauigkeitsberechnungen $\sin\alpha = \alpha$ und $\cos\alpha = 1$ gesetzt werden kann.

Da hiernach die Brechungswinkel nach gewöhnlicher Zählung alle nahezu $= 180°$ sind, stellen wir, um stets mit *kleinen* Winkeln zu thun zu haben, nur die Differenzen gegen 180° in Rechnung, und bezeichnen dieselben mit $\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n$, wo jedes β positiv oder negativ gezählt sei, je nachdem der neue Strahl von der Verlängerung des vorhergehenden Strahls nach rechts oder nach links abweicht.

Bei diesen Annahmen wird die Ausgleichung der Längenmessungsfehler von der Ausgleichung der Winkelmessungsfehler unabhängig.

Wir behandeln daher im Folgenden nur die Ausgleichung der Winkelmessungsfehler, für welche zwei Bedingungsgleichungen bestehen: 1) die Azimutprobe, 2) die Ordinatenprobe.

Die Azimute α selbst setzen sich aus den Brechungswinkeln nach der angenommenen Zählweise der letzteren so zusammen:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 &= \beta_1 \\
\alpha_2 &= \beta_1 + \beta_2 \\
\alpha_3 &= \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_{n-1} &= \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots\ldots\ \beta_{n-1}
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

hieraus bildet man die Summe:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots \alpha_{n-1} = (n-1)\beta_1 + (n-2)\beta_2 + (n-3)\beta_3 + \ldots + 2\beta_{n-2} + \beta_{n-1} \quad (2)$$

Die erste Bedingungsgleichung heisst:

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots \quad + \beta_{n-1} + \beta_n + \ldots + w = 0 \quad (3)^{*)}$$

wo w der in der Azimutprobe zu Tage tretende Gesamtwinkel-Widerspruch ist. Dieser Widerspruch soll durch Zufügung der Korrektionen δ zu den Winkeln β getilgt werden, woraus folgt:

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots \quad \delta_{n-1} + \delta_n - w = 0 \quad (4)$$

Die zweite Bedingungsgleichung heisst zunächst:

$$s \sin \alpha_1 + s \sin \alpha_2 + s \sin \alpha_3 + \ldots \quad s \sin \alpha_{n-1} + \ldots + w' = 0 \quad (5)^{*)}$$

wo w' der beim Durchrechnen der Coordinaten mit den *unverbesserten* Winkeln β, bzw. mit den *unverbesserten* Azimuten α, zu Tage tretende Ordinatenwiderspruch ist.

(Dieser reine Ordinatenfehler w' tritt bei den praktischen Rechnungen meist gar nicht auf, weil man fast immer die Coordinatenrechnung mit den bereits nach (4) *ausgeglichenen* Winkeln und Azimuten ausführt.)

Der Widerspruch w' in (5) soll durch die Verbesserungen $\delta\alpha$ der Azimute getilgt werden, d. h.:

$$s \sin(\alpha_1 + \delta\alpha_1) + s \sin(\alpha_2 + \delta\alpha_2) + \ldots + s \sin(\alpha_{n-1} + \delta\alpha_{n-1}) + \ldots = 0$$

oder

$$s(\sin \alpha_1 + \delta\alpha_1 \cos \alpha_1) + s(\sin \alpha_2 + \delta\alpha_2 \cos \alpha_2) + \ldots \quad + \ldots = 0$$

Da der gemachten Annahme zufolge überall $\cos \alpha = 1$ gesetzt werden kann, so folgt aus der Verbindung vorstehender Gleichung mit der Gleichung (5):

$$s\,\delta\alpha_1 + s\,\delta\alpha_2 + s\,\delta\alpha_3 + \ldots \quad + s\,\delta\alpha_{n-1} - w' = 0 \quad (6)$$

Die Azimutfehler $\delta\alpha$ setzen sich aus den Fehlern δ der Brechungswinkel β nach Gleichung (1) zusammen:

$$\left.\begin{array}{l} \delta\alpha_1 = \delta_1 \\ \delta\alpha_2 = \delta_1 + \delta_2 \\ \delta\alpha_3 = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta\alpha_{n-1} = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots + \delta_{n-1} \end{array}\right\} \quad (7)$$

$$\left.\begin{array}{l} \delta\alpha_1 + \delta\alpha_2 + \delta\alpha_3 + \ldots \quad \delta\alpha_{n-1} = (n-1)\delta_1 + (n-2)\delta_2 + (n-3)\delta_3 + \ldots \\ \qquad 2\delta_{n-2} + \delta_{n-1} \end{array}\right\} \quad (8)$$

Aus (6) und (8) ergiebt sich die auf die Messungsfehler δ bezogene Ordinaten-Bedingungsgleichung:

$$s[(n-1)\delta_1 + (n-2)\delta_2 + (n-3)\delta_3 + \ldots \quad + 2\delta_{n-2} + \delta_{n-1}] - w' = 0 \quad (9)$$

Die Gleichungen (4) und (9) enthalten die beiden unabhängigen Bedingungen unserer Aufgabe für Richtungs- und Ordinaten-Abschluss beim Durchrechnendes Zuges.

Es wäre aber nicht nützlich, auf diese beiden Bedingungsgleichungen (4) und (9) sofort die Ausgleichung zu gründen, weil die Gleichung (9) nicht symmetrisch ist Man kann es erreichen, dass das Glied $[a\,b]$ der später aufzustellenden Normalgleichungen gleich Null wird, wenn man die Gleichung (9) symmetrisch macht; und ein zweiter Vorteil wird dadurch in Bezug auf den Ordinatenwiderspruch w' erreicht werden.

---

*) Vgl. hiezu S. 343 und S. 344; die Absolutglieder w haben jedoch auf S. 331 und S. 343 verschiedene Vorzeichen.

Diese Symmetrischmachung besteht darin, dass man zu (9) die mit $s\,\frac{n-1}{2}$ multiplizierte Gleichung (4) hinzufügt, und subtrahiert, dieses giebt:

$$\left.\begin{aligned} s\left(\frac{n-1}{2}\delta_1 + \frac{n-3}{2}\delta_2 + \frac{n-5}{2}\delta_3 + \ldots - \frac{n-5}{2}\delta_{n-2} - \frac{n-3}{2}\delta_{n-1}\right. \\ \left. - \frac{n-1}{2}\delta_n\right) - \left(w' - s\,\frac{n-1}{2}\,w\right) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Die Mittelglieder, welche hier nur durch ... angedeutet sind, gestalten sich verschieden, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist; wir werden nachher darauf zurückkommen. Vor Allem interessiert uns aber das Absolutglied der Gleichung (10). Dieses Absolutglied ist nichts Anderes, als der Ordinaten-Widerspruch w'', welcher nach erstmaliger Verbesserung der Brechungswinkel β (vgl. (3) und (4)) sich einstellt.

Um dieses zu beweisen, und um zugleich die übrige dadurch bedingte Ausgleichung vorzubereiten, zerlegen wir jede Winkelverbesserung in zwei Teile:

$$\delta = u + v \quad (11)$$

wo u derjenige Teil ist, welcher nur von der Summengleichung (3) oder (4) gefordert wird, und v derjenige Teil, welcher der Ordinatenprobe entspricht; d. h. man hat nach (4):

$$u_1 = u_2 = u_3 = \ldots \qquad u_n = \frac{1}{n}\,w \quad (12)$$

und wenn man nun in (9), $\delta_1 = u_1 + v_1$, $\delta_2 = u_2 + v_2 \ldots$ einsetzt, erhält man:

$$\left.\begin{aligned} s\left((n-1)\frac{w}{n} + (n-1)\,v_1 + (n-2)\frac{w}{n} + (n-2)\,v_2 + \ldots\right. \\ \left. + 2\frac{w}{n} + 2\,v_{n-2} + \frac{w}{n} + v_{n-1}\right) - w' = 0. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Die Glieder mit w zusammengefasst geben:

$$s\,\frac{w}{n}\,[(n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1] = s\,\frac{w}{n}\,n\,\frac{n-1}{2} = s\,\frac{n-1}{2}\,w$$

und damit wird (13):

$$s\,[(n-1)\,v_1 + (n-2)\,v_2 + \ldots + 2\,v_{n-2} + v_{n-1}] - \left(w' - s\,\frac{n-1}{2}\,w\right) = 0 \quad (14)$$

Damit ist die auf das Absolutglied von (10) bezügliche Behauptung bewiesen, denn nach erstmaliger Verbesserung der Brechungswinkel um die Beträge u, bleibt eine auf die Restkorrektionen v bezogene Bedingungsgleichung (14) übrig, welche dasselbe Absolutglied hat wie (10). Nennen wir dieses Absolutglied nun w'' (dasselbe, welches bei dem üblichen praktischen Polygon-Berechnungsverfahren allein auftritt), so haben wir in (4) und (10) zwei unabhängige Bedingungsgleichungen, welche nach der Correlatenmethode weiter behandelt werden können. Zur Übersicht schreiben wir diese zwei Bedingungsgleichungen nochmals zusammen:

$$\text{a)}\quad \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \ldots + \delta_{n-2} + \delta_{n-1} + \delta_n - w = 0 \quad (4^*)$$

$$\left.\begin{aligned} \text{b)}\quad s\,\frac{n-1}{2}\,\delta_1 + s\,\frac{n-3}{2}\,\delta_2 + s\,\frac{n-5}{2}\,\delta_3 + \ldots - s\,\frac{n-5}{2}\,\delta_{n-2} - s\,\frac{n-3}{\delta}\,\delta_{n-1} \\ - s\,\frac{n-1}{2}\,\delta_n - w'' = 0 \end{aligned}\right\} \quad (10^*)$$

Denkt man, die Coëfficienten dieser beiden Gleichungen seien beziehungsweise $a_1\, a_2\, a_3 \ldots$ und $b_1\, b_2\, b_3 \ldots$, dann hat man bekanntlich die beiden Normalgleichungen zu bilden:

$$[a\,a]\,k_1 + [a\,b]\,k_2 - w = 0$$
$$[a\,b]\,k_1 + [b\,b]\,k_2 - w'' = 0$$

Da aber in unserem Falle $[a\,b] = 0$ wird, so reduzieren sich die Normalgleichungen auf:

$$\left.\begin{aligned}[a\,a]\,k_1 - w &= 0\\ [b\,b]\,k_2 - w'' &= 0\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Hat man hieraus k_1 und k_2 bestimmt, so wird:

$$\left.\begin{aligned}\delta_1 &= u_1 + v_1 = a_1\,k_1 + b_1\,k_2\\ \delta_2 &= u_2 + v_2 = a_2\,k_1 + b_2\,k_2\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

und wenn es sich nach der Ausgleichung darum handelt, das Gewicht P einer Funktion zu bestimmen, welche sei:

$$F = f_1\,\beta_1 + f_2\,\beta_2 + f_3\,\beta_3 + \ldots \qquad (17)$$

so hat man nach Band I. § 42. S. 104 dafür zunächst die allgemeine Formel:

$$\frac{1}{P} = [ff] - \left\{\frac{[a\,f]^2}{[a\,a]} + \frac{[b\,f\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]}\right\}$$

welche jedoch in unserem Falle, wegen $[a\,b] = 0$, sich reduziert auf:

$$\frac{1}{P} = [ff] - \left\{\frac{[af]^2}{[a\,a]} + \frac{[b\,f]^2}{[b\,b]}\right\} \qquad (18)$$

Zur weiteren Ausführung dieser Formeln ist es nötig, die gerade oder ungerade Zahl n der Brechungspunkte als besondere Fälle zu unterscheiden, es dient deswegen zur Verdeutlichung, zuerst zwei besondere Fälle, $n = 7$ und $n = 6$, zu behandeln.

Erster besonderer Fall $n = 7$.

Die Bedingungsgleichungen (4*) und (10*) werden:

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 + \delta_6 + \delta_7 - w = 0$$
$$3\,s\,\delta_1 + 2\,s\,\delta_2 + s\,\delta_3 \;\ldots\; - s\,\delta_5 - 2\,s\,\delta_6 - 3\,s\,\delta_7 - w'' = 0$$

Die Coëfficienten der Normalgleichungen (15) werden:

$$[a\,a] = 1^2 + 1^2 + \ldots = 7$$
$$[b\,b] = 2\,(3^2 + 2^2 + 1^2)\,s^2 = 28\,s^2$$

Die Korrelaten: $\qquad k_1 = +\dfrac{w}{7} \qquad k_2 = +\dfrac{w''}{28\,s^2} \qquad (19)$

Die Winkel-Verbesserungen:	Die Azimut-Verbesserungen:
$\delta_1 = u_1 + v_1 = \frac{w}{7} + \frac{3}{28}\frac{w''}{s}$	$\delta\,\alpha_1 = \frac{w}{7} + \frac{3}{28}\frac{w''}{s}$
$\delta_2 = u_2 + v_2 = \frac{w}{7} + \frac{2}{28}\frac{w''}{s}$	$\delta\,\alpha_2 = 2\,\frac{w}{7} + \frac{5}{28}\frac{w''}{s}$
$\delta_3 = u_3 + v_3 = \frac{w}{7} + \frac{1}{28}\frac{w''}{s}$	$\delta\,\alpha_3 = 3\,\frac{w}{7} + \frac{6}{28}\frac{w''}{s}$
$\delta_4 = u_4 + v_4 = \frac{w}{7}$	$\delta\,\alpha_4 = 4\,\frac{w}{7} + \frac{6}{28}\frac{w''}{s}$
$\delta_5 = u_5 + v_5 = \frac{w}{7} - \frac{1}{28}\frac{w''}{s}$	$\delta\,\alpha_5 = 5\,\frac{w}{7} + \frac{5}{28}\frac{w''}{s}$
$\delta_6 = u_6 + v_6 = \frac{w}{7} - \frac{2}{28}\frac{w''}{s}$	$\delta\,\alpha_6 = 6\,\frac{w}{7} + \frac{3}{28}\frac{w''}{s}$
$\delta_7 = u_7 + v_7 = \frac{w}{7} - \frac{3}{28}\frac{w''}{s}$	$\delta\,\alpha_7 = 7\,\frac{w}{7} + 0$

(20)

Die Funktion F, deren Gewicht nach der Ausgleichung bestimmt werden soll, sei die Ordinate des mittelsten, vierten Punktes, d. h. nach (17):

$$F = s \sin \alpha_1 + s \sin \alpha_2 + s \sin \alpha_3$$
$$dF = s\,\delta\alpha_1 + s\,\delta\alpha_2 + s\,\delta\alpha_3$$

oder, wenn man nach (7) die Azimutfehler $\delta\alpha$ in den Winkelfehler δ ausdrückt:

$$dF = s\,\delta_1 + s(\delta_1 + \delta_2) + s(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)$$
$$= 3s\,\delta_1 + 2s\,\delta_2 + s\,\delta_3$$

Damit hat man folgendes Coëfficienten-System:

$$\begin{array}{llll} f_1 = 3s & f_2 = 2s & f_3 = 1s & [ff] = 14s^2 \\ a_1 = 1 & a_2 = 1 & a_3 = 1 & [af] = 6s \\ b_1 = 3s & b_2 = 2s & b_3 = 1s & [bf] = 14s^2 \end{array}$$

Damit wird nach (18):

$$\frac{1}{P} = 14s^2 - \left\{\frac{36s^2}{7} + \frac{196s^4}{28s^2}\right\} = (14 - 12{,}14)s^2 = 1{,}86\,s^2 \tag{21}$$

und der mittlere Fehler der Funktion F wird:

$$M = \varepsilon\sqrt{\frac{1}{P}} = \varepsilon s\sqrt{1{,}86} = 1{,}36\,\varepsilon s \tag{22}$$

wo ε der mittlere Winkel-Messungsfehler ist.

Zweiter besonderer Fall $n = 6$.

Die Bedingungsgleichungen (4*) und (10*) werden:

$$\text{a)}\quad \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 + \delta_6 - w = 0$$
$$\text{b)}\quad \frac{5}{2}s\,\delta_1 + \frac{3}{2}s\,\delta_2 + \frac{1}{2}s\,\delta_3 - \frac{1}{2}s\,\delta_4 - \frac{3}{2}s\,\delta_5 - \frac{5}{2}s\,\delta_6 - w'' = 0$$

Die Normalgleichungs-Coëfficienten werden:

$$[aa] = 1^2 + 1^2 + \ldots = 6$$
$$[bb] = \left(\frac{5}{2}s\right)^2 + \left(\frac{3}{2}s\right)^2 + \ldots = \frac{70}{4}s^2$$

Die Korrelaten: $k_1 = +\frac{w}{6}$ $\qquad k_2 = +\frac{2w''}{35s^2}$

Die Winkel-Verbesserungen: Die Azimut-Verbesserungen:

$$\left.\begin{array}{ll} \delta_1 = u_1 + v_1 = \frac{w}{6} + \frac{5}{35}\frac{w''}{s} & \delta\alpha_1 = \frac{w}{6} + \frac{5}{35}\frac{w''}{s} \\ \delta_2 = u_2 + v_2 = \frac{w}{6} + \frac{3}{35}\frac{w''}{s} & \delta\alpha_2 = \frac{2w}{6} + \frac{8}{35}\frac{w''}{s} \\ \delta_3 = u_3 + v_3 = \frac{w}{6} + \frac{1}{35}\frac{w''}{s} & \delta\alpha_3 = \frac{3w}{6} + \frac{9}{35}\frac{w''}{s} \\ \delta_4 = u_4 + v_4 = \frac{w}{6} - \frac{1}{35}\frac{w''}{s} & \delta\alpha_4 = \frac{4w}{6} + \frac{8}{35}\frac{w''}{s} \\ \delta_5 = u_5 + v_5 = \frac{w}{6} - \frac{3}{35}\frac{w''}{s} & \delta\alpha_5 = \frac{5w}{6} + \frac{5}{35}\frac{w''}{s} \\ \delta_6 = u_6 + v_6 = \frac{w}{6} - \frac{5}{35}\frac{w''}{s} & \delta\alpha_6 = w \end{array}\right\} \tag{23}$$

Die Funktion F sei die Ordinate des dritten Punktes, also:

$$F = s \sin \alpha_1 + s \sin \alpha_2$$

$$d F = s\, d\alpha_1 + s\, d\alpha_2 = s\,(\delta_1) + s\,(\delta_1 + \delta_2) = 2\, s\, \delta_1 + s\, \delta_2$$

also:

$$f_1 = 2\, s \qquad f_2 = s \qquad f_3 = 0 \qquad [f f] = 5\, s^2$$

$$a_1 = 1 \qquad a_2 = 1 \qquad [a f] = 3\, s$$

$$b = \frac{5}{2}\, s \qquad b_2 = \frac{3}{2}\, s \qquad [b f] = \frac{13}{2}\, s^2$$

$$\frac{1}{P} = 5\, s^2 - \left\{\frac{(3\, s)^2}{6} + \frac{(13\, s^2)^2}{70\, s^2}\right\} = 5\, s^2 - (1{,}5 + 2{,}414)\, s^2$$

$$\frac{1}{P} = (5 - 3{,}914)\, s^2 = 1{,}086\, s^2$$

$$M = 1{,}042\, \varepsilon\, s \tag{24}$$

Um zum allgemeinen Fall überzugehen, brauchen wir die Summenformel für arithmetische höhere Reihen.

Es seien y , Δy , $\Delta^2 y$ die Glieder einer solchen Reihe, und S die Summen, wie folgendes Schema andeutet:

0			
	y_1		
S_1		Δy_1	
	y_2		$\Delta^2 y_1$
S_2		Δy_2	
	y_3		$\Delta^2 y_2$
S_3		Δy_3	
	y_4		
S_4			

dann ist die Summe S_r der r Glieder $S_r = y_1 + y_2 + y_3 + \ldots y_r$ ausgedrückt durch:

$$S_r = \frac{r}{1}\, y_1 + \frac{r}{1}\,\frac{r-1}{2}\,\Delta y_1 + \frac{r}{1}\,\frac{r-1}{2}\,\frac{r-2}{3}\,\Delta^2 y_1 + \ldots \tag{25}$$

Wendet man diese Formel z. B. auf die Quadratzahlen an, welche eine Reihe der zweiten Ordnung geben, so hat man:

$$y_1 = 1 \quad , \quad \Delta y_1 = 3 \quad , \quad \Delta^2 y_1 = 2$$

und damit giebt die Formel (25):

$$S_r = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots r^2 = \frac{r}{6}\,(1 + 3 r + 2 r^2) \tag{26}$$

Setzt man hier $r = \frac{n-1}{2}$, so erhält man für ungerades n:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 = \frac{n}{24}\,(n-1)\,(n+1) \tag{27}$$

ferner berechnet man unmittelbar noch (25):

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \ldots \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 = \frac{n}{24}\,(n-1)\,(n+1) \tag{28}$$

Zur Bildung von $[bf]$ für gerades n wird erforderlich sein:

$$\left.\begin{array}{lcccccc}
f = & \frac{n-2}{2}s\ , & \frac{n-4}{2}s\ , & 4s\ , & 3s\ , & 2s\ , & s \\
b = & \frac{n-1}{2}s\ , & \frac{n-3}{2}s\ , & \frac{9}{2}s\ , & \frac{7}{2}s\ , & \frac{5}{2}s\ , & \frac{3}{2}s \\
bf & \ldots & \ldots & \frac{36}{2}s^2\ , & \frac{21}{2}s^2\ , & \frac{10}{2}s^2\ , & \frac{3}{2}s^2 \\
\Delta y & \ldots & \ldots & \ldots\ \frac{15}{2}s^2\ , & \frac{11}{2}s^2\ , & \frac{7}{2}s^2 & \\
\Delta^2 y & \ldots & \ldots & \ldots & \frac{4}{2}s^2\ , & \frac{4}{2}s^2 &
\end{array}\right\} \quad (29)$$

Die Anwendung der Formel (25) giebt in diesem Fall:

$$\text{für } n \text{ ungerade:} \quad [bf] = \frac{n}{24}\left(n+\frac{1}{2}\right)(n-2)\,s^2 \qquad (30)$$

Die Summe einer arithmetischen Reihe erster Ordnung, deren erstes Glied y_1, letztes Glied y_n und Gliederzahl r ist, wird gegeben durch die Formel:

$$S = (y_1 + y_n)\,\frac{r}{2} \qquad (31)$$

Nach dieser Vorbereitung kann zur allgemeinen Aufstellung der Normalgleichungen (15) und der Gewichtsformel (18) geschritten werden:

Erster allgemeiner Fall, n ungerade.

$$\left.\begin{array}{l}
[aa] = n \\
[bb] = 2\left\{1^2 + 2^2 + \ldots \left(\frac{n-1}{2}\right)^2\right\} s^2 = \frac{n}{12}(n-1)(n+1)\,s^2
\end{array}\right\} \qquad (31a)$$

Wenn die Funktion F sich auf die Ordinate des Mittelpunktes bezieht, so wird:

$$\begin{array}{llllll}
f_1 = \frac{n-1}{2}s\ , & f_2 = \frac{n-3}{2}s\ , & \ldots\ldots & 2s\ , & s \\
a_1 = 1\ , & a_2 = 1 & \ldots\ldots\ldots & 1\ , & 1\ . \\
b_1 = \frac{n-1}{2}s\ , & b_2 = \frac{n-3}{2}s\ , & \ldots\ldots & 2s\ , & s
\end{array}$$

$$[ff] = \frac{n}{24}(n-1)(n+1)\,s^2$$

$$[af] = \frac{(n+1)(n-1)}{8}\,s$$

$$[bf] = \frac{n}{24}(n-1)(n+1)\,s^2$$

$$\frac{1}{P} = \frac{n}{24}(n-1)(n+1)\,s^2 - \left(\frac{(n+1)^2(n-1)^2}{64\,n} + \frac{n}{48}(n-1)(n+1)\right)s^2 \qquad (32)$$

Zweiter allgemeiner Fall, n gerade.

$$\left.\begin{array}{l}
[aa] = n \\
[bb] = 2\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \ldots \left(\frac{n-1}{2}\right)^2\right\} s^2 = \frac{n}{12}(n-1)(n+1)\,s^2
\end{array}\right\} \qquad (32a)$$

Da in der Zugmitte selbst kein Brechungspunkt ist, so soll die Funktion F sich auf den Punkt unmittelbar diesseits oder jenseits der Zugmitte beziehen (z B. bei $n = 6$ auf den dritten Punkt), dann ist:

$$f_1 = \frac{n-1}{2} s \quad , \quad f_2 = \frac{n-4}{2} s \quad , \quad \ldots . \quad 2s \quad , \quad s$$

$$a_1 = \quad 1 \quad , \quad a_2 = \quad 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1 \quad , \quad 1$$

$$b_1 = \frac{n \quad 1}{2} s \quad , \quad b_2 = \frac{n-3}{2} s \quad , \quad \ldots . \quad \frac{5}{2} s \quad , \quad \frac{3}{2} s$$

$$[ff] = \frac{n}{24} (n-1)(n-2) s^2$$

$$[af] = n \frac{n-2}{8} s$$

$$[bf] = \frac{n}{24} \left(n + \frac{1}{2}\right) (n-2) s^2$$

$$\frac{1}{P} = \frac{n}{24} (n-1)(n-2) s^2 - \left(\frac{n(n-2)^2}{64} + \frac{n}{48} \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 (n-2)^2}{(n+1)(n-1)} \right) s^2 \qquad (33)$$

Wenn n eine *grosse* Zahl ist, so dass man näherungsweise $n - 1 = n + 1 = n$ u. s. w. setzen kann, so geben die beiden Formeln (32) und (33) übereinstimmend:

$$\frac{1}{P} = \left(\frac{n^3}{24} - \frac{n^3}{64} - \frac{n^3}{48} \right) s^2 = \frac{n^3}{192} (8 - 3 - 4) s^2 = \frac{n^3}{192} s^2 \qquad (34)$$

Z. B.

$n = 7$ giebt $\frac{1}{P} = 1{,}79\, s^2$ gegen $1{,}86\, s^2$ nach (21).

$n = 6$ giebt $\frac{1}{P} = 1{,}13\, s^2$ gegen $1{,}04\, s^2$ nach (24).

Die Näherungsformel (34) ist also wohl im Stande, die Genauigkeits-Verhältnisse, unabhängig von der Unterscheidung ungerader oder gerader Punktzahl, darzustellen.

Wir entnehmen nun zuerst aus dieser Formel (34), wie ungemein günstig die richtige Ausgleichung auf die Zugs-Genauigkeit wirkt, denn das erste Glied $\frac{n^3}{24} s^2$ entspricht dem mittleren Fehler-Quadrat *vor* der Ausgleichung; und der Wert $\frac{n^3}{192} s^2$, welcher *nach* der Ausgleichung gilt, ist nur noch $\frac{1}{8}$ des entsprechenden Wertes *vor* der Ausgleichung, oder ein Zug von n Seiten, welcher am Anfang und Ende abgeschlossen und richtig ausgeglichen ist, lässt in der Mitte nur $\sqrt{\frac{1}{8}} = 0{,}354$ desjenigen Wertes als Querverschiebung fürchten, der bei einem offenen, vom Anfangspunkt mit $\frac{n}{2}$ Seiten bis zur Mitte geführten Zuge zu fürchten wäre.

Um Zahlenwerte einzuführen, gehen wir vom Gewicht P zu dem mittleren Fehler M über:

$$M = \varepsilon \sqrt{\frac{1}{P}} = \varepsilon\, s \sqrt{\frac{n^3}{192}} \qquad (35)$$

dabei ist M der mittlere Querverschiebungs-Fehler in der Mitte des Zuges, ε der mittlere Fehler eines gemessenen Brechungswinkels, s die Länge einer Zugs-Seite, n die Anzahl der Brechungspunkte, oder auch, bei einem langen Zuge (entsprechend den bei (32) und (33) zugelassenen Näherungen), n die Anzahl der Zugs-Seiten. Wir führen nun noch die Gesamtlänge L des Zuges ein:

$$L = n\,s \quad \text{oder} \quad n = \frac{L}{s}$$

also:

$$M = \frac{\varepsilon}{\sqrt{192}} \sqrt{\frac{L^3}{s}} = 0{,}0722\,\varepsilon \sqrt{\frac{L^3}{s}} \tag{36}$$

Diese Formel enthält das Fehler-Fortpflanzungs-Gesetz für nahezu geradlinige Theodolit-Züge mit gleichen Seiten. Dieses Gesetz heisst in Worten:

Die mittlere zu fürchtende Querverschiebung des Zuges wächst proportional der $1^1/_2$*-Potenz der Gesamtlänge* L *und ist umgekehrt proportional der Quadratwurzel der Zielweite* s.

(Dieses ist dasselbe Gesetz, wie für einen offenen Zug (10) § 98. S. 329.)

Man soll also die Zielweite s möglichst *lang* nehmen (im Gegensatz zu Bussolen-Zügen und Nivellements, wo die Zielweiten möglichst *klein* genommen werden müssen).

Um auch eine quantitative Fehler-Berechnung zu erhalten, nehmen wir den mittleren Winkelfehler $\varepsilon = 30''$ oder zum Einsetzen in (36), $\varepsilon = \frac{30''}{\varrho''}$, womit man erhält:

$$M = 0{,}0000105 \sqrt{\frac{L^3}{s}} \tag{37}$$

Hiernach ist folgende Tafel berechnet:

Mittlere zu fürchtende Querverschiebung in der Mitte eines Zuges.

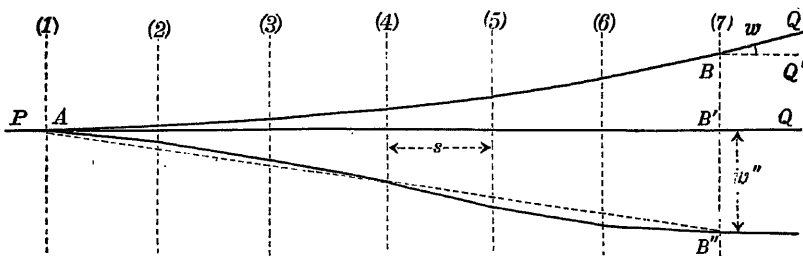
(38)

Länge des Zuges L	Länge der einzelnen Seiten des Zuges s					
	50^m	100^m	150^m	200^m	250^m	300^m
500^m	0,02^m	0,01^m	0,01^m	. . .^m	. . .^m	. . .^m
1 000	0,05	0,03	0,03	0,02	0,02	. . .
1 500	0,09	0,06	0,05	0,04	0,04	0,04
2 000	0,13	0,09	0,08	0,07	0,06	0,05
3 000	0,24	0,17	0,14	0,12	0,11	0,10
5 000	0,52	0,37	0,30	0,26	0,23	0,21

Wenn die Zugs-Seite s in der Gesamtlänge L nicht aufgeht, z. B. $s = 150^m$ bei $L = 500^m$, so gilt die Berechnung nach (36) oder (37) nur genähert, wie ja überhaupt schon bei (32) und (33) ähnliche Näherungen eingeführt wurden.

Die Tafel (38) giebt die mittlere zu fürchtende Querverschiebung M des Zuges unter der Voraussetzung, dass die Ausgleichung streng nach der Methode der kleinsten Quadrate erfolgt sei. Da dieses in der Praxis nicht der Fall ist, hat man den wirklichen mittleren Fehler etwas grösser zu schätzen.

Zum Schluss wollen wir noch eine graphische Darstellung des unter (20) behandelten Falles in Fig. 2. entwerfen. Es handelt sich um einen Zug von 7 Brechungspunkten und 6 dazwischen liegenden gleich langen Seiten s.

Fig. 2.

Die unmittelbare Messung, welche in A beginnt und daselbst die feste Gerade AP zur Orientierung benützt, soll den schwach und gleichförmig gekrümmten Zug AB geliefert haben, wobei in B der Azimutwiderspruch $QBQ = w$ sich einstellt. Um diesen Widerspruch zu tilgen, verteilt man ihn auf die 7 Brechungswinkel gleichförmig, und erhält dadurch die Linie AB', welche vermöge der *gleichen* Verteilung von w als eine *Biegung* von AB erscheint.

In unserer Figur ist angenommen, dass zufällig AB' eine *Gerade* werde, damit die Krümmungsverhältnisse zwischen AB, AB' und AB'' deutlich hervortreten; es ist durch Annahme dieses Zufalls der Allgemeinheit insofern nicht vorgegriffen, als es sich nur um die *relative* Formveränderung eines stets nahezu geradlinig gestreckten Zuges handelt, so dass z. B., wenn AB' die erste durch Messung erlangte Form wäre, AB die zweite Form darstellen könnte.

Die Form und Lage AB' ist deswegen nicht endgültig, weil der anderwärts unabänderlich gegebene Endpunkt des Zuges B'' verfehlt worden ist; oder der erstmals durch reine Winkelausgleichung verbesserte Zug liefert bei der Coordinatenberechnung den Ordinatenwiderspruch w'' (von dem Abscissenwiderspruch, welcher durch reine Distanzverbesserungen zu tilgen wäre, ist hier überhaupt nicht die Rede.)

Die unter (20) S. 333 gegebenen Resultate zeigen nun in graphischer Darstellung, dass der Zug AB' in die Endlage AB'' durch abermalige Biegung gebracht werden muss, und zwar so, dass die Krümmung von AB'' relativ gegen AB' einen Wendepunkt erhält.

Wir wollen diese Biegung des Zuges noch etwas weiter verfolgen, und suchen zu diesem Zweck zuerst die zweiten Winkel-Korrektionen v auf, welche nach (16) sind:

$$v_1 = b_1 k_2 \qquad v_2 = b_2 k_2 \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad v_r = b_r k_2$$

Dabei ist nach (15): $\quad [b\,b]\,k_2 - w'' = 0$

also:

$$v_1 = \frac{b_1}{[b\,b]}\,w'' \qquad v_2 = \frac{b_2}{[b\,b]}\,w'' \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad v_r = \frac{b_r}{[b\,b]}\,w''$$

Die b sind nach (29):

$$b_1 = \frac{n-1}{2}\,s \qquad b_2 = \frac{n-3}{2}\,s \ldots\; b_r = \frac{n-2r+1}{2}\,s \ldots. \tag{39}$$

Da die Azimut-Korrektionen $\delta\alpha$ die *Summen* der vorhergehenden Winkelkorrektionen v sind, so bekommt man für das Azimut α_r der $r$ten Strecke:

$$\delta\alpha_r = v_1 + v_2 + \ldots + v_r = (b_1 + b_2 + \ldots + b_r)\frac{w''}{[b\,b]}s \tag{40}$$

Die b bilden nach (39) eine einfache arithmetische Reihe, deren Summe wird:

$$b_1 + b_2 + \ldots\ b_r = (b_1 + b_r)\frac{r}{2} = \left(\frac{n-1}{2} + \frac{n-2r+1}{2}\right)\frac{r}{2}s = (n-r)\frac{r}{2}s \tag{41}$$

Die Summe $[b\,b]$ ist nach (31a) und (32a) für gerades und ungerades n:

$$[b\,b] = \frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{12}s^2 \tag{42}$$

Man hat also jetzt aus (40), (41) und (42):

$$\delta\alpha_r = \frac{6\,(n-r)\,r}{(n-1)\,(n+1)}\,\frac{w''}{n\,s} \tag{43}$$

Diese Formel ist insofern sehr anschaulich, als das Produkt $(n-r)\,r$ im Zähler proportional dem mittleren Fehlerquadrat des Azimutes nach der ersten Ausgleichung ist (entsprechend dem Produkt $n_1\,n_2$ in (12) § 98. S. 330).

Die Azimutformel (43) führt auch zu den linearen Querkorrektionen:

$$q_1 = s\,\delta\alpha_1 \qquad q_2 = s\,\delta\alpha_1 + s\,\delta\alpha_2 \qquad q_r = s\,(\delta\alpha_1 + \delta\alpha_2 + \ldots\,\delta\alpha_r) \tag{44}$$

Statt die hiezu nötigen Summierungen nach der allgemeinen Formel (25) Seite 335 vorzunehmen, wollen wir uns nun erlauben, anzunehmen, es sei die Zahl n der Zugpunkte einigermassen gross, und dann kann man mit ganz guter Annäherung die algebraische Summierung durch bequemere Integration ersetzen. Wir schreiben in solcher Annäherung statt (43) und (44):

$$\delta\alpha_r = \frac{6\,(n-r)\,r}{n^3}\,\frac{w''}{s} \tag{45}$$

$$\delta\alpha_1 + \delta\alpha_2 + \delta\alpha_r = \int_0^r \delta\alpha_r\,dr = \frac{6\,w''}{s\,n^3}\left(\frac{n\,r^2}{2} - \frac{r^3}{3}\right)$$

also nach (44):

$$q = (3\,n\,r^2 - 2\,r^3)\frac{w''}{n^3} = \left(3\left(\frac{r}{n}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{n}\right)^3\right)w'' \tag{46}$$

Dieses ist die Gleichung der Kurve $A\,B''$ in Fig. 2. S. 339. Wir wollen nun bestimmen, um wie viel äussersten Falls diese Kurve von der *Geraden* $A\,B''$ abweicht. Diese Gerade, welche der Proportionalverteilung von w'' entspricht, hat die Gleichung

$$q' = \frac{r}{n}w'' \tag{47}$$

Um die Differenz zwischen (46) und (47) zu bilden, setzen wir zur Abkürzung:

$$\frac{r}{n} = l \tag{48}$$

d. h. es ist l die relative Länge vom Anfang des Zuges bis zu dem $r$ten Punkt. Damit ist:

$$q - q' = (3\,l^2 - 2\,l^3 - l)\,w'' \tag{49}$$

Dieses erreicht sein Maximum, wenn

$$0 = 6\,l - 6\,l^2 - 1 \quad , \quad l = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{12}$$

dieses giebt:

$$l = 0{,}789 \quad \text{oder} \quad l = 0{,}212$$

und:

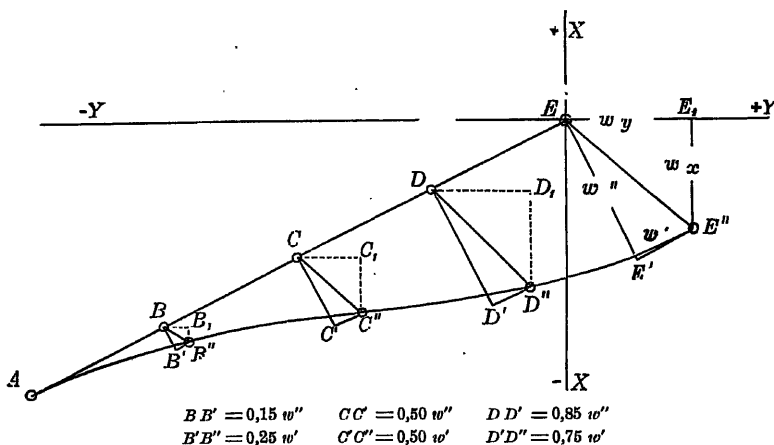
$$(q - q')_{max} = +\,0{,}096\,w'' \quad \text{oder} \quad -0{,}096\,w'' \tag{50}$$

Wenn man also an Stelle der Kurve eine Gerade setzt, so begeht man einen Fehler von höchstens etwa 0,1 w''.

Mit der Abkürzung (48) haben wir nun folgende Vergleichung:

Abstand vom Anfang des Zuges	*Ordinate der Kurve* $q = (3\,l^2 - 2\,l^3)\,w''$	*Ordinate der Geraden* $q' = l\,w''$	
$l = 0{,}00$	$q = 0$	$q' = 0$	
$l = 0{,}25$	$q = 0{,}156\,w''$	$q' = 0{,}25\,w''$	(51)
$l = 0{,}50$	$q = 0{,}500\,w''$	$q' = 0{,}50\,w''$	
$l = 0{,}75$	$q = 0{,}844\,w''$	$q' = 0{,}75\,w''$	
$l = 1{,}00$	$q = 1{,}000\,w''$	$q' = 1{,}00\,w''$	

Dieses führt zu folgender graphischer Ausgleichung nach Fig. 3.:

Fig. 3.

Ein nahezu geradlinig gleichseitiger Zug erstreckt sich von A nach E, und giebt nach der ersten Winkelausgleichung die Coordinaten-Widersprüche w_y und w_x. Diese trägt man in verzerrtem grossem Massstab von E nach E_1 und von E_1 nach E'' auf, und erhält damit die Punktverschiebung $E E''$.

Durch Projektionen rechtwinklig und parallel zur Haupterstreckung $A E$ des Zuges zerlegt man $E E''$ in seine Komponenten $E E' = w''$ und $E' E'' = w'$.

Nun teilt man $A E$ in vier gleiche Teile, errichtet in den Teilpunkten B, C und D die Ordinaten $B B'$, $C C'$, $D D'$ und konstruiert nach (51) mit Abrundung auf 0,05:

$$B B' = 0{,}15\,w'' \qquad C C' = 0{,}50\,w'' \qquad D D' = 0{,}85\,w''$$
$$B' B'' = 0{,}25\,w' \qquad C' C'' = 0{,}50\,w' \qquad D' D'' = 0{,}75\,w'$$

wie auch bei der Fig. 3. selbst beigeschrieben wurde.

Damit hat man genügende Anhaltspunkte, um die Ausgleichungs-Kurve $A\ B''\ C''\ D''\ E''$ zu zeichnen.

Für jeden Punkt kann man nun auch die Coordinaten-Korrektionen aus der Figur entnehmen, z. B. $D D_1$ als y-Korrektion und $D_1 D''$ als x-Korrektion von D.

Wenn nun allerdings der Zug nicht genau auf $A E$ selbst liegt, sondern Ab-

weichungen macht, so kann man die Konstruktion nur als Näherung und mittelbar brauchen.

Immerhin kann man aber für jeden Zug, der nur wenigstens im grossen und ganzen die Erstreckung von A nach E hat, in der Mitte die Korrektionen für C, im ersten und letzten Viertel die Korrektionen für B, beziehungsweise D benützen, und dazwischen gleichförmig oder nach Gutdünken ausgleichen.

§ 100. Ausgleichung eines Polygonzuges nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Obgleich die strenge Ausgleichung eines Polygonzuges nur sehr selten angewendet werden wird, ist es doch nötig, der theoretischen Vollständigkeit wegen, hier das Wesentliche einer solchen Ausgleichung zu behandeln.

Bei dieser Aufgabe müssen Längenfehler und Winkelfehler, also ungleichartige Fehler, zusammen behandelt werden.

Da ungleichartige Grössen nicht addiert werden können, so können die Fehler ungleichartiger Grössen auch nicht in einer Quadratsumme vereinigt werden; man kann jedoch Winkelmessungen auf Längenmessungen reduzieren. Streng genommen haben wir überhaupt keine reinen *Winkel*messungen, sondern nur Längenmessungen, denn um einen Winkel zu bestimmen, misst man am Rande eines geteilten Kreises die Länge eines Bogens, also eine lineare Grösse. Wenn ein Winkel β, in Minuten gemessen, vorliegt, so betrachten wir statt dessen die Länge:

$$\lambda = \frac{1 \times \beta}{\varrho'}$$

oder wir denken uns, man habe an einem Theodolit vom Halbmesser $= 1$, die Bogenlänge λ gemessen. Dem mittleren Winkelfehler m_β entspricht also ein mittlerer Längenfehler:

$$m_\lambda = \frac{m_\beta}{\varrho}$$

Wir betrachten ferner eine Messung der Länge s, deren mittlerer Fehler auf irgend welche Weise $= m_s$ ermittelt wurde. Nun liegen drei Messungen vor, nämlich die Messung des Winkels β, der Länge λ und der Länge s, indem wir ihre Gewichte vorerst bzw. mit p', p_λ, p bezeichnen, haben wir folgende Zusammenstellung:

Gemessene Grösse	β	λ	s
Mittlerer Fehler	m_β	$\frac{m_\beta}{\varrho}$	m_s
Gewicht	p'	p_λ	p

Die Gewichte und mittleren Fehler müssen folgenden Proportionen genügen:

$$p' : p_\lambda : p = \left(\frac{1}{m_\beta}\right)^2 : \left(\frac{\varrho}{m_\beta}\right)^2 : \left(\frac{1}{m_s}\right)^2$$

Da die Gewichte nur Verhältniszahlen sein sollen, kann ein Gewicht $= 1$ gesetzt werden. Nimmt man das Gewicht der Winkelmessung zur Einheit, also $p' = 1$, so sind auch die beiden anderen Gewichte durch die vorstehenden Proportionen bestimmt, nämlich:

$$p' = 1 \qquad p = \left(\frac{m_\beta}{m_s}\right)^2 \qquad p_\lambda = \varrho^2 \tag{1}$$

p_λ, d. h. das Gewicht einer fingierten Messung wird nicht weiter gebraucht.

Nach dieser Vorbereitung zu unserer Hauptaufgabe zurückkehrend, nehmen wir folgende Bezeichnungen an:

1) $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3 \ldots x_n y_n$, die Coordinaten der in Betracht kommenden Punkte, und zwar seien $x_1 y_1$, $x_n y_n$ unabänderlich gegeben.
2) s_1 , s_2 , $s_3 \ldots s_{n-1}$, die unmittelbar gemessenen Seiten.
3) β_1 , β_2 , $\beta_3 \ldots \beta_{n-1}$, die gemessenen Brechungswinkel; β_1 und β_n dienen zum Anschluss des Zuges an fest gegebene Strahlen.
4) α_1 , α_2 , $\alpha_3 \ldots \alpha_{n-1}$, die Azimute der Seiten s_1 , $s_2 \ldots s_{n-1}$, in dem Sinn der Nummerierung genommen.

Man hat somit gemesen: n Winkel β und $n-1$ Seiten s, im ganzen $2n-1$ Grössen, und es sollen damit $n-2$ Punkte festgelegt werden. Hiezu sind notwendig: $2n-4$ Messungsgrössen, etwa $n-2$ Winkel und $n-2$ Seiten, man hat also 3 überschüssige Grössen gemessen, und ebenso gross muss die Zahl der unabhängigen Bedingungsgleichungen sein.

Die erste dieser Bedingungsgleichungen ist:

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots + \beta_n - S = 0 \tag{2}$$

wobei S die theoretische Winkelsumme ist.

Ferner bestehen die Gleichungen:

$$s_1 \sin \alpha_1 + s_2 \sin \alpha_2 + s_3 \sin \alpha_3 + \ldots + s_{n-1} \sin \alpha_{n-1} - (y_n - y_1) = 0 \tag{3}$$

$$s_1 \cos \alpha_1 + s_2 \cos \alpha_2 + s_3 \cos \alpha_3 + \ldots + s_{n-1} \cos \alpha_{n-1} - (x_n - x_1) = 0 \tag{4}$$

Die hier benützten Azimute α sind Funktionen der gemessenen Winkel, nämlich, mit Weglassung der verschiedenen $\pm 180°$:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = \varphi_0 + \beta_1 \\ \alpha_2 = \varphi_0 + \beta_1 + \beta_2 \\ \alpha_3 = \varphi_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \\ \alpha_4 = \varphi_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{5}$$

Dabei ist φ_0 das konstante Anlage-Azimut, welches nicht weiter in Betracht kommt.

Denkt man sich die Gleichungen (5) in (3) und (4) eingesetzt, so hat man damit zwei Gleichungen, welche mit (2) zusammen die oben erwähnten drei unabhängigen Bedingungsgleichungen vorstellen.

Diese drei Gleichungen werden durch die Beobachtungen β und s im allgemeinen nicht befriedigt; daher treten an Stelle von (2), (3) und (4) folgende andere Gleichungen:

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots \beta_n - S = w \tag{2*}$$

$$s_1 \sin \alpha_1 + s_2 \sin \alpha_2 + \ldots s_{n-1} \sin \alpha_{n-1} - (y_n - y_1) = w_y \tag{3*}$$

$$s_1 \cos \alpha_1 + s_2 \cos \alpha_2 + \ldots s_{n-1} \cos \alpha_{n-1} - (x_n - x_1) = w_x \tag{4*}$$

Man muss nun den β und s solche Verbesserungen zufügen, welche die Widersprüche w , w_x , w_y wieder zum Verschwinden bringen. Hiernach hat man:

$$(\beta_1 + \delta\beta_1) + (\beta_2 + \delta\beta_2) + (\beta_3 + \delta\beta_3) + \ldots + (\beta_n + \delta\beta_n) - S = 0$$

woraus in Verbindung mit (2*) sich ergiebt:

$$\delta\beta_1 + \delta\beta_2 + \delta\beta_3 + \ldots + \delta\beta_n + w = 0 \tag{2**}$$

In gleicher Weise fortfahrend erhält man:

$$(s_1 + \delta s_1) \sin(\alpha_1 + \delta\alpha_1) + (s_2 + \delta s_2) \sin(\alpha_2 + \delta\alpha_2) + \ldots - (y_n - y_1) = 0$$

Durch Entwicklung nach dem *Taylor*schen Satze erhält man:

$$(s_1 + \delta s_1)(\sin \alpha_1 + \delta \alpha_1 \cos \alpha_1) + \quad \ldots\ldots\ldots \quad - (y_n - y_1) = 0$$

oder mit Rücksicht auf (3*):

$$s_1 \cos \alpha_1 \, \delta \alpha_1 + \sin \alpha_1 \, \delta s_1 + s_2 \cos \alpha_2 \, \delta \alpha_2 + \sin \alpha_2 \, \delta s_2 + \ldots + w_y = 0$$

Es ist aber nach (5):

$$\begin{aligned} \delta \alpha_1 &= \delta \beta_1 \\ \delta \alpha_2 &= \delta \beta_1 + \delta \beta_2 \\ \delta \alpha_3 &= \delta \beta_1 + \delta \beta_2 + \delta \beta_3 \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

folglich:

$$\begin{aligned} &(s_1 \cos \alpha_1 + s_2 \cos \alpha_2 + s_3 \cos \alpha_3 + \ldots)\, \delta \beta_1 + \sin \alpha_1 \, \delta s_1 \\ &\quad + (s_2 \cos \alpha_2 + s_3 \cos \alpha_3 + \ldots)\, \delta \beta_2 + \sin \alpha_2 \, \delta s_2 \\ &\quad\quad (s_3 \cos \alpha_3 + \ldots)\, \delta \beta_3 + \sin \alpha_3 \, \delta s_3 \\ &\quad\quad + \ldots. \qquad\qquad + w_y = 0 \end{aligned}$$

Die Coëfficienten von $\delta \beta_1$, $\delta \beta_2$, $\delta \beta_3 \ldots$ sind die Abscissen der Polygonpunkte, bezogen auf ein System, dessen Ursprung der letzte Punkt (n) ist, und dessen Axen denen des ursprünglichen Systems entgegengerichtet sind; oder es sind diese Coëfficienten die negativen Abscissen der Punkte, bezogen auf ein System mit den früheren (unveränderten) Axenrichtungen und dem Ursprung (n). Bezeichnet man diese letzteren Abscissen mit x_1' x_2' $x_3' \ldots$, so hat man die zweite Bedingungsgleichung:

$$\begin{aligned} &- x_1' \, \delta \beta_1 - x_2' \, \delta \beta_2 - x_3' \, \delta \beta_3 - \ldots \qquad - x'_{n-1} \, \delta \beta_{n-1} \\ &+ \sin \alpha_1 \, \delta s_1 + \sin \alpha_2 \, \delta s_2 + \sin \alpha_3 \, \delta s_3 - \ldots + \sin \alpha_{n-1} \, \delta s_{n-1} + w_y = 0 \end{aligned} \quad (3^{**})$$

Für die Gleichung (4*) hat man eine ganz ähnliche Entwicklung.

Die Korrektionen $\delta \beta$ in (3**) sind in analytischem Mass verstanden, und wenn man die Winkelkorrektionen $\delta \beta$ in Minuten zählen will, so muss man die betreffenden Glieder in (3**) durch $\varrho = 3438$ dividieren.

Nun kann man die Ausgleichung verfeinern, wenn man nach der Methode der „partiellen Ausgleichung“ verfährt, welche wir in Band I. § 45. gelehrt haben, insbesondere nach der Methode der „reduzierten Bedingungsgleichungen“, Gleichungen (23), (24), (25) S. 111, Band I., welche wir dort in Voraussicht der Polygon-Ausgleichung bereits zurecht gemacht haben.

Man wird finden, dass die Coordinaten durch Verschiebung so zu verwandeln sind, dass die algebraischen Summen $[y] = 0$ und $[x] = 0$ werden.

Wir begnügen uns hier mit dieser Andeutung. Dagegen mag es belehrend sein, die gebräuchlichen Zugausgleichungen mit einer strengen Ausgleichung nach der Methode der kleinen Quadrate zu vergleichen.

Wir nehmen hiezu den Zug von § 91. S. 296 mit 9 Punkten und 1454^m Ausdehnung (siehe nebenstehende Tabelle S. 345), dessen Ausgleichung nach der Methode der kleinen Quadrate in der vorigen Auflage dieses Buches (1877) in § 103. S. 303—306 ausführlich mitgeteilt war.

Die grösste vorkommende Abweichung ist $0{,}16^m$ bei x_b, was verglichen mit $w_x = 0{,}40^m$ einen Betrag von $40\,\%$ ausmacht. Die Proportionalverteilung erscheint günstiger als die gleichförmige Verteilung.

Punkt	Ordinaten y			Abscissen x		
	M. d. kl. Q.	gleichförmig	prop. Δx	M. d. kl. Q.	gleichförmig	prop. Δy
Hard	— 7853,19^m	,19^m	,19^m	+ 45 313,21^m	,21^m	,21^m
(1)	— 7793,67	,67	,68	+ 45 461,38	,36	,36
(2)	— 7661,81	,81	,81	+ 45 429,08	,12	,08
(3)	— 7604,58	,56	,57	+ 45 395,30	,39	,31
(4)	— 7514,42	,38	,39	+ 45 320,20	,35	,25
(5)	— 7326,04	,06	,05	+ 45 490,54	,64	,56
(6)	— 7211,24	,24	,22	+ 45 427,13	,29	,18
(7)	— 7125,77	,78	,77	+ 45 782,38	,43	,40
Neubruch	— 7077,54	,54	,54	+ 45 002,10	,10	,10
	$w_y = -0,26^m$			$w_x = -0,40^m$		

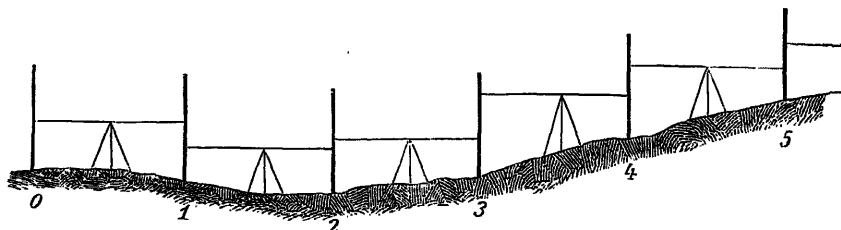
(Zur Ausgleichung von Polygon-Zügen nach der M. d. kl. Q. ist auch eine Abhandlung von *Fenner* in der „Zeitschr. f. Verm. 1887", S. 249 und S. 287 anzuführen.)

Kapitel X.

Nivellierung.

§ 101. Einleitung.

Unter Nivellierung (im engeren Sinne) versteht man ein Verfahren der Höhen-Messung, wobei der Höhen-Unterschied benachbarter Punkte durch horizontales Zielen nach lotrechten Massstäben (Latten) bestimmt wird, wie in Fig. 1. angedeutet ist.

Fig. 1.
Veranschaulichung des Grundgedankens der Nivellierung.

Ein Nivellier-Geräte besteht aus zwei getrennten Teilen, dem eigentlichen Nivellier-Instrument mit Stativ, und der Latte.

Die horizontale Entfernung je zweier Punkte 0 , 1 , 2 . . . (Fig. 1.), deren Höhen auf einmal bestimmt werden, ist immer mässig, etwa rund = 100 Meter (oder Zielweite = 50 Meter); da man aber das ganze Verfahren beliebig oft wiederholen

kann, so hat man in dem Nivellier-Verfahren ein Mittel, nicht bloss Linien von Kilometern, sondern Linien durch ganze Länder und Weltteile, der Höhe nach zu bestimmen, und hohe Berge zu messen.

Wenn man in solcher Weise Hunderte und Tausende von Stufen-Messungen aneinander setzt, so könnte man fürchten, dadurch allmählich eine sehr schlimme Fehler-Anhäufung zu erhalten; und in der That hat diese Furcht dem Nivellier-Verfahren, welches im Grundsatz schon im Altertum bekannt war (z B. 200 v. Chr. *Heron* von Alexandrien, vgl. „Zeitschr. f. Verm. 1887", S. 674—678), lange eine untergeordnete Bedeutung zugewiesen, und noch bis zur Mitte dieses Jahrhunderts wurden die beiden anderen Höhen-Messverfahren, welche wir haben, das trigonometrische und das barometrische, fast allein angewendet, wenn es sich um geographische ausgedehnte Höhen-Aufnahmen handelte.

Seit etwa 20 Jahren hat die Höhen-Bestimmung durch Nivellieren, teils infolge der beim Eisenbahnbau u. s. w. gemachten Erfahrungen, teils durch die Anregung der „Europäischen Gradmessung" einen bedeutenden Aufschwung genommen, und das Nivellieren mit kurzen Zielweiten gilt jetzt allgemein als erste und genaueste aller Höhen-Messungs-Methoden.

Jene Furcht der Fehlerhäufung ist jetzt durch die Erfahrung und durch die Theorie (§ 112.) besiegt, ja man weiss jetzt, dass die Nivellierung, wegen der an jedem Punkte auf die Libelle wirkenden Richtkraft der Erde, die günstigste Fehler-Fortpflanzung hat und wohl die genaueste aller Land- und Erdmess-Verrichtungen ist.

Seit dem Jahre 1879 werden bei uns die Nivellierungs-Höhen alle auf *einen* gemeinsamen Horizont bezogen, dessen Höhe man *Normal-Null* (N. N.) nennt. Weiteres hierüber siehe am Schluss von § 106.

Obgleich Nivellierungs-Linien sich auf weite Teile der Erde ausdehnen können, ist doch die Berücksichtigung der Erd*krümmung* bei den Messungen und bei den Berechnungen nicht nötig, weil die Ziel-Linien immer von selbst anschmiegende Tangenten der jeweiligen Erdkrümmungs-Linien sind.

Die Instrumente und die Nivellier-Arten für Kleinvermessungen, und für Aufnahmen im grossen, lassen sich nicht streng auseinander halten. Wir werden jedoch im Folgenden zuerst vorwiegend die einfacheren Einrichtungen behandeln, und dann zu den feineren und schwierigeren Teilen übergehen.

§ 102. Einfache Nivellier-Instrumente.

Ein Nivellier-Instrument besteht im wesentlichen aus einer Libelle und einem Fernrohr, deren Axen unter sich parallel, und beim Gebrauch horizontal sind.

Die einfachste Konstruktion besteht nun darin, dass die zwei Hauptteile, die Libelle und das Fernrohr, sowohl unter sich, als auch mit dem Untergestell *fest* verbunden sind.

Diese einfache Konstruktion, welche für die gewöhnlichen Ingenieur-Arbeiten, Querprofile und mässig lange Längenprofile u. s. w., unbedingt zu empfehlen ist, betrachten wir an zwei Mustern unserer Sammlungen (Fig. 1. und Fig. 2.) näher.

Was die zugehörigen Nivellier-*Latten* betrifft, so mag es genügen, hier zu bemerken, dass eine solche Latte ein hölzerner in Centimeter geteilter Massstab von etwa 3 Meter Höhe ist.

Weiteres über Nivellier-Latten wird in § 109. gesagt werden.

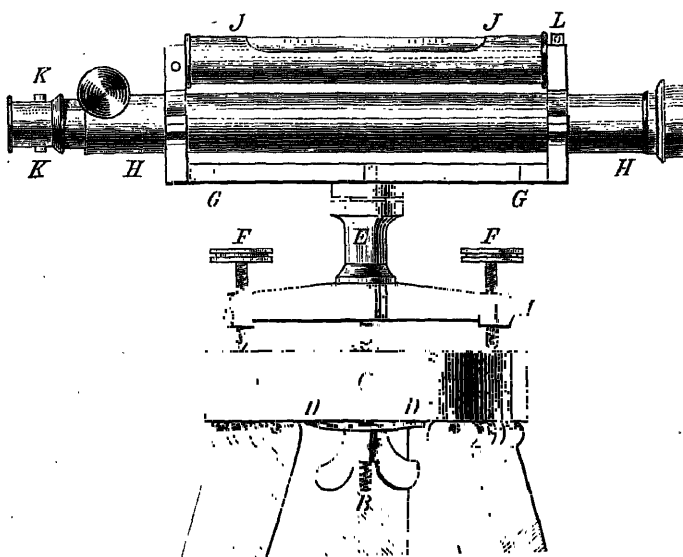
Fig. 1.
Einfaches Nivellier-Instrument.

(Karlsr. Sammlung; Mechaniker *Sickler.*)

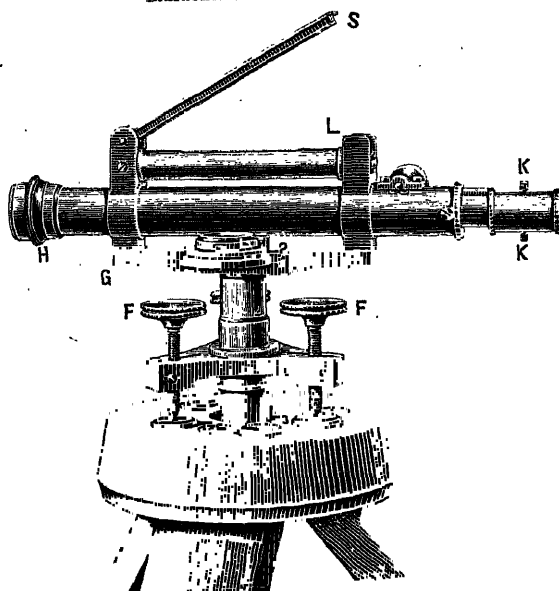
Fig. 2.
Einfaches Nivellier-Instrument.

(Hannov. Sammlung; Mechaniker *Randhagen.*)

Fig. 1. Ein gewöhnlicher Dreifuss A mit Stellschrauben F ist mittelst einer Centralschraube B auf ein Scheibenstativ C befestigt. Um eine vertikale Axe E dreht sich das Gestell G, mit welchem das Fernrohr H und die Libelle J vollkommen fest verbunden sind.

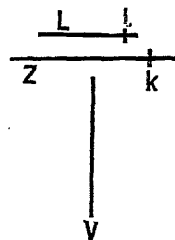
Die Vergrösserung des Fernrohrs ist 15fach und die Empfindlichkeit der Libelle ist 25″ auf 1 Strich.

Das Instrument hat zwei Berichtigungs-Mittel, nämlich vertikal wirkende Richte-Schrauben K am Fadenkreuz des Fernrohrs, und eine ebenfalls vertikal wirkende Richte-Schraube L an der Libelle.

Fig. 2. Die Einrichtung dieses Instrumentes ist im wesentlichen dieselbe, wie bei dem vorhin beschriebenen Intrumente Fig. 1. Wir haben jedoch nun ausser der Haupt-Libelle L noch eine wenig empfindliche Dosen-Libelle L_2, und dann sogar noch eine Dosen-Libelle L_0 auf dem Stativ, also im ganzen drei Libellen. Die zwei Dosen-Libellen dienen nur der Bequemlichkeit und Beschleunigung in der Weise, dass zuerst der hölzerne Stativkopf mittelst der Libelle L_0 beiläufig wagrecht gestellt wird, und dass dann die Dosen-Libelle L_2 mit den Stellschrauben F zum Einspielen gebracht wird. Dann erst beginnt die Benützung der Haupt-Libelle L, abermals mit den Stellschrauben F.

Über der Haupt-Libelle L befindet sich ein schiefer Spiegel S, mit dessen Hilfe man unmittelbar vom Okular aus, ohne den Kopf zu erheben, die Blasenstellung ablesen kann.

Prüfung und Berichtigung des einfachen Nivellier-Instrumentes.

Fig. 3.
Axen des Nivellier-Instruments.

Wenn ausser der Längs-Libelle etwa noch eine Dosen-Libelle (L_2 Fig. 2.) vorhanden ist, so ist hievon jetzt nicht die Rede. Wir haben nach Fig. 3. drei Axen in Betracht zu nehmen:

1) die Libellen-Axe L,
2) die Ziel-Axe Z des Fernrohrs,
3) die vertikale Umdrehungs-Axe V.

Es sollen folgende zwei Bedingungen erfüllt sein:

[1] $L \perp V$ (Libellen-Axe rechtwinklig zur Vertikal-Axe),
[2] Z parallel L (Ziel-Axe parallel der Libellen-Axe).

Um diese zwei Bedingungen zu erfüllen, hat man zwei Berichtigungs-Hilfswinkel k und l, nämlich k als Richte-Schrauben am Fadenkreuz des Fernrohrs (Fig. 5. S. 139) und l als Richte-Schraube an der Libelle.

Um L parallel Z zu machen, kann man l *oder* k benützen; um aber $L \perp V$ zu machen, kann man *nur* l benützen, und daraus folgt, dass die Bedingung $L \perp V$ *zuerst* erfüllt werden muss, mit der Libellen-Richte-Schraube l, und dass nachher erst Z parallel L gemacht werden darf, mit der Fadenschraube k. Aus diesem Grunde ist auch diese Aufeinanderfolge [1] und [2] oben so angegeben.

Sachlich ist die erste Bedingung $L \perp V$ nicht ebenso wichtig als die zweite, es ist aber wegen der Bequemlichkeit und Raschheit der Messung doch erwünscht, dass die Libellen-Axe möglichst genau rechtwinklig zur vertikalen Axe liegt.

Man hat also folgendes auszuführen:

[1] Die Libellen-Axe soll rechtwinklig zur vertikalen Umdrehungs-Axe sein. Dieses wird gerade so behandelt, wie schon beim Theodolit (S. 155—156) beschrieben

wurde. Nachdem ein Horizontalstellungs-Versuch im ganzen gemacht ist, stellt man die Libelle parallel der Verbindungs-Linie zweier Stellschrauben, und bringt sie mit letzteren zum Einspielen. Dann wird die Libelle (samt dem Fernrohr) um 180° gedreht, und die Hälfte des sich zeigenden Ausschlags der Blase mittelst der Richte-Schraube l der Libelle, sowie die andere Hälfte mittelst der Fuss-Stellschrauben weggeschafft. Hierauf dreht man die Libelle um 90°, und bringt den jetzt sich zeigenden *ganzen* Ausschlag mit der dritten Fuss-Stellschraube zum Verschwinden.

Dadurch hat man nicht nur die Libellen-Axe rechtwinklig zur vertikalen Axe, sondern letztere zugleich vertikal gemacht, d. h. man hat das Instrument „horizontal gestellt".

[2] Die Ziel-Axe des Fernrohrs soll parallel der Libellen-Axe sein.

Die Prüfung dieser wichtigsten Bedingung wird mit Zuhilfenahme der Latte im freien Felde gemacht, und wir haben dazu zuerst das wichtige Mittel der *Zielung aus der Mitte* (Fig. 4.).

Es ist wichtig, auch für das Nivellieren selbst, einzusehen, dass ein Fehler der Ziel-Axe gegen die Libellen-Axe dann unschädlich bleibt, wenn das Instrument J_1 in der *Mitte* zwischen den Latten A und B steht, d. h. J_1 (Fig. 4.) braucht nicht in der Geraden AB selbst zu stehen, sondern nur wenigstens so, dass die Zielweiten $J_1 A$ und $J_1 B$ einander *gleich* sind. Dann werden offenbar durch einen Ziel-Axen-Fehler die beiden Latten-Ablesungen a_1 und b_1 um *gleich* viel zu gross oder zu klein, und die *Differenz* $a_1 - b_1$ bleibt richtig.

Hiernach erhalten wir zur Untersuchung [2], ob die Ziel-Axe parallel der Libellen-Axe ist, folgendes Verfahren:

Man wählt zwei sichere, etwa 100^m von einander entfernte Standpunkte A und B (Fig. 4.) aus, und stellt zuerst das Instrument in die Mitte J_1 zwischen beide Punkte A und B, und nachher möglichst nahe zu einem derselben, etwa nahe zu A, nach J_2. An den Latten A und B werden die Masse a_1, b_1 und a_2, b_2 nach Andeutung von Fig. 4. abgelesen; und es muss nun die Bedingung erfüllt sein:

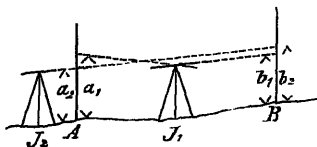
Fig. 4.
Zielung aus der Mitte.

$$a_1 - b_1 = a_2 - b_2$$

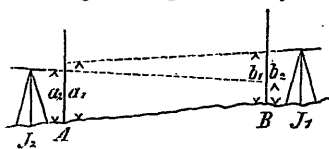
Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, so muss man in der Instrumenten-Stellung J_2 das Fadenkreuz des Fernrohrs mit seinen vertikal wirkenden Richte-Schrauben (S. 139) so verstellen, dass die vorstehende Bedingung erfüllt wird, so dass man hat: $$b_2 = a_2 - (a_1 - b_1).$$

Beispiel:

Ablesungen in J_1:	Ablesungen in J_2:
$a_1 = 1{,}675^m$	$a_2 = 1{,}590^m$
$b_1 = 1{,}383$	$b_2 = 1{,}317$
Differenzen: $a_1 - b_1 = 0{,}292$	$a_2 - b_2 = 0{,}273$

Nun ist $a_1 - b_1 = 0{,}292$ die *richtige* Differenz, weil J_1 in der *Mitte* zwischen A und B steht; a_2 gilt ebenfalls als richtig, wegen der Kürze der Zielweite; man rechnet nun: $$b_2 = 1{,}590 - 0{,}292 = 1{,}298.$$

Man hat daher in J_2 das Fadenkreuz so lange aufwärts zu schrauben, dass statt der Ablesung 1,317 an der *entfernten* Latte die Ablesung 1,298 erscheint.

Obgleich dieses Verfahren immer anwendbar ist, geben wir doch noch ein zweites Verfahren an, entsprechend Fig. 5.:

Fig. 5.
Gegen-Zielungen J_2 und J_1.

Man wählt zwei Instrumenten-Standpunkte J_1 und J_2 aus, welche *symmetrisch* gegen die Lattenpunkte A und B liegen. Man liest nun wieder die vier Masse a_1, b_1, a_2, b_2 an den Latten ab, und sieht zu, ob $a_1 - b_1 = a_2 - b_2$ ist. Wenn dieses nicht der Fall ist, so nimmt man das arithmetische Mittel:

$$a - b = \frac{(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)}{2}$$

Dieses ist die richtige Differenz, man stellt daher in J_2 das Fadenkreuz so, dass statt b_2 die Ablesung $a_2 - (a - b)$ erhalten wird.

Beispiel:

	Ablesungen in J_1:	Ablesungen in J_2:
	$a_1 = 2{,}045^m$	$a_2 = 1{,}784^m$
	$b_1 = 1{,}243$	$b_2 = 0{,}952$
Differenzen:	$a_1 - b_1 = 0{,}802$	$a_2 - b_2 = 0{,}832$

Mittel: $a - b = 0{,}817$.

Man rechnet wieder $1{,}784 - 0{,}817 = 0{,}967$; es muss also in J_2 das Fadenkreuz so verstellt werden, dass statt 0,952 die Ablesung 0,967 an der *entfernten* Latte gemacht wird.

Beim Verstellen des Fadenkreuzes kann man sich in Betreff der Richtung (auf oder ab) nicht irren, wenn man bedenkt, dass das Okular keine Bildumkehrung erzeugt; man hat also den Faden gerade so, wie es der unmittelbare Anblick verlangt, auf oder ab zu schieben.

Die hier beschriebenen Prüfungs-Verfahren, namentlich *a*) Zielung aus der Mitte, sind sehr wichtig, auch für andere Instrumente, weil man damit unter allen Umständen die Parallelität der Absehlinie und der Libelle eines Nivellier-Instrumentes sicher untersuchen kann.

(Indessen kommt hier auch noch der Gang der Okular-Röhre in Betracht, worüber später am Schluss von § 108. das Nötige gesagt werden wird.)

Nivellier-Theodolit.

Ausser den zwei eigentlichen Nivellier-Instrumenten, Fig. 1. und Fig. 2. S. 347, wollen wir in Fig. 6. S. 351 noch ein kleines Instrument betrachten, welches zunächst anderen Zwecken dient, mit dem man aber auch nivellieren kann. Eine solche Verbindung kommt oft vor.

Dieses Instrument ist theodolitartig gebaut, dann aber durch Aufsetzen einer festen Libelle L auf das Fernrohr $F_0 F_1$ auch zum Nivellieren eingerichtet. Dieses findet sich oft; und ein Ingenieur, der Winkel-Messungen etwa nur auf 1′ genau nach

Lage und Höhe, und einfache Nivellierungen zu machen hat, kann wohl alle diese Zwecke (vielleicht auch noch Tachymetrie) in einem solchen Instrumentchen, wie

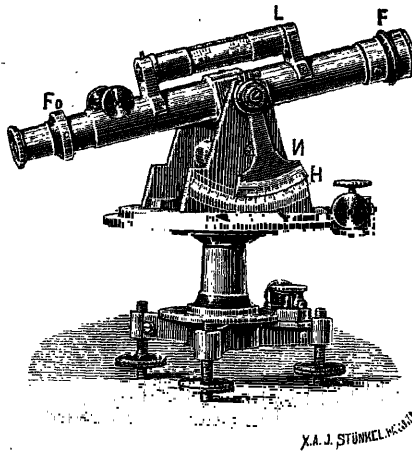
Fig. 6.
Nivellier-Theodolit.

Hannov. Sammlung.

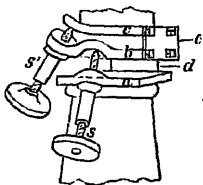
Fig. 6., vereinigen, während *genaue* Messungen der einen oder anderen Art besser mit verschiedenen gesonderten Instrumenten, also z. B. reinen Nivellier-Instrumenten, gemacht werden.

Horizontal-Stellung.

Zum Schluss unserer Beschreibung einfacher Nivellier-Instrumente, wollen wir noch einige Bemerkungen über Horizontal-Stellung machen.

Die gewöhnlichste Vorrichtung zum Horizontal-Stellen ist der Dreifuss mit drei Fuss-Stellschrauben wie bei Fig. 1. und Fig. 2. S. 347.

Es kommen aber auch noch viele andere Formen vor, z. B. *vier* Schrauben, von denen je zwei ineinander entgegen wirken, oder auch *zwei* Schrauben mit je einer entgegen wirkenden Feder.

Fig. 7.
Schrauben mit Gegen-Federn.

(Mechaniker *Geyer*.)

Eine Anordnung der letzteren Art zeigt Fig. 7., Patent von *Geyer* in München (nach einer Patent-Notiz in der „Zeitschr. f. Verm. 1882“, S. 47). In perspektivischer Ansicht zeigt Fig. 7.:

Schraube s' mit Gegenfeder e

und Schraube s mit Gegenfeder d

Die beiden Schrauben und Federn wirken in zwei Ebenen, rechtwinklig zueinander.

Ähnliche Anordnungen hatte früher schon *Stampfer* in Wien.

Ein schon mehrfach gemachter Versuch bezieht sich auf *selbstthätige Horizontalstellung* durch ein Schwebe-Gewicht. (Z. B. in unserer Hannov. Sammlung befindet sich ein solches Instrument.)

Nicht unzweckmässig dürfte eine Verbindung einer solchen selbstthätigen rohen Einstellung mit einer feinern Schrauben-Einstellung sein. Sobald die rohe Einstellung, etwa in Cardanischer Aufhängung, sich von selbst ergeben hat, wird die Gelenkverbindung geschlossen, und eine gewöhnliche freie Einstellung in Angriff genommen.

Wir sind von diesem Gedanken deswegen wieder teilweise abgegangen, weil die auf dem Stativkopf angebrachte Dosen-Libelle L_0 Fig. 2. S. 347 für erste rohe Horizontalstellung *auf Strassenboden* ziemlich denselben Dienst thut (mit Rücken der Stativ-Beine) wie etwa von der Cardanischen Aufhängung mit Schliessung zu erwarten wäre. Auf steilen Waldwegen u. s. w. wäre die Cardanische Aufhängung vielleicht sehr am Platz.

§ 103. Aufnahme von Längen-Profilen.

Die Neigungsverhältnisse einer Nivellierungs-Linie werden in einem „Profil" dargestellt, indem man die Linie im Grundriss geradlinig ausgestreckt denkt.

Die Aufnahme eines Längenprofils zerfällt in zwei Teile, nämlich:

1) die horizontale Vermessung,

2) die Ermittelung der Höhen.

Zum Zweck der horizontalen Vermessung wird die aufzunehmende Linie in gleiche Strecken (nach Umständen 20^m, 50^m, 100^m u. s. w.) eingeteilt, verpflockt und numeriert. Beim Nivellieren bestehender Strassen und Eisenbahnen kann man die zum Zweck der Verwaltung bereits vorhandenen Nummernsteine benützen.

Bei gewöhnlichen Nivellierungen wird die Latte einfach auf den natürlichen Boden gestellt, für genauere Zwecke stellt man die Latte auf eine eiserne Platte, wie in § 109. Fig. 7. angegeben werden wird, oder auf eine andere ähnliche Vorrichtung.

Die *Vertikalstellung* der Latte wird erreicht:

1) Durch Schätzung (wenn die Ablesung klein ist).

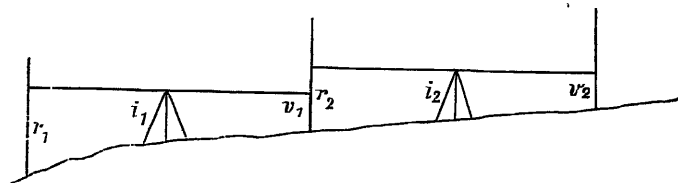
2) Durch Vor- und Rückwärtsneigen der Latte während des Ablesens; das Minimum der Ablesung entspricht der Vertikalstellung der Latte.

3) Durch beigegebene Senkel.

4) Durch eine an der Latte befestigte Dosen-Libelle, welche nach Massgabe eines Senkels richtig gestellt wird.

Die Latte wird dabei von freier Hand gehalten.

Die Zielweiten nimmt man gewöhnlich etwa 50 Meter, rückwärts und vorwärts *gleich*. Dadurch wird man auf die in Fig. 1. angedeutete Anordnung geführt, durch welche zugleich die Berechnung der Höhen angedeutet wird.

Fig. 1.
Nivellierung mit gleichen Zielweiten.

Es sei i_1 eine erste Instrumenten-Aufstellung mit der ersten Rückwärtsablesung r_1 und der ersten Vorwärtsablesung v_1.

Ebenso sei i_2 eine zweite Instrumenten-Aufstellung mit der Rückwärtsablesung r_2 und der Vorwärtsablesung v_2.

Die Zwischenstellung der Latte, an welcher vorwärts v_1 und rückwärts r_2 abgelesen wurde, heisst ein „Wechsel".

Der Höhenunterschied zwischen der ersten und der letzten Latten-Aufstellung ist nach Fig. 1. S. 352:

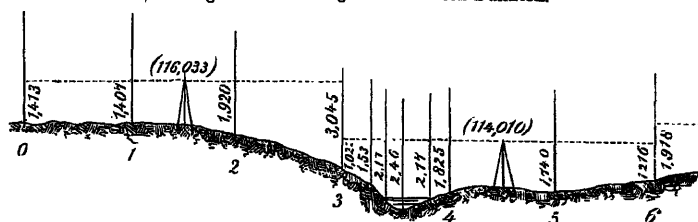
$$h = r_1 - v_1 + r_2 - v_2 + \ldots$$

Die Instrumentenhöhen selbst i_1 und i_2 u. s. w. braucht man nicht.

Häufig hat man es aber mit Linien zu thun, welche nicht so einfach verlaufen.

Ein Beispiel einer Längen-Nivellierung mit Zwischenpunkten, und die zugehörige Berechnungstabelle ist im folgenden gegeben.

Fig. 2.

Längen-Nivellierung mit Zwischen-Punkten.

(Abstand der Hauptpunkte = 30m, Grösste Zielweite = 45m.)

Nivellierungs-Tabelle (Feldschreibbuch) zu Fig. 2.

Punkt	Ablesung	Höhe über N. N.	Horizont	Bemerkungen
(0)	1,413m	**114,620m**	116,033m	Ausgangspunkt, gegeben 114,620m über Normal-Null.
(1)	1,407	114,626		
(2)	1,920	114,113		
(3)	3,045	112,988		(Wechsel)
(3)	1,022	112,988	114,010	
(3) + 8,0m	1,530	112,480		Böschungsrand
(3) + 12,2m	2,170	111,840		Bachrand
(3) + 17,0m	2,460	111,550		Bachsohle
(3) + 25,0m	2,170	111,840		Bachrand
(4)	1,825	112,185		
(5)	1,740	112,270		
(6)	1,216	112,794		(Wechsel)
(6)	1,918		114,712	

Die hier benützte Berechnungs-Tabelle (welche man im Feldschreibbuch gedruckt führt) ist wohl die einfachste der vielen vorhandenen. Wir unterscheiden hiebei Wechsel-Punkte (3 und 6 Fig. 1.) und Zwischen-Punkte.

Die Ausgangshöhe des Punktes (0) betrachten wir als gegeben = 114,620 über N. N., diese wird zuerst eingesetzt, dann folgt die erste Ablesung = 1,413, folglich der erste Horizont

der erste Horizont	= 114,620 + 1,413 = 116,033	
dann folgt:	116,033 — 1,407 = 114,626	
	116,033 — 1,920 = 114,113	
	116,033 — 3,045 = 112,988	
	112,988 + 1,022 = 114,010	neuer Horizont
	114,010 — 1,530 = 112,480	
	. . . .	u. s. w.

Diese Berechnungen, wenigstens für die Wechsel-Punkte, macht man gewöhnlich sofort auf dem Felde, in der Tabelle S. 353, und rechnet nachher zu Hause zuerst die Horizonte und die Höhen der *Wechsel*-Punkte nach, worauf auch die Berechnung der Zwischen-Punktshöhen folgt.

Wenn nicht nach wahren Höhen über Normal-Null gerechnet werden kann, so kann man dieselbe Berechnungs-Art auch mit einer willkürlich angenommenen Ausgangshöhe anwenden.

Das *Auftragen eines Längen-Profils* erfolgt auf Grund der berechneten Höhen (über N. N.) der einzelnen Punkte, gewöhnlich mit zweckmässig gewählter Überhöhung. Wenn ein Längen-Profil im Zusammenhang mit Quer-Profilen (s. folg. §) gezeichnet wird, so empfiehlt es sich, den Höhenmassstab des Längen-Profils gleich dem Massstab der (nicht überhöhten) Quer-Profile zu machen.

§ 104. Aufnahme von Quer-Profilen.

Die im Grundriss rechtwinklig zu einem Längen-Profil gelegten Quer-Profile, überhaupt kürzere Profile, welche zum Auftragen in grossem Massstab bestimmt sind, spielen bei Projektierungsarbeiten des Ingenieurfaches eine wichtige Rolle.

Die Profile werden zuerst durch einige Stäbe abgesteckt, und dann mit Messlatten und einem einfachen Nivellier-Instrument aufgenommen.

Wenn die Profile sehr einförmig sind, so kann die Aufnahme gerade so wie bei Längen-Profilen, mit Aufschreiben der Entfernungen und Höhen in einer Tabelle erfolgen (Tabelle S. 353 des vorigen § 103.). Wenn dagegen viele Besonderheiten vorkommen, z. B. Wege, Bäche, Raine etc., so empfiehlt sich das Aufzeichnen aller Masse in einem *Handriss*, der zugleich Gelegenheit zum Eintragen von Bemerkungen über Bodenverhältnisse giebt.

Das Quer-Profil ist stets so zu zeichnen, dass links und rechts im Sinne der Numerierung des Längenprofils gilt.

Ein Beispiel zeigt Fig. 1. S. 355. Es sind dabei die meisten Masse nur auf Decimeter abgerundet eingeschrieben, jedoch ist es meist nötig, wenigstens die Höhen auf einzelne Centimeter anzugeben.

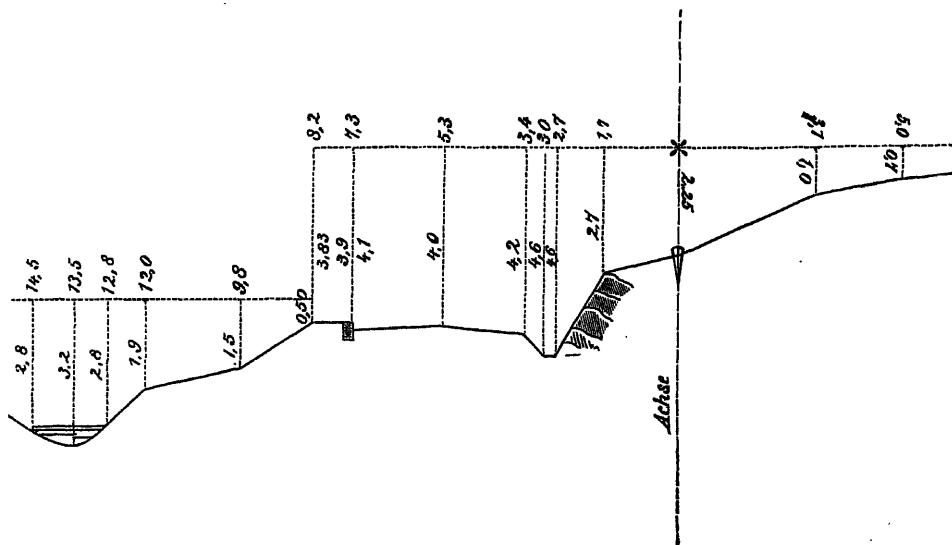
Fig. 1.
Handriss eines Querprofils (Massstab etwa 1 : 166).

Setzlatte.

Fig. 2
Setzlatte.

An steilen Abhängen verursacht das fortgesetzte Wechseln des Instrumenten-standpunkts sehr viele Mühe, deshalb empfiehlt es sich, hier, statt des Nivellier-Instruments, die in Fig. 2. gezeichnete *Setzlatte* mit Libelle anzuwenden. Die Setzlatte ist etwa 3^m lang, und wird mit einem etwa eben so langen vertikalen Massstab gebraucht.

Es lassen sich an Abhängen mit der Setzlatte Querprofile in einem Drittel oder einem Viertel der Zeit aufnehmen, welche zu der Aufnahme mit dem Nivellier-Instrument erforderlich wäre, und zwar mit aller wünschenswerten Genauigkeit.

Als Beispiel hiefür möge eine Erfahrung aus der Praktikanten-Zeit des Verfassers dienen. An den steilen Muschelkalk-Abhängen der Hall-Krailsheimer Linie wurden die Profile etwa 50^m hoch, mit der Setzlatte Fig. 2. aufgenommen, und unten und oben durch ein Längs-Nivellement versichert. Es galt als Regel, dass der Anschluss innerhalb 1 Fuss ($= 0{,}286^m$) stimmen musste.

Freihand-Instrumente.

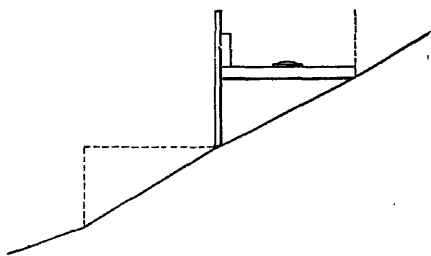
Zu Querprofilen und ähnlichen weniger genauen Nivellierungen kann man zuweilen ein kleines Instrumentchen in freier Hand anwenden, wie z. B. das im Folgenden, Fig. 3. S. 356 gezeichnete Freihand-Nivellier-Instrument von *Wagner*.

Das Fernrohr besteht zunächst aus einem Objektiv und *Huyghens*schem Okular. Seitwärts in die Wandung des Fernrohrs ist eine Reversions-Libelle L (Fig. 3.) parallel zur Absehlinie befestigt, und ihr gegenüber ist ein Planspiegel S angebracht.

Fig. 3.

Freihand-Nivellier-Instrument von *Wagner*.

Fig 3a. Anblick im Fernrohr.

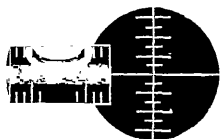
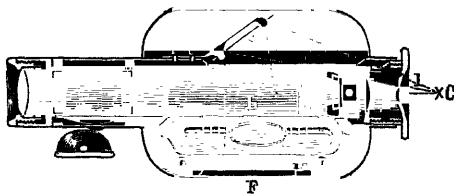



Fig. 3b. Horizontal-Schnitt.

(Hannov. Sammlung; Mechaniker *Tesdorpf.*)

Unmittelbar neben der eigentlichen Okularlinse befindet sich eine zweite plankonvexe Glaslinse l (Fig. 3b.) (die Libellenlinse) eingesetzt, und an die Okularlinse etwas angeschliffen. Die Fernrohrwandungen sind zum Durchlassen von Licht soweit durchbrochen, dass durch die Libellenlinse die Libellenblase sichtbar wird.

Bringt man das Auge an die Stelle von C (Fig. 3b.), so sieht man einesteils wie gewöhnlich, das Fernrohrgesichtsfeld mit dem Fadenkreuz, der Nivellierlatte u. s. w., und anderenteils gleichzeitig links daneben die Libelle, wie in Fig. 3a. dargestellt ist. Man ist somit in der Lage, die *Ablesung im Momente der Libelleneinspielung zu bewirken.*

(Weiteres hierüber, und über andere kleine Freihand-Instrumente, haben wir in der „Zeitschr. f. Verm. 1887" S. 1—13 mitgeteilt.)

Quer-Profile zu endgültigen Kostenberechnungen wird man wohl immer mit dem Nivellier-Instrument oder mit der Setzlatte aufnehmen; anders verhält es sich mit Profilen, welche nur zu vorläufigen Entwurfs-Arbeiten dienen sollen. Hier kann man mit Vorteil den Distanzmesser mit Höhenkreis, oder das Messband in Verbindung mit einem einfachen Höhengradbogen anwenden, wovon in dem Kapitel über Tachymetrie Weiteres angegeben werden wird.

Das *Auftragen der Quer-Profile* geschieht meist in grossem Massstab (1 : 200 bis 1 : 100) ohne Überhöhung. Die Zeichnung muss die dem Längen-Profil entsprechende vertikale Axe und einen Horizont enthalten, welcher durch die aus dem Längen-Nivellement entnommene Höhe des Axpunktes über N. N. geliefert wird. Wenn das Quer-Profil so gezeichnet ist, so kann man daraus die Höhe jedes Punktes über N. N. mit dem Zirkel abnehmen, ebenso wie den horizontalen Abstand eines Punktes von der Axe. Da man den Höhenmassstab des Längen-Profils gleich dem allgemeinen Massstab der Quer-Profile nimmt, so kann man hiernach Höhenmaasse (z. B. Auftrags- und Abtragshöhen) aus dem Längen-Profil in das Quer-Profil und umgekehrt übertragen. Die in das Quer-Profil eingezeichneten Auftrags- und Abtragsflächen werden mit dem Planimeter bestimmt.

§ 105. Flächen-Nivellierung.

Die Nivellierung einer *Fläche* verlangt die Aufnahme von so viel Punkten, dass der Verlauf der Oberfläche im ganzen daraus erkannt werden kann.

Eine besondere Art der Flächen-Aufnahme ist bereits in § 103. und § 104. behandelt, denn durch ein Längen-Profil mit den zugehörigen Quer-Profilen erhält man die Aufnahme eines Flächen-*Streifens*. Dabei können aber Punkte zwischen zwei Profile fallen, welche zwar nicht wichtig genug sind zur Anlage eines besonderen Zwischen-Profils, aber doch ungern vermisst werden.

Wenn eine Lagen-Aufnahme (Flurkarte) fertig vorliegt, so hat man nur noch die Höhen dazu zu bestimmen, um eine vollständige Flächen-Aufnahme zu haben.

Da dieser Fall sehr häufig eintritt, so behandeln wir hier die *Nivellierung einer Flurkarte* lediglich durch Horizontal-Zielungen mit einem einfachen Nivellier-Instrument, ohne der zweckmässigeren, später zu behandelnden tachymetrischen Methode, welche auch beim Vorhandensein einer Flurkarte die besten Dienste leistet, vorzugreifen.

Das Nivellieren einer Flurkarte (welches Verfasser mit lithographierten württembergischen Flurkarten im Massstab 1 : 2500 längere Zeit ausführte) ist im Grundsatz sehr einfach. Man macht zuerst ein versichertes Längen-Nivellement (*Vor*-Nivellement) durch das aufzunehmende Gebiet, längs Strassen, Eisenbahnen, Flussläufen u. s. w., jedoch auch so, dass die Anhöhen erfasst werden. Als Fixpunkte werden Marksteine und Strassensteine genommen, die nivellierten Höhen werden in die Karte eingeschrieben.

Bei der Flächen-Aufnahme selbst müssen zwei Ingenieure zusammen arbeiten, der erste führt die Karte, und weist den Lattenträger (oder deren zwei) zum Aufstellen an, zeichnet Punkte, welche nicht unmittelbar in der Karte gegeben sind, durch Abschreiten oder nach Schätzungen, mit dem Taschen-Kompass u. s. w. ein, und leitet das Ganze. Der zweite Ingenieur (Gehilfe) macht lediglich am Instrument die Lattenablesungen, und schreibt sie tabellarisch auf. Die Nummern der Kartenpunkte und der Tabellenangaben müssen sich entsprechen.

Nachdem zu Hause die Höhen in der Nivellierungstabelle berechnet sind, werden sie in die Karte eingeschrieben, womit die Aufnahme beendigt ist. Die etwa darauf folgende Konstruktion der Horizontalkurven wird wie bei der später zu behandelnden tachymetrischen Aufnahme gemacht, wie überhaupt das ganze Verfahren nur eine vereinfachte Tachymetrie ist. Formelle Regeln sind: Hervorhebung der Nivellierungs-*Wechselpunkte* in der Karte, dadurch, dass man die betreffenden Höhen auf Centimeter oder Millimeter angiebt, während sonst Decimeter genügen; ferner geordnetes Einschreiben aller Zahlen, Nummern links, Höhenzahlen rechts, horizontal neben den Punkt.

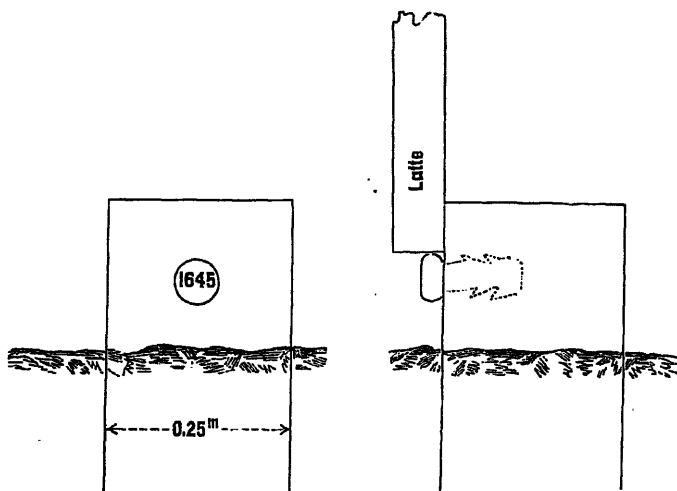
Auf mässig hügeligem Boden können zwei Ingenieure zusammen in wenigen Tagen leicht ein Blatt von 1 Q.Kilometer mit 500—1000 Punkten aufnehmen; die Berechnungsarbeit ist gering.

Wenn ausnahmsweise grössere Höhen-Unterschiede vorkommen, kann man sich durch Lattenverlängerungen helfen. (In Württemberg hatte man „Aufsatteln“ bis zu 30 Fuss Höhe.) Auf gebirgigem Boden wird aber das Verfahren mühsam und ungenau, und muss dann durch Tachymetrie ersetzt werden.

§ 106. Festlegung und Versicherung der Nivellierungs-Punkte.

Um Nivellierungs-Punkte auf kürzere oder längere Zeit zu bezeichnen und zu versichern, hat man verschiedene Mittel, z. B. Einschlagen von Holzpflöcken in den Boden, Setzen von Steinen, Einhauen von Zeichen (△ oder + u. s. w.) in vorhandene Steine, Trittstufen, Sockelmauern.

In Fig. 1. ist die Anordnung der Nivellierungs-Festpunkte gezeichnet, welche die trigonometrische Abteilung der Landes-Aufnahme hat. In einen etwa 0,75^m tief versetzten Granitstein ist seitlich ein eiserner Bolzen eingegossen, dessen Oberfläche

Fig. 1.
Nivellierungs-Bolzenstein der Landes-Aufnahme.
(Massstab 1 : 10.)

als Nivellierungs-Punkt gilt, weshalb die Latte auf diesen Bolzen (und nicht etwa auf den Stein) gesetzt wird.

Jeder Bolzen hat eine Nummer, z. B. 1645 in Fig. 1.

Die Numerierung geht jetzt etwa bis 7000, und da die Steine in der Regel in Abständen von 2^{km} stehen, deutet dieses auf eine Länge von 14 000^{km} Nivellierungen erster Ordnung.

Hierzu ist nur eine Bemerkung zu machen: In Fig. 1. ist als Nummer auf dem Eisenbolzen 1645 geschrieben; der Bolzen bei der Technischen Hochschule in Hannover trägt aber in Wirklichkeit die Bezeichnung $\ddot{6}45$, d. h. 645 mit zwei Punkten darüber, wobei die zwei Punkte bedeuten sollen, dass es sich um 645 im zweiten Tausend handelt. Diese Bezeichnungs-Art, welche man auf den meisten Bolzen der Landes-Aufnahme in Norddeutschland findet, war früher auch in den Druckwerken und in der Schrift üblich, ist aber jetzt amtlich wieder verlassen.

Nach diesem haben wir die *Mauer-Bolzen* (Fig. 2. S. 359) zu betrachten, welche in bestehende Sockel-Mauern u. s. w. eingegossen werden, und auch zum Aufsetzen der Latte dienen.

Solche Mauer-Bolzen werden seit einigen Jahren auch von der Landes-Aufnahme gesetzt; namentlich hat man sie aber bei *Stadt-Nivellierungen*, z. B. für das Stadt-Nivellement von Hannover und Linden, dessen Ausgleichung in § 115. mitgeteilt werden soll, wurden mehrere Hundert solcher Mauer-Bolzen wie Fig. 2. gesetzt. Die Mauer-Bolzen sind den Bolzensteinen vorzuziehen.

Fig. 2.
Mauer-Bolzen.

Fig. 3. zeigt eine *Haupt-Höhen-Marke* der trigonometrischen Abteilung der Landes-Aufnahme, wie sie seit einigen Jahren gesetzt werden, und zwar ist Fig. 3. mit der Zahl 56,297^m über Normal-Null derjenigen Marke entsprechend, welche sich an der Technischen Hochschule in Hannover befindet. Die Höhen-Marken (Fig. 3.) werden ebenso wie die Mauer-Bolzen (Fig. 2.) in gutes Sockelmauerwerk M eingegossen und gegen das Herausziehen durch einen Querstift S versichert. Als Nivellierungs-Punkt zum Aufsetzen der Latte gilt der höchste Punkt O.

Was das Einsetzen der *Zahl*, z. B. 56,297, betrifft, so muss dieses später erfolgen. Das innere Plättchen wird durch zwei Schrauben a und b (Fig. 3.) gehalten, und kann durch ein anderes ersetzt werden. Ehe die Zahl durch Nivellieren gefunden ist, hat man ein Plättchen *ohne* Zahl; erst später nach Vollendung des Nivellements und der Berechnung wird das endgültige Plättchen eingeschraubt.

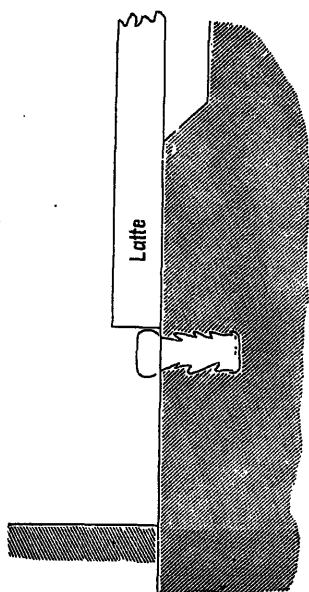
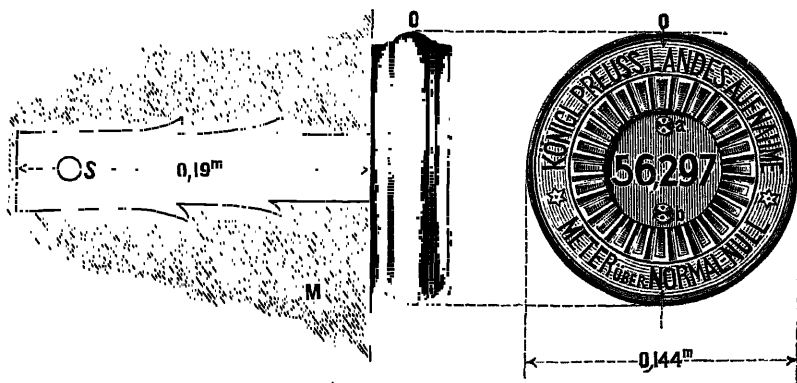
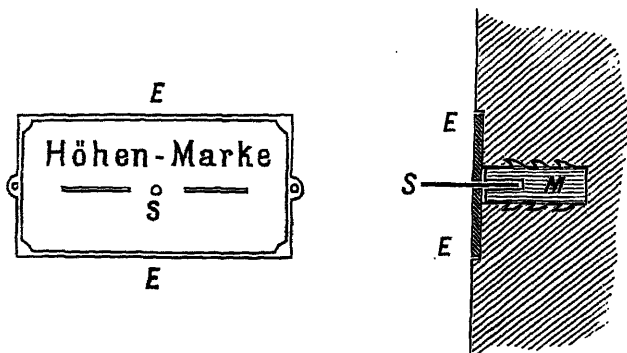



Fig. 3.
Haupt-Höhen-Marke der Landes-Aufnahme.

Wir wollen hier auch eine Mitteilung über ältere, weniger zu empfehlende Höhen-Marken einschalten (Fig. 4. S. 360), weil solche noch vielfach vorhanden sind (z. B. in Sachsen, Württemberg, Baden).

Diese in den Jahren etwa 1860—1870 gesetzten Höhen-Marken befinden sich in Manneshöhe, etwa 1,5^m *über* dem Bahnsteig, an Bahnhöfen u. s. w. Der Messing-

Bolzen *M* mit gebohrtem Loch, in welchen ein Stift *S* gesteckt werden kann, ist in die Mauer eingegossen und durch eine Schildplatte *E* mit der Aufschrift „Höhen-Marke“ überdeckt.

Fig. 4.
Ältere Höhen-Marke.
(Massstab 1 : 5.)

Will man mit einer Nivellierung anschliessen, so hängt man mit dem Stifte *S* eine besondere kleine *Hänge-Latte* an. Im ganzen ist diese Anordnung (Fig. 4.) nicht zu empfehlen, und kommt allmählich in Abgang.

Zum Schluss geben wir noch in Fig. 5. S. 361 eine Darstellung des im Jahre 1879 in Berlin errichteten *Normal-Höhen-Punktes,* und schicken hiezu folgendes voraus:

Früher hatte jedes Land oder jede Provinz, ja fast jede Stadt, ihren besonderen Höhen-Ausgangspunkt.

Alle diese Landes- und Provinzial-„Höhen über dem Meer“ stimmten aber an den Grenzen oft um mehrere Meter nicht überein, und niemand wusste zu sagen, was eigentlich eine „Höhe über dem Meer“ genau genommen sein soll.

Nachdem nun vollends durch Nivellierungen sicher gestellt war, dass die Mittel-Wasser-Höhen verschiedener Meere überhaupt nicht auf Decimeter übereinstimmen, entschloss sich das preussische Central-Direktorium der Vermessungen, kurzer Hand, eine Höhe anzunehmen, welche innerhalb jener Schwankungen willkürlich, dem Hergebrachten sich möglichst anschliessen, dann aber in aller Strenge festgehalten werden sollte.

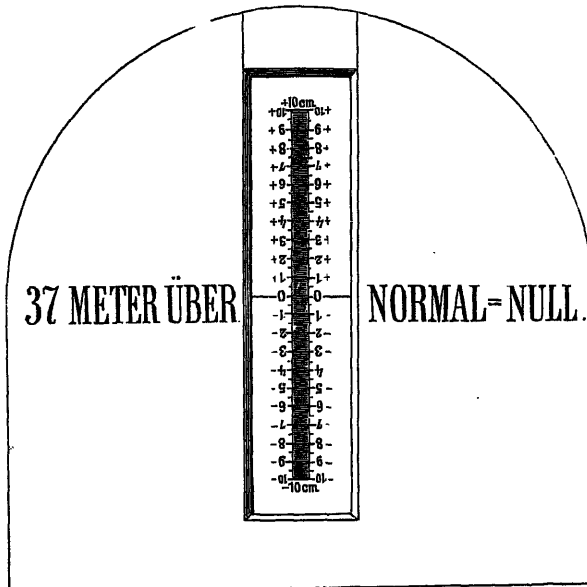
Das Hergebrachte war für Nordwest-Deutschland der Amsterdamer Pegel, und die amtliche Festsetzung geschah am 22. März 1879 an der Berliner Sternwarte durch eine Marke, welcher die Höhe *„37 Meter über Normal-Null“* zugeteilt wurde.

Als Träger des Normal-Höhenpunktes dient der Nordpfeiler der Berliner Sternwarte. In diesen Pfeiler ist ein 1,70^{m} langer Syenit-Balken eingemauert, welcher an seiner frei vorstehenden vertikalen Stirnfläche auf einem eingeschobenen Emaille-Glas eine Millimeter-Skala von 20^{cm} Länge trägt, deren Mittelstrich den Normal-Höhenpunkt bezeichnet.

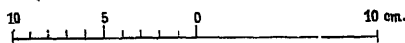
Ausser dem Skala-Stein, welcher beim nivellitischen Anschluss mit seiner 20^{cm} langen Teilung gewissermassen selbst als Nivellier-Latte dient, wurde noch an dem Westpfeiler der Sternwarte ein aus Achat gefertigter *Versicherungs-Bolzen* eingesetzt,

welcher zum unmittelbaren Aufsetzen einer beliebigen Nivellier-Latte eingerichtet wurde und um 0,841^{m} tiefer als der Normalpunkt selbst (also 36,159^{m} über Normal-Null) liegt.

Der „*Normal-Höhenpunkt*“ ist eine Art wissenschaftliches *Symbol* der im Jahr 1879 vollzogenen Nivellierungs-Regelung in Preussen, an welche sich inzwischen auch die anderen deutschen Staaten angeschlossen haben.

Fig. 5.
Der Normal-Höhenpunkt für das Königreich Preussen an der Sternwarte zu Berlin.

Vorderfläche des Skala-Steins.

Querschnitt des Skala-Steins.

Massstab 1:4 d. n. G.

§ 107. Feinere Nivellier-Instrumente.

Das einfache Nivellier-Instrument von § 102. S. 347 kann in mannigfacher Beziehung weiter entwickelt werden.

Um die verschiedenen entwickelteren Formen von Nivellier-Instrumenten zu beurteilen, ist eine Einteilung wünschenswert. *Ein* Grundsatz der Einteilung ist nicht wohl zu finden.

Wir teilen daher die Nivellier-Instrumente in *zweifacher* Weise ein:

A) Unterscheidung in Beziehung auf *Horizontalstellung:*

1) Allgemeine Horizontalstellung (gewöhnlich mit drei Stellschrauben, wie beim Theodolit), wobei die Libellen-Axe mittelst der Stellschrauben rechtwinklig zur vertikalen Axe gestellt wird, so dass die Libelle beim Umdrehen um letztere in allen Lagen einspielt.

2) Besondere Horizontalstellung, wobei nur in jeder einzelnen Zielung die Libelle horizontal gestellt wird.

3) Vereinigung beider Anordnungen, mit roher allgemeiner, und feiner besonderer Horizontalstellung.

Die Anordnung 1) kommt am häufigsten vor, besonders bei weniger genauen Instrumenten; 2) kommt selten vor; 3) ist die beste Anordnung und kommt bei den genauesten Instrumenten zur Verwendung. (Neigungsschraube *S* Fig. 2. S. 364 und *H* Fig. 3. S. 365.)

B) Unterscheidung in Bezug auf die Verbindung der einzelnen Instrumententeile unter sich:

1) Feste Verbindung von Libelle, Fernrohr und Fussgestell.

2) Lösbarkeit der Verbindung von Libelle, Fernrohr und Fussgestell.

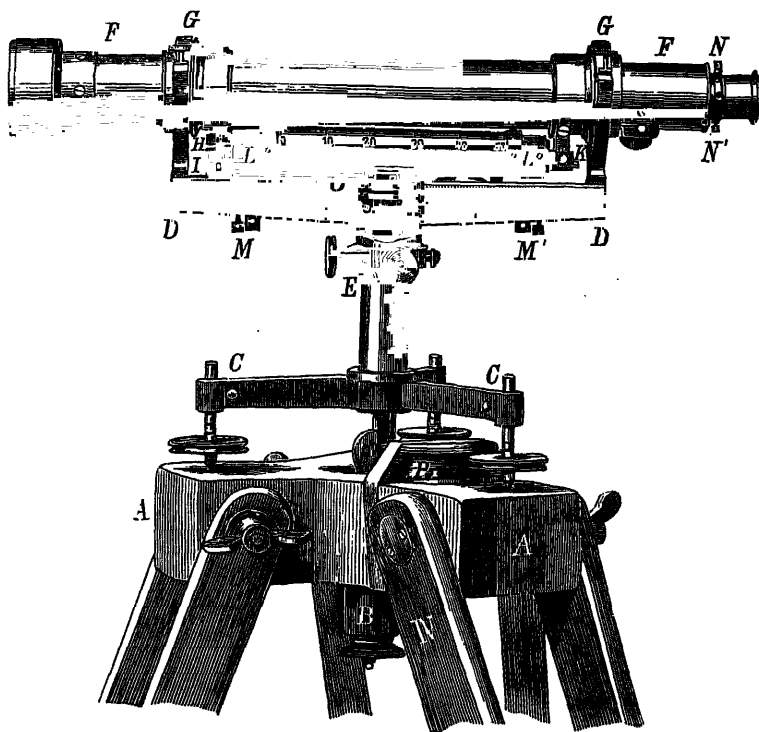
3) Teilweise Lösbarkeit dieser Teile.

Die vollkommen feste Verbindung kommt namentlich bei weniger genauen Instrumenten vor, und empfiehlt sich hier wegen der dadurch verbürgten Unveränderlichkeit des Instruments. Instrumente für feine Messungen sollen jedenfalls eine Drehung der Libelle gestatten. Im übrigen ist auch bei feinen Instrumenten die Beweglichkeit der Teile nicht immer nützlich (Einspielen von Staub unter eine Setz-Libelle u. s. w.)

Nach diesem betrachten wir einige ausgewählte Nivellier-Instrumente Fig. 1. S. 363, Fig. 2. S. 364 und Fig. 3. S. 365 näher.

Fig. 1.

Grosses Nivellier-Instrument.

(Massstab 1:4,3 d. n. Gr. Fernrohr-Länge = 44cm.)

(Trigon. Abteilung der Landes-Aufnahme; Mechaniker *Bamberg.*)

Brennweite des Objektivs = 42cm, Öffnung des Objektivs = 4,1cm.

Vergrösserung (*Ramsden*) = 30fach, Empfindlichkeit der Libelle = 4,1″ auf 1 Strich.

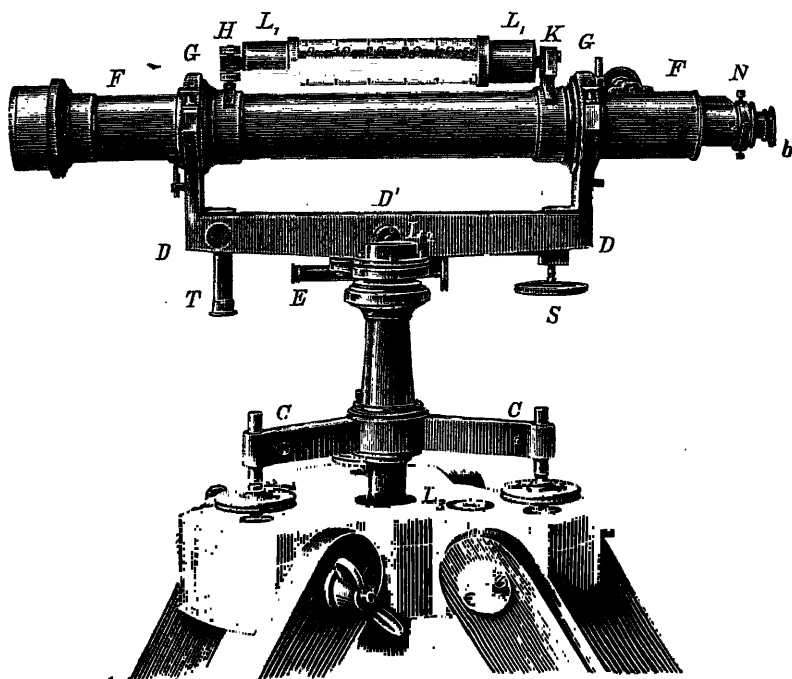
Das Fernrohr *F* kann in den Lager-Ringen *G* gedreht und umgelegt werden. Dabei bleibt die Haupt-Libelle *L* mit dem Fernrohr fest verbunden.

Zum vorläufigen Einstellen sind zwei Dosen-Libellen *O* und *P* angebracht.

Der Träger *D* hat seinen Drehpunkt in der Mitte, und bei *M* und *M'* Richteschrauben mit Zug und Druck.

Weitere Berichtigungsmittel sind die Faden-Richteschrauben *N* , *N'*, und an der Libelle links Schraube und Gegenmutter *H* , *I* und rechts *K* für die Libellen-Kreuzung.

(Mit diesem Instrument haben wir, im Auftrage der Preussischen Landes-Aufnahme, im Jahre 1881, mehrere Hauptlinien in Baden nivelliert.)

Fig. 2.
Grosses Nivellier-Instrument.
(Massstab 1:4,4 d. n. Gr. Fernrohr-Länge = 44cm)

(Hannov. Sammlung; Mechaniker *Bamberg.*)

Brennweite des Objektivs = 42cm, Öffnung des Objektivs = 4,0cm.

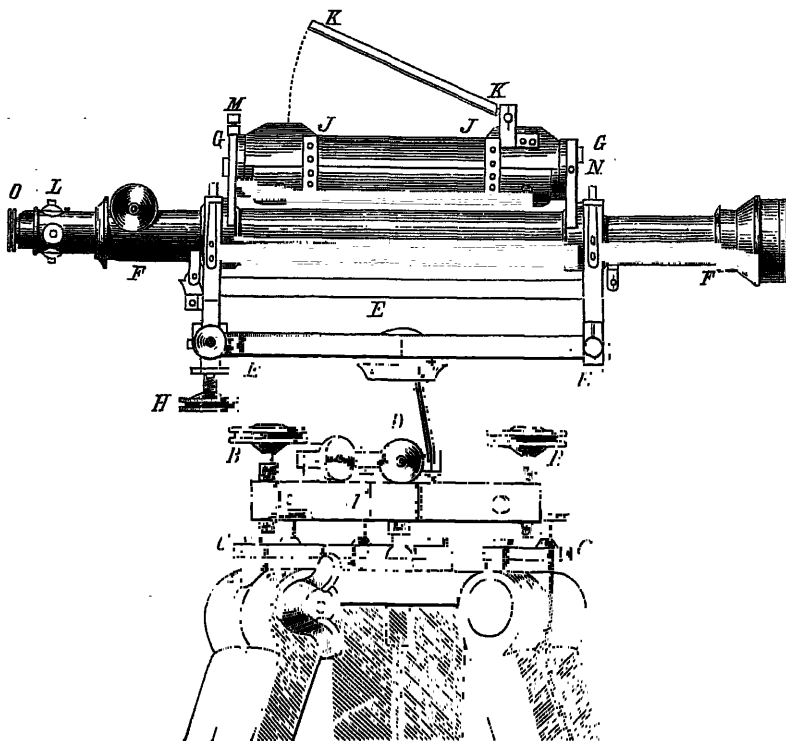
Vergrösserung (*Ramsden*) = 37fach. Empfindlichkeit der Libelle = 6,5″ auf 1 Strich.

Das Fernrohr F kann in den Lager-Ringen G gedreht und umgelegt werden, dabei bleibt die Haupt-Libelle L_1, welche doppelt geschliffen ist, fest mit dem Fernrohr verbunden. L_2 ist eine am Träger D angeschraubte Dosen-Libelle zum vorläufigen Einstellen, und L_3 bedeutet eine in den hölzernen Stativkopf versenkte Dosen-Libelle zu gleichem Zweck.

Der einzige wesentliche Unterschied dieses Instrumentes Fig. 2. gegen Fig. 1. besteht in der Neigungsschraube S mit der Gegenfeder T, wodurch der Arm $D\,D$ um seine *Mitte* (bei D') gedreht werden kann.

Diese Schraube S macht in einer gewissen Stellung die Libellen-Axe $L_1\,L_1$ rechtwinklig zur vertikalen Axe. Die Faden-Richteschrauben N und die Libellen-Richteschrauben H und K sind wie bei Fig. 1.

Am Okular rechts bei b ist ein blaues Blendglas angebracht zur Beobachtung bei greller Sonnen-Beleuchtung.

Fig. 3.
Nivellier-Instrument mit Setz-Libelle.
(Massstab 1 : 4 d. n. Gr. Fernrohr-Länge 42cm.)

(Karlsr. Sammlung; Mechaniker *Kern.*)

Brennweite des Objektivs = 37cm, Öffnung des Objektivs = 3,5cm.

Vergrösserung (*Ramsden*) = 30fach. Empfindlichkeit der Libelle = 6,8″ auf 1 Strich.

Der Dreifuss *A* mit den Stellschrauben *B* wird durch Plättchen *C* auf dem Stativ gehalten. Die Säule *D* enthält die vertikale Umdrehungs-Axe.

Das Gestell *E* hat rechts bei *E″* ein Gelenk und links bei *E* eine feine Neigungsschraube *H* zur feinen Horizontalstellung.

Die Libelle *G* ist in ein *hölzernes* Gehäuse mit übergedeckter Glasplatte *J* eingeschlossen. Mit der Libelle ist ein schiefer Spiegel *K* verbunden, zum Ablesen des Standes der Blase vom Okular aus.

Das Fernrohr kann in seinen Lagern gedreht und umgelegt werden, und die Libelle kann auf dem Fernrohr umgesetzt werden.

Die Neigungsschraube *H* macht in einer bestimmten Stellung die Libellen-Axe rechtwinklig zur vertikalen Umdrehungs-Axe, ausserdem sind zweierlei Berichtigungsmittel vorhanden; erstens die Faden-Richteschrauben *L* und ferner zwei Libellen-Richteschrauben *M* vertikal, und *N* horizontal (für Kreuzung) wirkend.

Prüfung und Berichtigung eines Nivellier-Instrumentes mit beweglichem Fernrohr, mit beweglicher Libelle und mit Neigungsschraube.

Ein solches Instrument ist in Fig. 3. S. 365 gegeben, und obgleich wir dieses nicht für das Beste halten, behandeln wir doch zuerst die Berichtigung desselben, weil wir hierin nahezu den allgemeinsten Fall haben, welcher viele andere Fälle (z. B. auch Fig. 1. und Fig. 2. S. 363 und 364) in sich schliesst.

Vorausgeschickt muss werden, dass nichts hindert, ein Instrument, Fig. 1., Fig. 2. oder Fig. 3. S. 363, 364, 365, ebenso zu behandeln, wie früher das einfache Instrument Fig. 1. und Fig. 2. S. 347, indem man von der Beweglichkeit einzelner Teile keinen Gebrauch macht; und die wichtigste Nivellier-Probe, Messung aus der *Mitte* (Fig. 4. § 102. S. 349), behält auch für feinere Instrumente ihre Bedeutung. Indessen gehen wir nun zur Behandlung des Instrumentes Fig. 3. S. 365 mit *beweglichen* Teilen über.

Man hat wieder dieselben zwei Bedingungen, wie bei dem einfachen Instrument nach dem Schema Fig. 3. § 102. S. 348; wir nehmen die Bedingungen diesesmal in dieser Aufeinanderfolge:

[1] die Ziel-Axe des Fernrohrs und die Libellen-Axe sollen parallel sein;

[2] die Libellen-Axe soll rechtwinklig zur vertikalen Umdrehungs-Axe sein.

Die Einzelbetrachtung gestaltet sich so:

[1] *Ziel-Axe parallel der Libellen-Axe.*

Dieses giebt Unter-Abteilungen:

1) *Centrieren des Fernrohrs*, d. h. man bringt die Ziel-Axe des Fernrohrs zum Zusammenfallen mit der durch die Lagerringe bestimmten geometrischen Axe (oder man macht wenigstens diese zwei Axen in sehr kleinem Abstand von einander parallel). Die vollständige Centrierung der Ziel-Axe erfordert Centrierung des Objektivs und Centrierung des Fadenkreuzes.

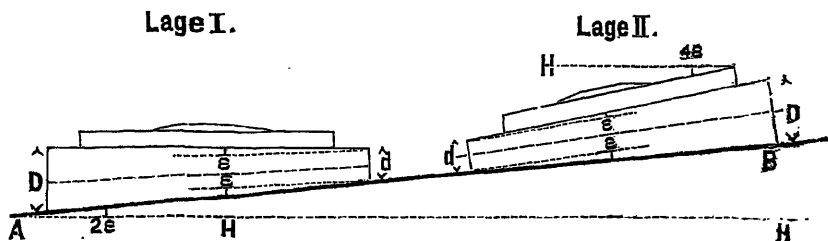
Wir setzen vorerst voraus, dass das Objektiv sehr nahe centriert sei, und unter dieser Voraussetzung wird die Centrierung des Fadenkreuzes so bewerkstelligt: Man wählt einen ziemlich entfernten Punkt (damit eine kleine Excentricität des Objektivs ohne Einfluss bleibt) und zielt ihn scharf an. Wenn dann beim Drehen des Fernrohrs um seine Lager-Axe, das Fadenkreuz nicht auf dem angezielten Punkte bleibt, so ist das Fadenkreuz entsprechend (um die Hälfte) in dem Okularkopf mittelst der Faden-Richteschrauben zu verschieben.

Damit hat man aber noch nicht das Fadenkreuz im strengen Sinn centriert, sondern man hat nur die Ziel-Axe (Verbindungslinie zwischen dem optischen Mittelpunkt des Objektivs und dem Fadenkreuzpunkt) *parallel* der geometrischen Fernrohr-Axe gemacht. Um vollends zu untersuchen, ob der Abstand dieser beiden Axen merklich ist, nimmt man im Gegensatz zu der soeben gemachten Untersuchung, wobei ein sehr *ferner* Zielpunkt benützt wurde, einen möglichst *nahen* Punkt, und wiederholt das Verfahren. Wenn sich dann beim Drehen des Fernrohrs um seine geometrische Axe eine Verschiebung des Fadenkreuzes gegen den angezielten Punkt zeigt, so ist dadurch eine Excentricität des Objektivs bewiesen, welche nicht ohne Hilfe des Mechanikers weggeschafft werden kann. Man trifft selten ein so schlecht centriertes Objektiv, dass die Excentricität schädlich wäre (vgl. übrigens hiezu den Schluss von § 108.).

2) Nach der Centrierung hat man zu untersuchen, ob die Libellen-Axe parallel der geometrischen Fernrohr-Axe ist, und zwar trennt sich diese Untersuchung wieder in zwei Teile:

a) Es ist zu untersuchen, ob die Libellen-Axe parallel ist der oberen Mantel-Linie des durch die beiden Fernrohr-Lagerringe bestimmten Cylinders (oder Kegels). Diese Untersuchung geschieht durch Umsetzen der Libelle auf dem Fernrohr, mit Korrektion der Hälfte des Ausschlags an der Richteschraube der Libelle. Hiebei ist auch die Libellen-Kreuzung nach S. 155 zu berichtigen. (Wir werden nachher in § 108. die Theorie der Libellen-Kreuzung besonders behandeln.)

b) Es ist die Frage aufzuwerfen, ob die beiden Fernrohr-Lagerringe gleiche Durchmesser haben. Diese Frage wird dadurch beantwortet, dass man, nachdem die Libelle zum Einspielen gebracht ist, das Fernrohr samt der darauf sitzenden Libelle in den Lagern umlegt.

Fig. 4.
Ungleichheit der Ring-Durchmesser D und d des Fernrohrs.

Dieses ist in Fig. 4. klar gemacht:

Hiebei bedeutet HH die Horizontale, und AB eine schiefe Gerade, auf welcher das Fernrohr mit zwei *ungleichen* Ring-Durchmessern D und d, in zwei Lagen I. und II. aufgelegt wird.

In Lage I. ist das dicke Ende D links und das dünne Ende d rechts, die Libelle, welche auf ihrer Unterlage durch Umsetzen richtig gestellt wurde, spielt ein, folglich hat die Gerade AB eine Neigung $= 2\varepsilon$, indem ε der kleine Winkel ist, welchen die Fernrohr-Axe gegen die Libelle bildet infolge der Ungleichheit der Ring-Durchmesser D und d.

Setzt man nun das Fernrohr samt der Libelle in die Lage II. um, so dass nun das dicke Ende D nach rechts und das dünne Ende d nach links kommt, so müssen die verschiedenen Neigungen ε, welche in Lage I. sich gegenseitig aufgehoben hatten, nun in Lage II. sich häufen, und die Libellen-Axe macht nun in Lage II. den Neigungswinkel 4ε gegen die Horizontale H.

Die Anwendung mag ein Beispiel zu Fig. 4. zeigen:

Lage I.		*Lage II.*	
Blase links	Blase rechts	Blase links	Blase rechts
8,4	31,8	34,0	10,5
20,1		22,25	

$$4\varepsilon = 2{,}15 \qquad \varepsilon = 0{,}54 \text{ Striche.}$$

Ein Libellen-Strich entspricht einem Winkel von 6,8″, also in Sekunden: $\varepsilon = 3{,}7''$.

Hier kommt eigentlich noch eine weitere Frage hinzu, nämlich, in welcher Weise die ungleichen Ring-Durchmesser D und d in die etwa ringförmigen oder gabelförmigen Lager einsinken; und die vorstehende Betrachtung mit Fig. 4. gilt nur, wenn die Ring-Durchmesser D und d auf den tiefsten Punkten der Lager aufruhen. Wir übergehen aber diese letzte Feinheit, betreffs etwaiger Gabel-Lager (sogen. Y-Lager), mit Verweisung auf Begründung am Schluss dieses §. (Das verschiedene Einsinken in solche Lager wird in astronomischen Werken für die horizontale Axe untersucht, vgl. z. B. in des Verfassers „Grundzüge der astron. Zeit- und Ortsbestimmung", Berlin 1885, S. 46).

[2] *Die Libellen-Axe soll rechtwinklig zur vertikalen Umdrehungs-Axe sein.*

Um diejenige Stellung der Neigungsschraube (H Fig. 3. S. 365 oder S Fig. 2. S. 364) zu ermitteln, bei welcher die Libellen-Axe rechtwinklig zur vertikalen Axe ist, bringt man die Libelle zum Einspielen, dreht um 180°, und schafft die Hälfte des sich zeigenden Libellen-Ausschlages mit den Fuss-Stellschrauben, die andere Hälfte mit der Neigungsschraube weg. Die so gefundene Normalstellung der Neigungsschraube wird durch irgend welchen Zeiger zum leicht Wiederfinden eingerichtet.

Das Vorstehende bezieht sich im ganzen auf das Instrument Fig. 3. Soweit die Beweglichkeit der Libelle nicht in Frage kommt, gilt es auch für Fig. 1. und Fig. 2., und man hat damit folgendes für diese zwei letzteren Instrumente:

1) Centrieren des Fadenkreuzes mittelst der Fadenkreuz-Richteschrauben $N N'$.
2) Untersuchung der Parallelität der Libellen-Axe und der Fernrohr-Umdrehungs-Axe durch Umlegen des Fernrohrs in den Lager-Ringen, mit Berichtigung an den vertikal wirkenden Libellen-Richteschrauben H.
3) Untersuchung der Libellen-Kreuzung durch schwaches seitliches Drehen des Fernrohrs in seinen Lager-Ringen bei einspielender Libelle, Berichtigung an der horizontal wirkenden Libellen-Schraube K.
4) Richtigstellung der Fernrohr- und Libellen-Axe rechtwinklig zur vertikalen Umdrehungs-Axe, durch Umdrehung um letztere, Berichtigung an den Trägerschrauben M und M' Fig. 1. oder an der Neigungsschraube S Fig. 2.
5) Die zur vorläufigen Einstellung dienende Dosen-Libelle O Fig. 1. oder L_2 Fig. 2. muss natürlich ebenfalls zum allgemeinen Einspielen beim Umdrehen des Instruments gebracht werden.

Die unter 2) angegebene Untersuchung hat nur dann völlig den gewünschten Erfolg, wenn die in den Lagern liegenden Fernrohr-Ringe gleiche Durchmesser haben. Ob dieses genau der Fall ist, kann an den Instrumenten Fig. 1. und Fig. 2. selbst nicht untersucht werden. Aus diesem Grunde, und weil die im vorstehenden beschriebenen Einzel-Untersuchungen überhaupt mühsam sind, benützen wir während der Messungen selbst zuweilen die bekannte Probe mit *ungleichen* Zielweiten zwischen zwei Lattenständen, welche im durchlaufenden Nivellement bereits mit *gleichen* Zielweiten nivelliert waren (vgl. Fig. 4. § 102. S. 349). Stimmt diese Probe, so braucht man nur noch zuweilen die Libellen-Kreuzung nachzusehen, um immer mit vollem Vertrauen fortarbeiten zu können.

Über die Neigungsschrauben S Fig. 1. und H Fig. 3. ist noch einiges zu sagen: Wenn die Fuss-Stellschrauben genügend weit gestellt sind, und nicht zu groben Gang haben, so kann man diese Fuss-Schrauben selbst dazu benützen, um in jeder *einzelnen* Zielung die Libelle schärfer zu stellen als das *im allgemeinen* möglich

ist; es entstehen dadurch aber beständige kleine Hebungen und Senkungen des Instrumentes, welche zu den Latten-Ablesungen hinzu treten, und trotz ihrer Kleinheit störend werden können. Dieses wird vermieden, wenn man eine besondere Neigungsschraube S Fig. 2. S. 364 hat, welche das Gestell D um die *Mitte* (bei D') dreht, während in Fig. 3. S. 365 der *seitliche* Drehpunkt E'' jene Hebungen und Senkungen zulässt.

Unser Instrument Fig. 2. S. 364 mit der Haupt-Libelle L_1, welche *fest* mit dem Fernrohr verbunden ist, jedoch Drehung gestattet zur Kreuzungs-Bestimmung, mit der Dosen-Libelle L_2 und mit der Neigungsschraube S, hat bis jetzt alle unsere Wünsche befriedigt. (Die Libelle L_1 ist doppelt geschliffen, wovon wir aber keinen Gebrauch machen, s. S. 371.)

Eine letzte Vervollständigung feiner Nivellier-Instrumente wurde in neuerer Zeit von verschiedenen Seiten (*Vogler*, *Nagel*) angebracht in einer *besonderen Setz-Libelle*, welche etwa in Fig. 1. S. 363 bei den Lager-Ringen G aufzusetzen wäre.

Wenn man in jedes Nivellement von Zeit zu Zeit die Mitten-Probe (Fig. 4. § 102. S. 349) einschaltet, so ist eine besondere Setz-Libelle nicht nötig.

In manchen Nivellierungs-Anweisungen wird die Forderung gestellt, der Nivellierende solle jeden Tag sein Instrument durch Libellen-Umsetzungen u. s. w. prüfen, und kleine gefundene Fehler jeweils *an den Richteschrauben verbessern.* —

Die Erfahrungen der besten Nivellierungen, die wir haben, weisen darauf hin, dass die letzten Verfeinerungen nicht durch Fehler-Verbesserung am Instrument, sondern im Nivellier-Verfahren selbst zu suchen sind, wobei die letzten kleinen Instrumenten-Fehler nicht wiederholt zu ändern, sondern *konstant* zu erhalten und im Messungs-Verfahren zu bestimmen und unschädlich zu machen sind.

§ 108. Libellen-Kreuzung, Doppel-Libelle und Okular-Auszug.

Einige Nebenfragen, welche zur Theorie der Nivellier-Instrumente (§ 102. und § 107.) in Beziehung stehen, behandeln wir noch besonders:

I. Libellen-Kreuzung (Fig. 1. S. 370).

Wenn die Libellen-Axe mit der Ziel-Linie des Fernrohrs nicht in einer vertikalen Ebene liegt, sondern, im Grundriss gesehen, mit der Ziel-Linie des Fernrohrs einen kleinen Kreuzungs-Winkel φ macht, so kann daraus ein Nivellier-Fehler entstehen.

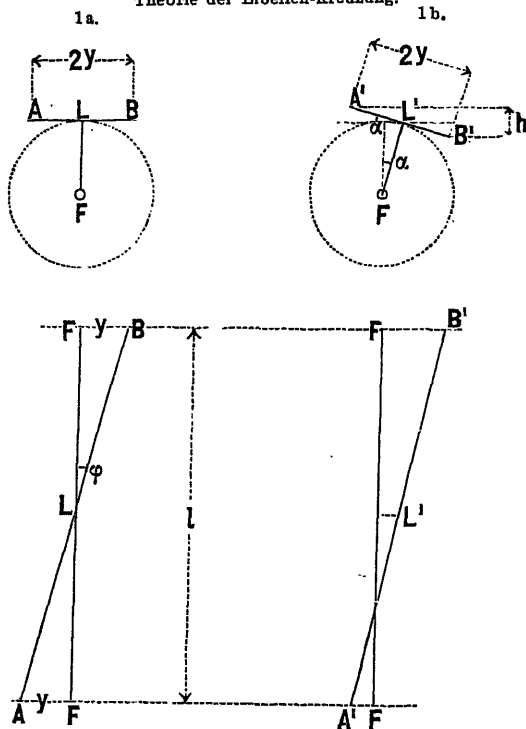
Allerdings, wenn die Libellen-Axe und die Ziel-Axe in zwei parallelen horizontalen Ebenen liegen, dann ist kein Fehler zu fürchten, aber darauf kann man im allgemeinen nicht rechnen, namentlich dann nicht, wenn man die Horizontalstellung quer zur Ziel-Richtung weniger scharf macht als die Horizontalstellung in der Ziel-Richtung selbst.

In Fig. 1a. und Fig. 1b. (S. 370) sei FF die Ziel-Axe des Fernrohrs und zugleich Dreh-Axe (etwa wie in Fig. 2. § 107. S. 364). Die Libellen-Axe ALB habe im Grundriss eine Kreuzung φ, und zeigt sich daher im Aufriss nicht als ein Punkt L, sondern als eine kurze Gerade $AB = 2y$.

In Fig. 1b. ist eine kleine Querdrehung α um die Axe F angenommen, und dadurch erscheint auch die kurze Gerade $A' B' = 2y$ im Aufriss (Fig. 1b.) um den Winkel α gegen die Horizontale geneigt, und es handelt sich um den Höhen-Unterschied h der Punkte A' und B' in Fig. 1b. Dieser ist:

$$h = A' B' \sin \alpha = 2\, y \sin \alpha.$$

Es ist aber für eine Libellen-Länge l nach Fig. 1a.:

Fig. 1.
Theorie der Libellen-Kreuzung.

$$y = \frac{l}{2} \operatorname{tang} \varphi \quad \text{oder} \quad = \frac{l}{2} \varphi$$

folglich:

$$h = l\, \varphi \sin \alpha$$

oder:

$$\frac{h}{l} = \varphi \sin \alpha = n \qquad (1)$$

Dieses ist die Neigung n, welche die Libelle infolge des Kreuzungswinkels φ annimmt, oder auch umgekehrt die Neigung der Ziel-Linie, wenn man nachher die Libelle in der Ziel-Richtung wieder horizontal einstellt.

Oder kurz, der Wert $\varphi \sin \alpha$ nach (1) stellt den Fehler vor, mit welchem wir uns hier beschäftigen.

Es könnte auf den ersten Blick scheinen, dass dieses Produkt $\varphi \sin \alpha$ immer verschwindend klein sei, weil sowohl φ als α allerdings klein sind, und beim Theodolit ist in der That die Libellen-Kreuzung kaum zu beachten (vgl. S. 155, Libellen-Kreuzung als Nebenfrage). Indessen beim Nivellieren ist eine auch noch so kleine Ziel-Neigung so wichtig, dass auch jenes Produkt $\varphi \sin \alpha$ wohl von Einfluss sein kann.

Bei sorgloser Behandlung kann die Kreuzung selbst, d. h. φ, wohl $1° = 3600''$ betragen; wenn nun auch nur $\alpha = 1'$ ist, so erreicht $\varphi \sin \alpha$ bereits den Wert von $1''$, d. h. die Ablesungs-Grenze. Die Quer-Neigung α kann auch aber leicht grösser werden.

Alle diese theoretischen Betrachtungen führen zu folgenden Regeln:

1) Wenn man ein *feineres* Instrument auszuwählen hat, so sehe man jedenfalls darauf, dass das Fernrohr mit der Libelle eine grössere Quer-Drehung α gestatte, damit der Kreuzungsfehler φ bequem untersucht werden kann, wie schon beim Theodolit S. 155 angegeben wurde.

Nach der Prüfung und Berichtigung der Kreuzung φ, mittelst der seitlichen Libellen-Richteschrauben, sorgt man dann durch eine Anlehnung, dass eine Quer-Drehung α nicht zufällig eintritt.

2) Wenn es sich um ein gröberes Instrument handelt, bei welchem das Fernrohr und die Libelle beide *fest* mit dem Untergestell verbunden sind, so ist manchmal (für Querprofil-Aufnahmen u. s. w.) die Libellen-Kreuzungsfrage unwesentlich; da man aber mit solchen festen Instrumenten wohl auch feinere Arbeiten, Längen-Profile u. s. w., macht, so ist so zu verfahren: Man stellt das in allen anderen Beziehungen berichtigte Instrument so auf, dass die Ziel-Linie parallel der Verbindungs-Linie zweier Fussschrauben wird, und zielt so nach einer Latte. Nun sieht man zu, ob das Umdrehen der *dritten* Stellschraube, welche der Quere nach wirkt, die Latten-Zielung ändert, wenn gleichzeitig die Längs-Libelle mit den zwei erstgenannten Schrauben im Einspielen erhalten wird.

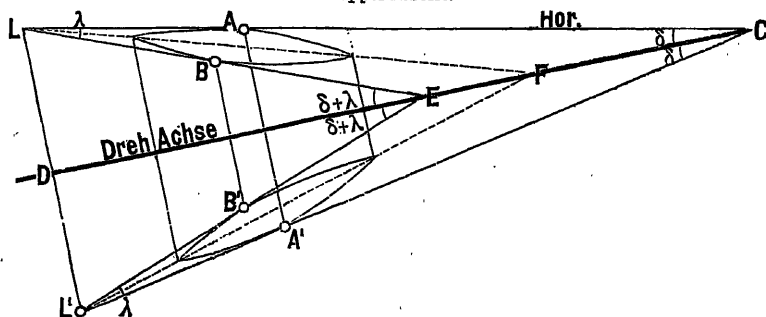
Allerdings eine *kleine* Ziel-Änderung muss diese dritte Schraube wohl erzeugen, nämlich entsprechend der Höhen-Änderung am Instrumente selbst; das ist aber wenig, und kann nötigenfalls in Rechnung gebracht werden.

Nach dem Erfolge dieser Untersuchung ist die Libelle zu lassen, oder durch seitlich wirkende Richteschrauben von ihrer Kreuzung zu befreien.

(Diese Prüfungsart ist von *Helmert* in der „Zeitschr. f. Verm. 1878", S. 192 angegeben worden, indem zugleich die Bedeutung der Libellen-Kreuzung für das Nivellieren überhaupt zuerst ins richtige Licht gestellt wurde.)

II. Die Doppel-Libelle.

In neuerer Zeit findet man an Nivellier-Instrumenten häufig Libellen, welche auf zwei Seiten, oben und unten, geschliffen und eingeteilt sind, und durch Umdrehung auf beiden Seiten benützt werden können. Z. B. unser Instrument Fig. 2. § 107. S. 364 hat eine solche Doppel-Libelle (von welcher wir aber bei unseren Arbeiten nur eine Seite benützt haben).

Fig. 2.
Doppel-Libelle.

Bei einer Doppel-Libelle ist zuerst zu beachten, dass sie *zwei Axen* hat. Die Axe ist nach unserer Erklärung von § 34. S. 102 die im Normalpunkte der Teilung nach der Längsrichtung (Richtung der geringsten Krümmung) gezogene Tangente.

Hat nun eine Libelle oben und unten eine Teilung mit je einem Normalpunkt A oder B (Fig. 2.), so hat sie auch *zwei* Axen AL und BL, und man kann von vornherein nicht wissen, ob diese beiden Axen parallel sind.

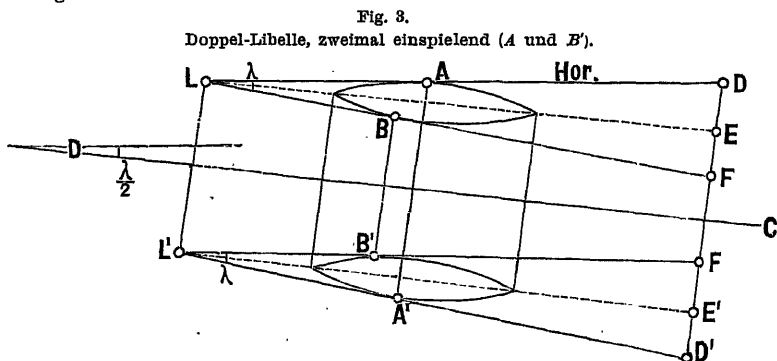
In Fig. 2. ist angenommen, dass die beiden Libellen-Axen den Winkel λ unter sich bilden, und dass die Libelle mit ihren beiden Axen um eine Dreh-Axe DC gedreht werde.

Zu Anfang sei die erste Libellen-Axe A horizontal, die Blase spielt in A ein. Nach der Umdrehung kommt die zweite Axe B in der Lage B' zur Anwendung, und es fragt sich, welche Neigung die Axe $L'B'$ hat, oder welcher Ausschlag bei B' beobachtet wird?

Fig. 2. S. 371 giebt folgendes zu erkennen:

LA	hat die Neigung	$= 0$
LE	" " "	$-\lambda$
DC	" " "	δ
$L'E$	" " "	$\delta + (\delta + \lambda) = 2\,\delta + \lambda$

Wenn man nun nach der Drehung die gewöhnliche Libellen-Berichtigung macht, d. h. die Hälfte des Ausschlages an den Fuss-Stellschrauben und die andere Hälfte an der Libellen-Richteschraube wegschafft, so wird $2\,\delta + \lambda = 0$, $\delta = -\frac{\lambda}{2}$, d. h. die Dreh-Axe DC wird dann parallel der Halbierungs-Linie LF des Winkels λ in der ersten Lage.

Fig. 3.
Doppel-Libelle, zweimal einspielend (A und B').

Dieses ist in Fig. 3. veranschaulicht; die Dreh-Axe DC macht hier eine Neigung $\frac{\lambda}{2}$ gegen den Horizont, und bei der Umdrehung spielt die Libelle oben in A und unten in B' ein.

Man sieht also, dass das zweifache Einspielen der Doppel-Libelle beim Umdrehen, noch keine Bürgschaft ist für die Horizontalität der Dreh-Axe, noch für die Symmetrie der Libelle.

Zu einer vollständigen Prüfung müsste man sich *mit anderen Mitteln* eine horizontale Axe verschaffen, indem man das Fernrohr centriert, und dann etwa Zielung aus der Mitte nimmt (Fig. 4. § 102. S. 349), und dann untersucht, ob die Doppel-Libelle das Umdrehen ohne Ausschlag aushält.

Die Berichtigung des Fehlers λ geschieht durch Ändern der einen Teilung; wenn λ zufällig einen *ganzen* Strich (oder mehrere ganze Striche) beträgt, so geht das leicht, andernfalls wäre die Teilung abzuschleifen, oder der Fehler in Rechnung zu bringen.

Indessen tritt nun noch die Frage hinzu, ob die beiden Libellen-Axen verschiedene Kreuzungen haben.

Ist eine Doppel-Libelle in allen diesen Beziehungen untersucht und richtig, so kann man damit die Ungleichheit der Ringdurchmesser des Dreh-Fernrohrs eliminieren

oder bestimmen; man sieht aber aus dem Ineinandergreifen der vielen hiebei nötigen Fehler-Bestimmungen, dass die Doppel-Libelle ein kompliziertes Hilfsmittel ist, und dem am Schluss des vorigen § 107. S. 369 ausgesprochenen Gedanken, die letzten kleinen Fehler nicht im Instrument, sondern im Messungs-Verfahren zu eliminieren, nicht entspricht.

III. Gang der Okular-Röhre.

Ein grosser Teil unserer bisherigen Betrachtungen über die Fehler von Nivellier-Instrumenten ist nur dann gültig, wenn entweder von der Beweglichkeit der Okular-Röhre abgesehen wird (bei lauter gleichen Zielweiten), oder angenommen werden darf, dass bei dem Auszug der Okular-Röhre sich das Fadenkreuz in einer durch den optischen Mittelpunkt des Objektivs gehenden Geraden bewegt, oder allgemeiner (z. B. für das *Huyghens*sche Okular S. 130—131), wenn die Annahme gemacht werden darf, dass beim Auszug des Okulars die Ziel-Axe (Kollimations-Axe) sich nicht ändert.

Diese Annahme ist ohne Weiteres nicht zulässig, und wir haben daher in dem störenden Gang der Okular-Röhre einen Grund mehr, nur mit gleichen Zielweiten rückwärts und vorwärts zu nivellieren.

Dann ist aber auch die schöne Nivellier-Probe, mit gleichen und ungleichen Zielweiten, nach Fig. 4. S. 349 und Fig. 5. S. 350 nicht mehr streng richtig.

Um den fraglichen Fehler bei einem Nivellier-Instrumente (Fig. 3. § 107. S. 365) zu bestimmen, haben wir folgende Anordnung getroffen (vgl. „Zeitschr. f. Verm. 1878", S. 305): Es wurde eine Gerade von 165^m in 11 gleiche Teile von je 15^m geteilt, und die 12 Teilpunkte fest versichert.

Das Nivellier-Instrument wurde der Reihe nach auf die 11 Mittelstellungen zwischen je zwei Festpunkte gebracht, und dabei jedesmal alle 12 Lattenstellungen auf den Festpunkten abgelesen.

Nun waren zuerst genügend viele Nivellierungen aus der Mitte vorhanden, um die Höhen der zwölf Festpunkte scharf zu bestimmen, und die übrigen Zielungen lieferten die Verbesserungen für schiefen Okular-Gang. Es ergab sich folgendes:

Zielweite =	0^m	20^m	40^m	60^m	80^m	100^m
Korrektion $y =$	$+0{,}0^{mm}$	$+0{,}3^{mm}$	$+0{,}6^{mm}$	$+0{,}7^{mm}$	$+1{,}1^{mm}$	$+1{,}7^{mm}$
$\frac{x}{100}\,1{,}7 = y' =$	0,00	0,34	0,68	1,02	1,36	1,70
$y' - y =$	$0{,}00^{mm}$	$+0{,}04^{mm}$	$+0{,}08^{mm}$	$+0{,}32^{mm}$	$+0{,}26^{mm}$	$0{,}00^{mm}$

Diese letzten Differenzen $y' - y$ geben ein Bild von der Grössen-Ordnung der Okular-Auszugs-Fehler, denn die Ordinaten y selbst können, wenn sie proportional x wachsen, lediglich durch eine Ziel-Axen-Neigung gegen die Libellen-Axe erklärt werden.

Nach diesem Erfunde ist jenes Instrument in Hinsicht auf den Okular-Auszug genügend richtig.

So lange man eine solche Untersuchung nicht gemacht hat, bleibt nichts übrig, als überall, wo ungleiche Zielweiten vorkommen, also auch bei den Prüfungen von Fig. 4. S. 349 und Fig. 5. S. 350, vorsichtig zu sein, und solche Prüfungen nur als vorläufig gelten zu lassen.

Zu der Hauptsache aber, nämlich gleiche Zielweiten rückwärts und vorwärts, kommt bezüglich der Okular-Röhre noch die mechanische Rücksicht, zwischen Rück-Zielung und Vor-Zielung den Okular-Auszug überhaupt nicht anzufassen.

§ 109. Die Nivellier-Latten.

Eine Nivellier-Latte ist ein etwa 2 — 4^m langer, geteilter Massstab, gewöhnlich von Tannenholz.

Man kann mit *einer* Latte nivellieren; da man aber dabei jedesmal warten muss, bis die Latte vom rückwärtigen Punkt zum nächsten vorwärts zu nehmenden Punkte gebracht ist, so benützt man besser *zwei* Latten zusammen.

Der Querschnitt einer Nivellier-Latte kann einfach rechteckig sein (etwa 9×3^{cm}). Zur Verhinderung des Werfens macht man den Querschnitt zuweilen *T*-förmig (Fig. 1.) oder doppel-*T*-förmig (Fig. 2.). Die letztere Form empfiehlt sich auch deswegen, weil die beiden seitlich vorstehenden Rippen zum Schutze der Teilungen dienen.

Fig. 1. Fig. 2.

Querschnitte von Nivellier-Latten.

Die beste Form ist jedoch die *Kasten*-Form, welche in dem Querschnitt *AA'* in der Mitte von Fig. 3. S. 377 angedeutet ist.

Zum Schutz gegen Feuchtigkeit wird die Latte, nachdem sie gut getrocknet ist, mehrfach mit Ölfarbe angestrichen.

Die Teilungs-Einheit soll in der Regel nicht kleiner als **1** Centimeter sein, da sich Millimeter und deren Teile besser schätzen, als unmittelbar ablesen lassen.

Die Ausführung der Teilung kann für gewöhnliche Zwecke (Längen- und Quer-Profile) geradezu mittelst angelegten Normal-Strichmasses, mittelst Stangen-Zirkels u. dergl. geschehen. Wenn man aber die Länge auf 1^{mm} für 1^m sicher haben will, so ist eine Teilmaschine mit genauer Massvergleichung, Berücksichtigung der Temperatur u. s. w. erforderlich. (Unseren Karlsruher Latten-Comparator mit Teilmaschine haben wir in der „Zeitschr. f. Instrumentenkunde 1881," S. 41—47, beschrieben.)

Die Anordnung der Felder, Striche u. s. w. wird bei Nivellier-Latten je nach Gutdünken sehr verschieden gemacht.

In Fig. 3. bis Fig. 7. S. 376 und S. 377 haben wir von unseren hierüber gemachten Erfahrungen einige Muster von Nivellierlatten-Teilungen zusammengestellt.

Fig. 3. *Einfache Felder-Teilung.* Dieses ist eine Teilung, welche wir seit Jahren gut bewährt gefunden haben. Die durchgehenden Striche bei den ganzen Decimetern sind nötig zum Schutz gegen Centimeter-Ablesefehler.

Fig. 4. *Schachbrett-Felder-Teilung.* Diese Teilung ist im wesentlichen ebenso eingerichtet wie Fig. 3., nur sind aus theoretischen Gründen, zum Schutz gegen Irradiationsfehler, *zwei* Centimeter-Teilungen, schachbrettartig verschoben, neben einander gestellt. Auch hier sind die durchgehenden Decimeter-Striche von Wichtigkeit. Die *Irradiation* äussert sich darin, dass z. B. bei heller Beleuchtung die weissen Felder *grösser* erscheinen als die schwarzen oder rothen (obgleich in Wirklichkeit die Felder gleich sind). Daraus entstehen ohne Zweifel Fehler im Schätzen der Millimeter, und *zwei* Felder-Teilungen, gegen einander verschoben wie in Fig. 4. S. 376, geben eine

gewisse Hilfe gegen solche Schätzungsfehler, allein dadurch wird das Bild zu unruhig. Eine gewisse Unruhe ist überhaupt nicht zu vermeiden, wenn man an der *Felder*-Teilung festhält, deswegen gingen wir über zu:

Fig. 5. *Strich-Teilung.* Die Teilstriche sind dabei $1/2$ oder $1/3$ Millimeter dick, und erscheinen in einem mässigen Fernrohr bei einer Zielweite von 50^m als deutliche schwarze Linien, etwa von gleicher Dicke wie der Horizontalfaden des Fadenkreuzes. Es wird nicht bestritten, dass eine solche Teilung immer den theoretischen Nachteil behält, dass die *Dicke* der Teilstriche bei den Schätzungen einen gewissen Einfluss hat, allein dem steht der praktische Vorteil des sehr ruhigen Lattenbildes, mit dem Fortfall der Irradiation, entgegen, und der Vorteil, dass das Abzählen der Teilstriche viel sicherer und angenehmer geschieht, als bei den schwarzen und weissen Feldern; insbesondere ist die Gefahr eines ganzen Centimeterfehlers bei der Linien-Teilung geringer, als bei der Felder-Teilung.

Fig. 6. *Felder-Teilung und Strich-Teilung.* Diese Verbindung ist in unserem Falle dadurch entstanden, dass wir eine Felder-Teilungs-Latte (Fig. 7.) der Landes-Aufnahme nachher noch mit Strichen versahen, wegen der Schwierigkeit, zwischen die in hellem Sonnenschein ganz ungleich aussehenden Felderbreiten hinein zu schätzen. Diese Verbindung von Feldern und Strichen, welche wir inzwischen noch genauer ausführen liessen, hat viele Vorteile.

Fig. 6a.
Felder-Teilung und Strich-Teilung.
(Massstab $1/2$ der natürl. Grösse.)

Zur grösseren Deutlichkeit und zur Vergleichung haben wir in Fig. 6a. nochmals reine Felder-Teilung und Felder-Strich-Teilung in grösserem Massstab neben einander gestellt.

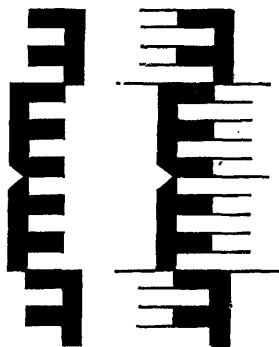



Fig. 7. *Kasten-Latte der trigonometrischen Abteilung des Landes-Aufnahme.* Nachdem wir die Felder-Teilung von Fig. 7. bereits bei Fig. 6. vergleichend betrachtet haben, fassen wir die eigentümliche *Bezifferung* von Fig. 7. ins Auge.

Es ist links eine Bezifferung von unten nach oben, und rechts mit Kreuzen (×) eine entsprechende Bezifferung in dekadischen Ergänzungen von oben nach unten. Je zwei zusammengehörige Zahlen haben die Summe 100, z. B.:

$$60 + \times 40 = 100$$
$$59 + \times 41 = 100 \text{ u. s. w.}$$

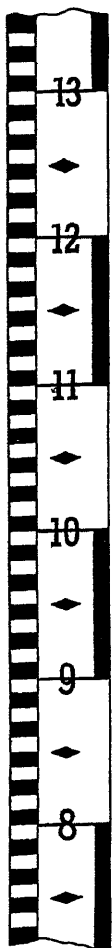
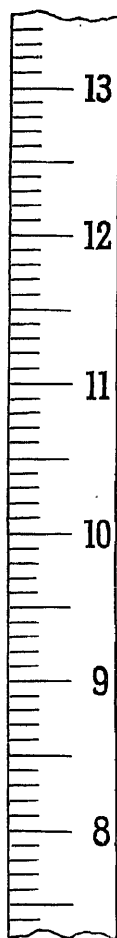
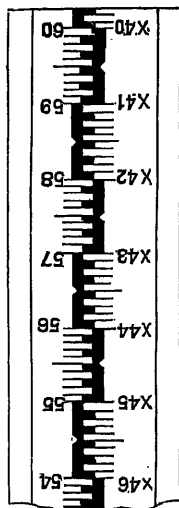
Die Anwendung dieser (von Oberst *Schreiber* eingeführten) Bezifferung werden wir in § 110. kennen lernen.

Statt zwei Bezifferungen nebeneinander findet man zuweilen auch zwei Teilungen mit Bezifferungen auf beiden Seiten einer Latte (Reversions-Latten), wobei dann die beiden Bezifferungan irgend welche konstante Summe oder konstante Differenz haben.

Latten-Vergleichung. Wie schon oben bei Gelegenheit der Latten-Teilung bemerkt wurde, sind zur Versicherung der richtigen Länge, etwa innerhalb $0{,}1^{mm}$ auf 1^m, alle Massregeln feiner Massvergleichungen anzuwenden.

(Fortsetzung Seite 378.)

Verschiedene Nivellier-Latten-Teilungen. *)

(Massstab 1 : 5.)

(Karlsr. und Hannov. Sammlung.)

*) Fig. 3., Fig. 4. und Fig. 5. sind mit aufrechten Zahlen von unten nach oben beziffert, was der Wirklichkeit nicht entspricht, indem, wegen der *Umkehrung* des Fernrohrbildes, die Zahlen, von unten nach oben wachsend, verkehrt stehen müssen.

Nivellier-Latte und Kontroll-Mass
der trigonometrischen Abteilung der Landes-Aufnahme.

Fig. 7.
Kasten-Latte. (Massstab 1 : 5.) Teilung in *Halb*-Centimeter.

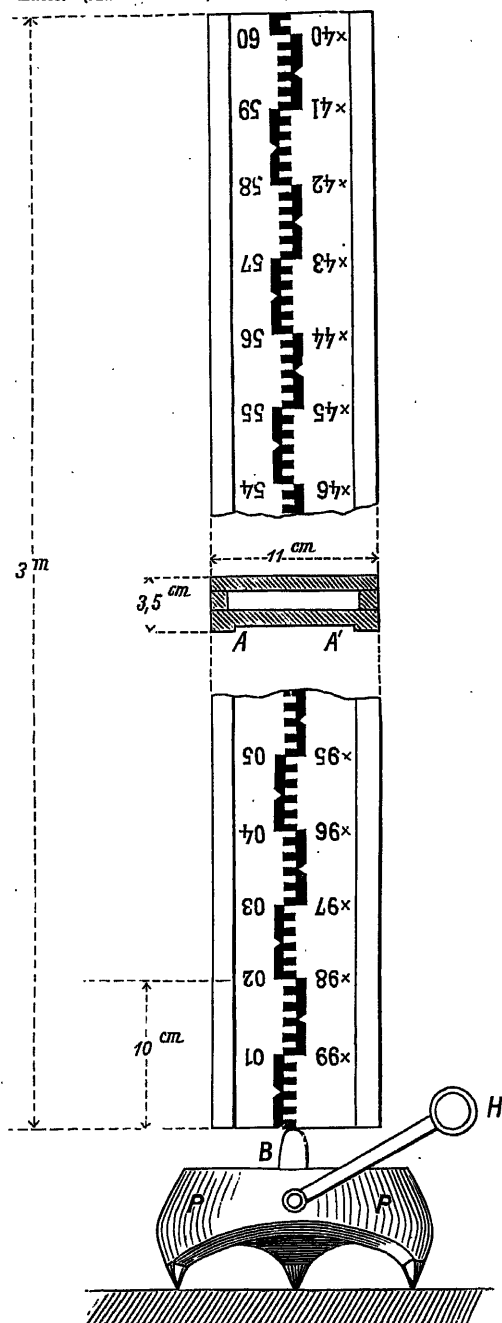
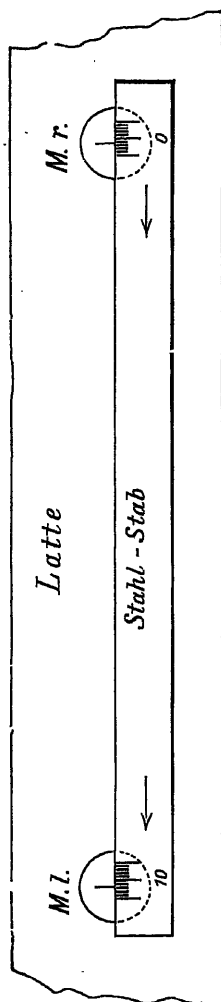



Fig. 8.
Latten-Vergleichung.
(Massstab 1 : 10.)

(Fortsetzung von Seite 375.)

Die Ausdehnung der Latte durch die Wärme beträgt für Tannenholz etwa 0,000004 der Länge für 1° C (etwa $1/4$ der Ausdehnung des Eisens), was bei einer 3^m langen Latte, und einer Temperatur-Veränderung von 10° C, nur 0,1 Millimeter ausmacht.

Bedeutender als die *Temperatur*-Ausdehnung hölzerner Latten ist deren Längenänderung durch Einwirkung von ***Feuchtigkeit***, und überhaupt Änderungen, welche in der organischen Natur des Materials ihren Grund haben.

Diese Änderungen betragen in einem Sommer wohl $0,3^{mm}$ auf 1^m. Hat man also in einem Sommer hohe Berge nivelliert, ohne genügend häufige Latten-Untersuchungen, so geht neben den Lattenfehlern die reine Nivellier-Genauigkeit verloren.

Die trigonometrische Abteilung der Landes-Aufnahme hat bei Nivellierungen II. Ordnung tägliche Lattenvergleichung eingeführt, in folgender durch Fig. 8. S. 377 angedeuteter Weise:

Jede Latte hat am Ende des ersten und zweiten Meters je eine Silbermarke *M. l.* und *M. r.*, auf deren ebene Flächen ein stählerner Vergleichs-Normalstab aufgelegt wird. Der Stahlstab ist an seinen Enden in fünftel Millimeter geteilt, wovon man mit einer starken Lupe (wie man sie zum Ablesen von Theodolit-Teilungen hat) noch den zehnten Teil, d. h. $= 0,02^{mm}$, schätzen kann. Die Ablesung geschieht daher in Einheiten von Doppelmillimetern (was für die nachherige Mittelbildung aus je zwei aufeinander folgenden Messungen bequem ist). Die Teilung des Stahlstabs wächst von rechts nach links; im Falle von Fig. 8. S. 377 habe man z. B. folgende Vergleichung:

1) Marke links (*M. l.*), vom Mittelstrich 10 der Stahlstab-Teilung in der Pfeilrichtung von rechts nach links bis zum Markenstrich gezählt: $+ 0,15$ Doppelmillimeter.

2) Marke rechts (*M. r.*), vom Mittelstrich 0 der Stahlstab-Teilung in der Pfeilrichtung von rechts nach links bis zum Markenstrich gezählt: $+ 0,16$ Doppelmillimeter. Hieraus: links — rechts $= + 0,15 - 0,16 = - 0,01$ Doppelmillimeter $= - 0,02$ Millimeter, also:

$$\text{Marken-Abstand} = - 0,02^{mm} + 1 \text{ Stahlmeter}$$

oder allgemein:

$$\text{Marken-Abstand} = 1 \text{ Stahlmeter} + l - r \qquad (1)$$

Die sechs Stahlstäbe der Landes-Aufnahme sind von Mechaniker *Bamberg* gleichzeitig angefertigt worden, und haben bei der Vergleichung auf der Kaiserl. Normal-Aichungs-Kommission genügend übereinstimmend folgende Gleichung erhalten:

$$1 \text{ Stahlmeter} = 1^m - 0,18^{mm} + 0,01^{mm}\, t \qquad (2)$$

wo t die an einem eingelassenen Thermometer abgelesene Temperatur bedeutet. Aus den Gleichungen (1) und (2) findet man den Marken-Abstand, der jedoch an und für sich noch kein Interesse hat, welcher vielmehr noch mit dem mittleren Lattenmeter verglichen werden muss, es sei nämlich:

$$1 \text{ Lattenmeter} = \text{Marken-Abstand} + b^{mm} \qquad (3)$$

dann hat man aus (1), (2) und (3):

$$1 \text{ Lattenmeter} = 1^m + [(l - r) + 0,01^{mm}\, t + (- 0,18^{mm} + b)] \qquad (4)$$

$$= 1^m + n \qquad (5)$$

Wie man hieraus ersieht, wird nur die Temperatur des Stahlstabes, nicht aber die Temperatur der Latte selbst in Rechnung genommen. Die Temperatur-Änderung

der Latte verbindet sich von Fall zu Fall mit der hygroskopischen Änderung, und beide zusammen erzeugen die verschiedenen Werte n.

Ein Beispiel von unserer Schwarzwald-Nivellierung diene zur Veranschaulichung.

Alexander-Schanze 23. August 1881, $11^h\ 30^m$ Mittags:

	Latte Nr. 17.	Latte Nr. 18.	
Anfangs-Temperatur	$t = 20{,}0°$	$20{,}6°$	
1. Vergleichung, Marke links	$l = +0{,}24$	$+0{,}33$	Doppelmillimeter.
„ rechts	$r = +0{,}22$	$+0{,}29$	„
	$l - r + 0{,}02$	$+0{,}04$	„
2. Vergleichung, Marke links	$l = -0{,}12$	$-0{,}07$	„
„ rechts	$r = -0{,}15$	$-0{,}11$	„
	$l - r = +0{,}03$	$+0{,}04$	„
End-Temperatur	$t = 20{,}2°$	$20{,}8°$	

	Latte Nr. 17.	Latte Nr. 18.
Zusammenfassung	$l - r = +0{,}05^{mm}$	$+0{,}08^{mm}$
	$+0{,}01\,t = +0{,}20$	$+0{,}21$
$b_{17} = +0{,}06$, $b_{18} = +0{,}04$ giebt:	$(-0{,}18 + b) = -0{,}12$	$-0{,}14$
	$n = +0{,}13^{mm}$	$+0{,}15^{mm}$

$$\text{Mittel } n = +0{,}14^{mm} \tag{6}$$

d. h. an jenem Tage, 23. August 1881, war:

$$1 \text{ Lattenmeter Nr. } 17 = 1^m + 0{,}13^{mm}$$
$$1 \text{ Lattenmeter Nr. } 18 = 1^m + 0{,}15^{mm}$$

Was die hier gebrauchten in Formel (3) eingeführten Konstanten b betrifft, so wurde deren Bestimmung nicht wie die Marken-Vergleichungen täglich, sondern nur alljährlich zweimal, vor Beginn und nach Beendigung der Feldarbeiten, vorgenommen, und zwar dadurch, dass gleichzeitig nicht nur der Marken-Abstand einer Latte, sondern auch 4 Meterlängen nach der Teilung mit dem Stahlstab gemessen wurden.

Für die Latten 17. und 18. erhielt ich am 1. April 1881 von Berlin die Mitteilung $b_{17} = +0{,}06^{mm}$, $b_{18} = +0{,}04^{mm}$, wie in obigem Beispiele angegeben ist; die am 30. September 1881 in Karlsruhe von mir vorgenommene Schlussbestimmung gab für die Latte Nr. 17 Folgendes:

Mittel aus 16 Vergleichungen:				
1 Lattenmeter	$= +0{,}20^{mm}$	$+0{,}15^{mm}$	$+0{,}19^{mm}$	$+0{,}21^{mm}$
Marken-Abstand	$= +0{,}13$	$+0{,}14$	$+0{,}11$	$+0{,}10$
Lattenmeter—Marken-Abstand $= b$	$= +0{,}07^{mm}$	$+0{,}01^{mm}$	$+0{,}08^{mm}$	$+0{,}11^{mm}$

$$\text{Im Mittel } b_{17} = +0{,}07^{mm}$$

mithin für Gleichung (4):

$$-0{,}18 + b_{17} = -0{,}11.$$

Ebenso fand sich $b_{18} = +0{,}06^{mm}$, also besteht mit den bereits im vorigen Beispiel erwähnten Frühjahrs-Bestimmungen $b_{17} = +0{,}06^{mm}$ und $b_{18} = +0{,}04^{m}$ Übereinstimmung innerhalb $0{,}02^{mm}$.

Hat man für das Nivellement eines Tages die Latten-Korrektion n nach Gleichung (5) und (6), wie das Beispiel sagt, bestimmt, so lassen sich die an diesem Tage nivellierten Höhen-Unterschiede sofort auf richtiges Mass reduzieren, und zwar ist es nützlich, hiezu eine kleine Tabelle anzulegen, nicht der leichten Rechnung selbst wegen (die im Kopf oder mit dem Rechenschieber zu machen), sondern zur allgemeinen Sicherung gegen etwaiges falsches Stellen des Kommas oder ähnliche Versehen. Eine für solchen Gebrauch geeignete Tabelle ist im Anhang auf Seite [2] gegeben.

Das im vorstehenden beschriebene Verfahren war das amtlich eingeführte bei der trigonometrischen Abteilung der Landes-Aufnahme, 1881.

Die nur zweimal jährlich gemachte Bestimmung der Konstanten b und die allgemeine Annahme der Proportionalität zwischen Marken-Abstand und Lattenmeter kann durch Benützung mehrerer Original-Teilstriche auf dem Holze, bei jeder Vergleichung, ersetzt werden.

Als Beispiel für die erheblichen Veränderungen, welche Nivellier-Latten in einem Sommer erfahren können, wollen wir einen Teil der Latten-Vergleichungen unserer Nivellierungen vom Sommer 1881 im Folgenden mitteilen:

Im Hügelland wurde die Vergleichung täglich morgens, mittags oder abends gemacht, im Gebirge (Kniebis) wurde mittags verglichen, damit die Latte möglichst in dem Zustande untersucht wird, in welchem sie beim Nivellieren gedient hat.

Ort.	Zeit 1881.		Latte Nr. 17.	Latte Nr. 18.	Mittel	
			mm	mm	mm	
Graben	9. Juni	4^h Nach.	$n = -0{,}02$	$n = -0{,}00$	$n = -0{,}01$	
Germersheim . .	23. „	2^h „	$-0{,}11$	$-0{,}06$	$-0{,}08$	Min.
Karlsruhe . . .	9. Juli	12^h Mitt.	$-0{,}04$	$-0{,}01$	$-0{,}02$	
Appenweier . .	11. Aug.	7^h Morg.	$-0{,}07$	$-0{,}05$	$-0{,}06$	
Oberkirch . . .	15. „	7^h „	$-0{,}06$	$-0{,}05$	$-0{,}06$	
Oppenau . . .	16. „	6^h „	$+0{,}02$	$+0{,}04$	$+0{,}03$	
„ . . .	20. „	7^h „	$+0{,}01$	$+0{,}05$	$+0{,}03$	
Griesbach . . .	22. „	3^h Nach.	$+0{,}10$	$+0{,}10$	$+0{,}10$	
Alexander-Schanze	23. „	12^h Mitt.	$+0{,}13$	$+0{,}15$	$+0{,}14$	
Karlsruhe . . .	4. Sept.	9^h Morg.	$+0{,}08$	$+0{,}08$	$+0{,}08$	
„ . . .	12. „	10^h „	$+0{,}19$	$+0{,}19$	$+0{,}19$	
Heidelsheim . .	14. „	8^h „	$+0{,}18$	$+0{,}19$	$+0{,}18$	
Bretten	15. „	4^h Nach.	$+0{,}25$	$+0{,}23$	$+0{,}24$	Max.
Karlsruhe . . .	29. „	12^h Mitt.	$+0{,}15$	$+0{,}12$	$+0{,}14$	

Grösste Änderung $0{,}32^{mm}$ auf 1^m.

Für unsere Hannoverschen Latten-Vergleichungen haben wir einen Stahlstab von trapezförmigem Querschnitt anfertigen lassen, dessen Teilfläche schief gegen die Latten-Ebene steht (wie bei den gewöhnlichen hölzernen, auf dem Reissbrett zu benützenden Massstäben). Dieser von Mechaniker *Bamberg* konstruierte, mit Teilungen von $0{,}1^{mm}$ auf Platin-Iridium-Plättchen versehene Stab wurde auf der Königl. Normal-Aichungs-Kommission verglichen, und hat, nach dem Beglaubigungs-Schein vom 13. September 1883, folgende Gleichung:

$$\text{Nr. } 1930 = 1^m + 0{,}04^{mm} + 0{,}011^{mm}\,(t - 18)$$

wo t die an einem eingelegten Thermometer abzulesende Temperatur ist.

Hiernach haben wir folgende Tabelle berechnet:

Stahlstab Nr. 1930 = 1^m + Tafelwert S:

t =	S =	t =	S =	t =	S =
0°	— 0,16^{mm}	10°	— 0,05^{mm}	20°	+ 0,06^{mm}
1	— 0,15	11	— 0,04	21	+ 0,07
2	— 0,14	12	— 0,03	22	+ 0,08
3	— 0,12	13	— 0,02	23	+ 0,10
4	— 0,11	14	— 0,00	24	+ 0,11
5	— 0,10	15	+ 0,01	25	+ 0,12
6	— 0,09	16	+ 0,02	26	+ 0,13
7	— 0,08	17	+ 0,03	27	+ 0,14
8	— 0,07	18	+ 0,04	28	+ 0,15
9	— 0,06	19	+ 0,05	29	+ 0,16
10	— 0,05	20	+ 0,06	30	+ 0,17

Wenn man für seinen Normalstab ein solches Täfelchen anlegt, und zur Vergleichung selbst ein gedrucktes Schema benützt, so ist die tägliche Lattenvergleichung eine leichte Sache.

Nivellier-Latten für bergmännische Arbeiten.

Zum Schluss unserer Betrachtungen über Nivellier-Latten führen wir in Fig. 9. S. 382 noch eine Latte zum Nivellieren in Stollen und Tunneln vor, nach der Beschreibung und Zeichnung, welche Prof. *M. Schmidt* in Freiberg in der „Zeitschr. f. Verm. 1880", S. 475—477 gegeben hat.

Nivellieren in Tunneln kommt dem Ingenieur nicht selten vor; und man kann hier nötigenfalls auch mit gewöhnlichen Latten, mit Lampen- und sogar mit Fackel-Beleuchtung, durchkommen, wie wir z. B. von einer Nivellierung des 1,7^{km} langen Sommerau-Tunnels im Schwarzwald berichten können. Doch ist das immer nur ein Notbehelf, und z. B. Fackeln- und gewöhnliche Lampen schaden den Latten. Fadenkreuz-Beleuchtung im Fernrohr fanden wir dabei nicht nötig.

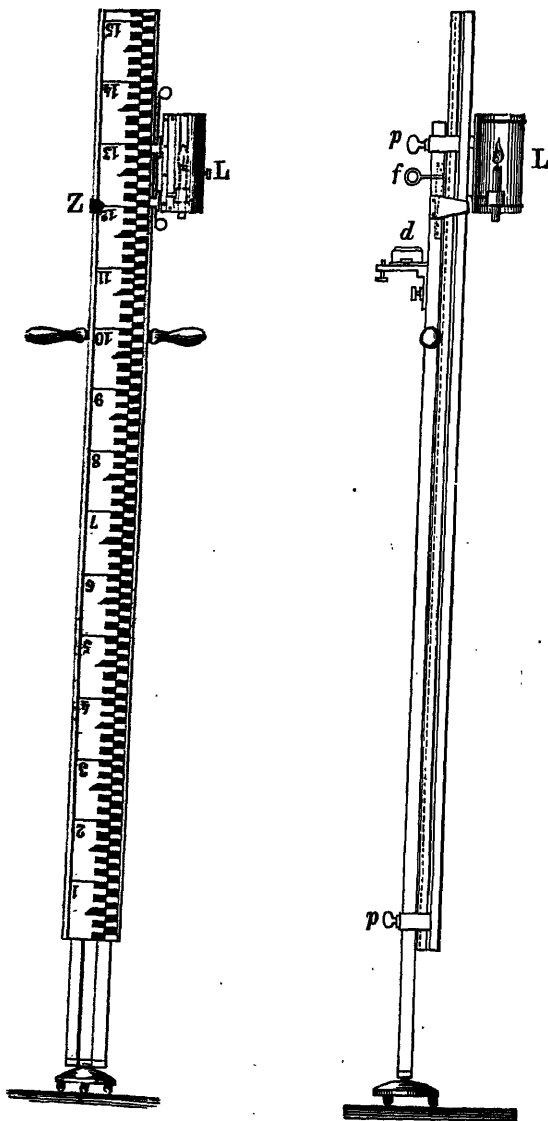
Die *Schmidt*sche Latte (Fig. 9. S. 382) hat nun zuerst eine Verlängerungs-Verschiebung mit der Pressschraube p und dem Einrichtestift f, was in dem beengten bergmännischen Raum nötiger ist als im freien Felde. Die Latte kann damit auf eine Länge zwischen 1,5^m und 2,7^m gestellt werden, was an dem Zeiger Z angegeben wird.

Bei d ist eine gewöhnliche Dosen-Libelle angebracht.

Zur Beleuchtung dient die Reflektor-Lampe L, welche in jede Gebrauchshöhe geschoben werden kann. Der Reflektor ist derart geformt, dass möglichst viele Lichtstrahlen auf die Latten-Teilung geworfen werden, während die Lichtflamme selbst dem Beobachter am Instrument verborgen ist. Als Lichtquelle dient eine Stearinkerze, welche vollauf genügt.

Fig. 9.

Bergmännische Nivellier-Latten von *Schmidt*.

(Massstab etwa = 1 : 12,2.)

(Mechaniker *Lingke*.)

§ 110. Nivellierung erster Ordnung.

Wie bei Triangulierungen kann man auch bei den Nivellierungen Unterscheidung I. II. III. Ordnung u. s. w. treffen, oder auch andere mehr oder weniger zutreffende Benennungen (z. B. „Präzisions“-Nivellement u. s. w.) anwenden.

Wir beschreiben im Folgenden die Nivellierungen erster Ordnung im wesentlichen nach den Anordnungen der trigonometrischen Abteilung der Landes-Aufnahme*), unter Bezugnahme auf die Zeichnung und Beschreibung der Instrumente (Fig. 1. S. 363 und Fig. 2. S. 364) und Latten (Fig. 7. S. 377).

Der Nivellierende hat vier Gehilfen zur Verfügung, nämlich zwei Lattenträger, einen Instrumententräger und einen Schirmhalter, von welch letzteren der eine die Libellen-Ablesungen besorgt.

Das Instrumenten-Stativ wird von dem Gehilfen so aufgestellt, dass die auf dem Stativkopf angebrachte Dosen-Libelle nahezu einspielt, wenn der Nivelleur zur Stelle kommt. Dieses vorläufige Einstellen des Stativkopfes erlernt sich bald mit wenigen Griffen. Nach diesem wird die am Instrumente selbst angebrachte Dosen-Libelle zum Einspielen gebracht, und dann erst die Haupt-Libelle ins Auge gefasst. Häufig haben wir das Verfahren eingehalten, nach dem Einstellen der Dosen-Libelle die Röhren-Libelle *nur* in der Richtung der jeweiligen Ziel-Linie einzustellen, und zwar kann man sich dieses bequeme Verfahren erlauben, wenn man sicher ist, dass die Haupt-Libelle keine merkliche Kreuzung gegen die Fernrohr-Axe hat. Indessen ist es doch zu empfehlen, dass zuerst die Dosen-Libelle thunlichst eingerichtet, dann die Haupt-Libelle *einmal* quer zur Visir-Richtung eingestellt, dann aber nach beiden Zielungen nochmals besonders auf 1—2 Striche zum Einspielen gebracht wird, worauf die Blasenstellung vom Gehilfen abgelesen werden kann.

Bei der Latten-Ablesung und bei der Berechnung werden *dekadische Ergänzungen* angewendet, welche bekanntlich beim Logarithmen-Rechnen längst im Gebrauch sind. Oberst *Schreiber* hat die Ergänzungen in die Nivellierungen und andern Arbeiten der Landes-Aufnahme eingeführt mit dem Zeichen ×, wie folgendes Beispiel zeigt:

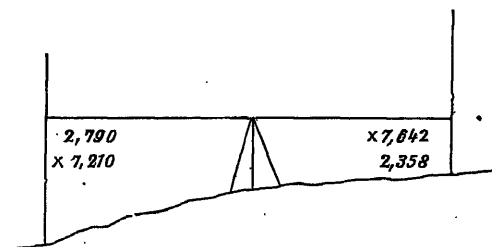
$$\times 7{,}210 = -7{,}210 - 10 = -2{,}790.$$

Fig. 1.
Latten-Ablesungen mit dekadischen Ergänzungen.

Die Anwendung zeigt Fig. 1., welche der Latten-Teilung von Fig. 7. S. 377 entspricht. Nach der gewöhnlichen Rechnung hat man:

$$2{,}790 - 2{,}358 = 0{,}432 \qquad (1)$$

Wenn man nun festsetzt, dass rückwärts die direkte Zahl (ohne ×) und vorwärts die Ergänzung (mit ×) abgelesen werden soll, so hat man nach Fig. 1. folgendes:

$$2{,}790 + \times 7{,}642 = \times 10{,}432 - 10 = 0{,}432 \qquad (2)$$

*) Diese Beschreibung entspricht den Nivellierungen, welche Verfasser in Baden, im Dienste der trigonometrischen Abteilung der Preussischen Landes-Aufnahme, im Jahre 1881, ausgeführt hat (vgl. „Zeitschr. f. Verm. 1882“, S. 281—303).

Um zugleich eine Doppel-Nivellierung zu haben, kann man ein zweites mal rückwärts Ergänzung, und vorwärts direkt ablesen, und bekommt dann in der Summe die Ergänzung des ersten Falles, also nach Fig. 1. S. 383 das zweitemal:

$$\times 7{,}210 + 2{,}358 = \times 9{,}568 = -0{,}432 \qquad (3)$$

Die Vergleichung der Ergebnisse (2) und (3) hat als *Messungs*-Probe keine sehr hohe Bedeutung. Jedenfalls hat aber die Vergleichung von (2) und (3) einen hohen Wert als *Rechen*-Probe und als Versicherung gegen *Centimeter*-Ablesefehler, wozu man die Dekaden-Probe jeweils im Kopfe zu bilden hat.

Um die Reduktionsrechnung für die Blasen-Ausschläge zu behandeln, erinnern wir uns, dass ein Instrumentenstand mit der Rückwärts-Ablesung r und der Vorwärts-Ablesung v, zum Gesamtresultat den Beitrag liefert:

$$h = r - v \qquad (4)$$

Diese Gleichung soll für das Instrument Fig. 1. S. 363 oder Fig. 2. S. 364 gelten, wenn die Blasenmitte auf dem Mittelstrich 25 der Libellen-Teilung steht, oder wenn die Ablesung *Obj.*, welche dem Objektiv zugewendet ist, und die dem Okular zugewendete Blasenablesung *Oc.*, zusammen das arithmetische Mittel $\frac{Obj + Oc}{2} = 25$, oder die Summe $Obj + Oc = 50$ geben. Ist diese Summe grösser als 50, so ist die Fernrohr-Zielung in die Tiefe geneigt, und die Latten-Ablesungen r und v sind zu klein, bedürfen also positiver Korrektionen, und die Gesamtkorrektion Δh ist proportional der Differenz $(Obj + Oc)_r - (Obj + Oc)_v$.

Eine Einheit von $(Obj + Oc)$ entspricht einer halben Einheit von $\frac{Obj + Oc}{2}$, d. h. man braucht zur Reduktionsrechnung den Winkelwert $\frac{e}{2}$ für $1/2$ Strich, indem e die Libellen-Empfindlichkeit für 1 Strich sein soll.

Auf 100^m Entfernung giebt dieses $\frac{e}{206\,265}\,\frac{100\,000}{2}$ Millimeter.

Nun ist aber die Latte nicht in Millimeter bzw. Centimeter, sondern in *Halbmillimeter* geteilt, man hat daher:

$$1/2 \text{ Strich auf } 100^m \text{ Entfernung giebt } \frac{e}{2{,}06265} \text{ Halbmillimeter} \qquad (5)$$

oder zur Anwendung des Rechenschiebers mehr geeignet:

$$1/2 \text{ Strich auf } 100^m \text{ Entfernung giebt } 100 : \left(\frac{206{,}265}{e}\right) \text{ Halbmillimeter.} \qquad (6)$$

Wir wollen noch eine Formel für Schrittmass bilden:

Es sei ein Schritt $= \sigma$ Meter (σ etwa $= 0{,}77$ bis $0{,}83$). Dann hat man:

$$\frac{1}{2} \text{ Libellen-Strich auf 100 Schritte giebt: } 100 : \left(\frac{206{,}265}{e\,\sigma}\right) \text{ Halbmillimeter.} \qquad (7)$$

Wenn nun die Zielweite $= s$ in Metern ist, so hat man nach (6):

$$\text{Reduktion} = s : \left(\frac{206{,}265}{e}\right) \text{ Halbmillimeter (für } 1/2 \text{ Strich)} \qquad (8)$$

und wenn die Zielweite $= s'$ in Schritten ist, so hat man:

$$\text{Reduktion} = s' : \left(\frac{206{,}265}{e\,\sigma}\right) \text{ Halbmillimeter (für } 1/2 \text{ Strich)} \qquad (9)$$

Statt, wie hier vorausgesetzt ist, die Empfindlichkeit e in Sekunden auf dem Legebrett (Fig. 3. S. 102) zu bestimmen, kann man die Konstanten der Formeln (8)

und (9) auch an der Latte selbst bestimmen, denn es ist $\frac{e}{206,265}$ der Lattenwert für $\frac{1}{2}$ Libellen-Strich auf 1 Meter Entfernung, und $\frac{e\,\sigma}{206,265}$ der entsprechende Wert auf 1 Schritt Entfernung.

Diese Formeln sind für den Rechenschieber*) die bequemsten. In unserem Falle war $e = 4{,}15''$ auf 1 Strich, also nach (8):

$$\text{Reduktion} = s : 49{,}70 \text{ Halbmillimeter für } s \text{ Meter und } \tfrac{1}{2} \text{ Strich} \qquad (10)$$

oder für einen Schrittwert $\sigma = 0{,}78^m$ nach (9):

$$\text{Reduktion} = s' : 63{,}7 \text{ Halbmillimeter für } s' \text{ Schritte und } \tfrac{1}{2} \text{ Strich.} \qquad (11)$$

Nun sind wir genügend vorbereitet, um ein vollständiges Zahlenbeispiel zu verstehen.

Nivellierungs-Tabelle mit Berechnung der Libellen-Ausschläge.

Linie Germersheim—Bretten

Teilstrecke Strassenstein ($10{,}0^{km}$) — ($10{,}5^{km}$).

Zielweite Schritte	Zielweite Meter	Richtung	Ablesungen der Latte rück / vor	Ablesungen der Latte ×rück / vor	Libelle Obj.	Libelle Oc.	Libelle Obj. + Oc.	Korr.	Bemerkungen
48	38	rück	2,790	×7,210	10,8	43,0	53,8		
49		vor	×7,642	2,357	9,1	41,2	50,3		
					+ 1,7	+ 1,8	+ 3,5	+ 2,7	Stein (10,0) $10^h\ 30^m$
46	36	rück	3,000	×7,001	9,2	41,3	50,5		
45		vor	×7,259	2,741	7,6	39,7	47,3		
					+ 1,6	+ 1,6	+ 3,2	+ 2,3	
49	38	rück	3,358	×6,642	9,2	41,2	50,4		
48		vor	×7,351	2,649	9,2	41,2	50,4		
					+ 0,0	0,0	0,0	0,0	
46	35	rück	2,980	×7,020	8,7	40,6	49,3		
44		vor	×7,171	2,829	6,9	39,0	45,3		
					+ 1,8	+ 1,6	+ 3,4	+ 2,4	
50	39	rück	3,888	6,111	8,3	40,4	48,7		
49		vor	×7,680	2,320	8,3	40,4	48,7		
					0,0	0,0	0,0	0,0	
43	33	rück	3,094	×6,906	8,0	40,1	48,1		
41		vor	×7,311	2,689	8,2	40,4	48,6		
					—0,2	—0,3	— 0,5	—0,3	
40	31	rück	3,878	×6,122	8,3	40,4	48,7		
40		vor	×9,210	0,789	6,7	39,0	45,7		$10^h\ 46^m$
					+ 1,6	+ 1,4	+ 3,0	+ 1,9	Stein (10,5)
638	250		76,612	63,386				+ 9,3	
			= + 6,612	= —6,614				— 0,3	
			+ 6,6130					+ 9,0	
			+ 90						
			+ 6,6220 Halbmeter						
			$h = + 3{,}3110^m$						

*) Die Landes-Aufnahme wendet den Rechenschieber nicht an, sondern hat Tabellen für die Normal-Zielweiten 50^m, 25^m u. s. w.

Hiezu kommt noch die Latten-Korrektion nach § 109. S. 378—381, was wir jedoch, als nicht zum Nivellieren selbst gehörig, hier nicht weiter verfolgen.

Die in der ersten Spalte der Tabelle S. 385 geschriebenen Schrittzahlen sind unmittelbar gezählt, die Meterangaben sind hieraus durch Einteilen der Schrittsumme auf die bekannte Steindistanz 500^m, mittelst des Rechenschiebers, erhalten. Die Libellen-Korrektionen der letzten Spalte sind aus den Ausschlägen der vorhergehenden Spalte nach den Gleichungen (10) bzw. (11) ebenfalls mit dem Rechenschieber gewonnen, z. B.:

$$\frac{38}{49{,}7}\,3{,}5 = 2{,}7$$

oder geradezu für Schrittmass:

$$\frac{48{,}5}{63{,}7}\,3{,}5 = 2{,}7$$

Man macht für diese Rechnung an dem Rechenschieber eine Strichmarke bei der Zahl 49,7 bzw. bei 63,7, und findet dann das Resultat je mit *einer* Einstellung. Der Rechenschieber scheint uns in diesem Falle den Vorzug vor allen anderen Mitteln, numerischen und graphischen Tafeln u. dergl. zu verdienen.

Die Zielweiten.

Die Zielweiten werden durch Abschreiten bestimmt, wobei auf Landstrassen und Eisenbahnen die Kilometer-Nummernsteine zur Regulierung des Schrittmasses dienen.

Die Genauigkeit des Schrittmasses ist für Nivellierzwecke ausreichend, wie aus unseren früheren Mitteilungen (S. 35) zu ersehen ist.

Wollte man die Zielweiten so genau als möglich haben, so wäre es nicht zu schwierig, ein Messband geradezu auf dem Boden mitzuziehen. (Dieses geschah zum Teil bei dem badischen Eisenbahn-Nivellement.)

Tageszeit. Bei der Zielweite 50^m, welche im Sonnenschein auch noch beschränkt werden kann, braucht auf die Tageszeit wenig Rücksicht genommen zu werden, zumal die ungünstigen heissen Mittagsstunden, etwa von 1 Uhr bis 3 Uhr, ohnehin als Ruhepausen auszufallen pflegen.

Geschwindigkeit des Nivellierens.

Bei dem im vorstehenden beschriebenen Nivellier-Verfahren kann man leicht eine Geschwindigkeit von 1^{km} für 1 Stunde erreichen, und leicht stellt sich eine grössere Geschwindigkeit von selbst ein. Wenn die Arbeit einmal im Gange ist, ziehen wir ein energisches Tempo vor, denn wir haben aus den Fehler-Diskussionen die Erfahrung gezogen, dass die Messungen immer *dann am besten stimmten*, wenn die Arbeit schlankweg aus dem Felde ging. Es ist das eine Erfahrung, welche auch bei anderen feinen Arbeiten, z. B. auch bei Basismessungen gemacht wurde.

Die Erklärung dieser Erscheinung ist nicht schwer zu geben: Bei einer so einförmigen Arbeit wie Nivellieren, wo einige wenige Handgriffe hundert- und tausendmal wiederholt werden, stellt sich bald eine Art Mechanismus der Geistes- und Muskel-Thätigkeit ein. Das Anfassen der Schrauben, das Ablesen und Aufschreiben der Teilungen, auch die Handtierungen der Gehilfen, nehmen allmählich einen maschinenartigen Gang an, und funktionieren dann auch mit der Genauigkeit und ganz *von selbst* auch mit der Geschwindigkeit einer Maschine.

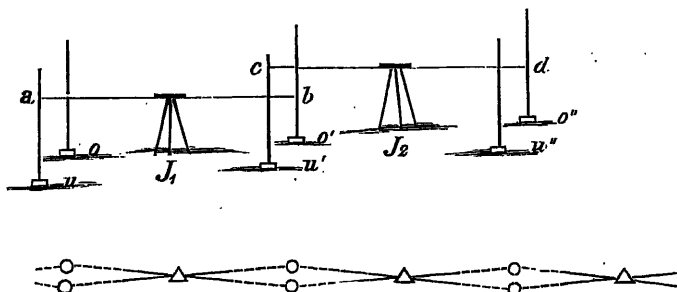
Ein rasches Nivellieren ist auch deswegen viel nützlicher als langsames, weil dadurch mehr unabhängige Wiederholungen möglich werden, welche für die Eliminierung der letzten kleinen, namentlich der einseitig wirkenden Fehler, von ganz besonderer Wichtigkeit sind, und zwar mehr als die allerfeinste *ein*malige Messung.

§ 111. Verschiedene Versicherungs-Hilfsmittel.

Man hat für die Nivellierungen zahlreiche Proben und Versicherungen erfunden, von denen wir noch einige behandeln wollen:

I. Nivellierung mit doppelten Anbindungen.

Es werden dabei stets zwei Nivellierungen neben einander her mit demselben Instrument ausgeführt, wie Fig. 1. zeigt, wobei im Grundriss die Instrumentenstände durch Dreiecke, und die Lattenstände durch Kreise bezeichnet sind.

Fig. 1.
Nivellierung mit doppelten Anbindungen.

Eine noch weiter gehende Veranschaulichung giebt Fig. 1. im Aufriss, wo u, o zwei Latten-Fusspunkte bedeuten (Unterlagsplatten wie in Fig. 7. § 109. S. 377), auf welchen beiden eine Latte aufgestellt wird, so dass beide Lattenstellungen von *einem* Instrumenten-Standpunkte J_1 aus nacheinander abgelesen werden. Ebenso ist es mit u' o', u'' o'' u. s. w. Man hat auf diese Weise zahlreiche Proben.

Die Landes-Aufnahme wendet dieses Verfahren bei den sogen. „Signal-Nivellierungen“ an, und zwar wird hiezu die Unterlagsplatte Fig. 7. § 109. S. 377 mit *zwei* ungleich hohen Bolzen B versehen, auf welche nach einander die Latte gestellt wird.

Dieses Verfahren ist früher sehr allgemein angewendet worden, in Bayern, Sachsen, Württemberg, Baden u. s. w., indessen die auf den ersten Blick bestechenden Vorzüge vermindern sich sehr bei genauer Untersuchung.

Die beiden dadurch geschaffenen Nivellierungszüge sind durchaus *nicht unabhängig*; viele im Instrument selbst, in der Luft, im Boden u. s. w. verborgene Fehlerquellen beeinflussen *beide* Nivellierungen nahezu gleich, und die mittleren Fehler, welche man aus den Abweichungen zweier solcher verbundener Nivellierungen berechnet, geben meist einen illusorischen Massstab für die Genauigkeit des Ganzen. (Z. B. fand Verfasser in Baden aus solchen Doppelbindungen kleine mittlere Fehler unter 1^{mm} für 1^{km}, während der mittlere Fehler, aus unabhängigen Messungen berechnet, etwa 2^{mm} bis 3^{mm} auf 1^{km} ist.

Auch gegen grobe Ablesefehler geben die Doppelbindungen keine *völlige* Sicherheit (z. B. sind in Baden trotzdem zwei Fehler von rund $0{,}1^m$ untergelaufen).

Bei alledem bleibt das Nivellieren mit doppelten Anbindungen ein sehr schätzenswertes Verfahren für Arbeiten zweiten Rangs und namentlich dann, wenn man nicht Zeit hat, *hin und her* zu nivellieren.

II. Ablesen an mehreren Fäden.

Die ersten deutschen sogen. Gradmessungs-Nivellierungen hatten fast alle die Einrichtung von *drei* Horizontalfäden im Gesichtsfelde des Fernrohrs, um dadurch die Ablesungs-Genauigkeit zu steigern, und um durch die Ablesungs-Differenzen zwischen den Fäden zugleich eine gute Entfernungsbestimmung zu haben.

Der letztere Vorteil ist nicht zu unterschätzen, aber dennoch ist man nach den bei den badischen Nivellierungen gemachten Erfahrungen bald von den drei Fäden wieder abgegangen, weil die Mühe der dreifachen Ablesung sich als nicht lohnend herausstellte. Die Ablesungen am oberen und unteren Faden sind aus dioptrischen Gründen niemals ebenso scharf als die Ablesung am Mittelfaden; und keinenfalls darf man die drei Ablesungen als unabhängig annehmen, und etwa glauben, die Genauigkeit würde durch drei Fäden im Verhältnis $\sqrt{3} : 1$ gesteigert.

Bei der Landes-Aufnahme wurde immer nur an *einem* Faden abgelesen.

III. Einstellen auf die Mitte eines Feldes.

Ohne Zweifel ist die Ablesung und Schätzung 0,5 in der *Mitte* eines Lattenfeldes genauer als eine Ablesung 0,1 oder 0,8 u. s. w.; und diese Überlegung hat dazu geführt, den Faden je auf die Mitte eines Feldes einzustellen, was bei dem Spielraum, den man mit dem Libellen-Ausschlag hat, wohl möglich ist. (S. *Vogler*, Über das holländische Präzisions-Nivellement von *Cohen Stuart*, „Zeitschr. f. Verm. 1878", S. 7—18.)

Ohne hierüber und über ähnliche Fragen der Schätzungsfehler ein bestimmtes Urteil hier auszusprechen, schliessen wir unsere Betrachtungen hierüber mit der Bemerkung, dass Nivellieren eine durchaus nicht bloss optische, sondern auch eine *mechanische* Verrichtung ist, und dass, wenn *optische* Verfeinerungen den Ausschlag geben würden, man wohl auf einer Genauigkeit von $\pm 1^{mm}$ auf 1^{km} angelangt wäre, was aber nicht der Fall ist.

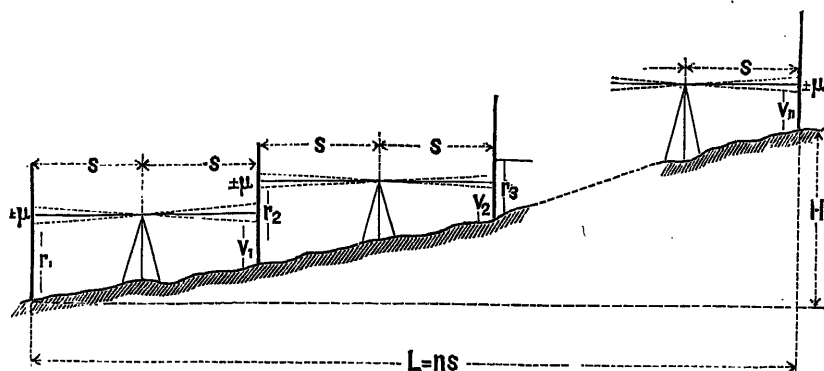
§ 112. Fehler-Gesetze des Nivellierens.

Wir betrachten die verschiedenen Fehler, welche in das Schluss-Ergebnis einer Nivellierung eingehen, und haben dazu in Fig. 1. S. 389 die Annahme gemacht, dass eine lange Linie L in n Zielweiten von der Länge s, also mit $\frac{n}{2}$ Aufstellungen, nivelliert werde.

Zuerst entsteht die Frage, welches der mittlere Fehler $\pm \mu$ einer einzelnen Latten-Ablesung ist. Dieser Fehler μ setzt sich zusammen aus dem Fehler des Zielens mit dem Fernrohr und aus dem Fehler der Einstellung oder Ablesung der Libelle. Doch ist es jetzt nicht nötig, diese zwei Fehler einzeln zu kennen; wir wollen ihre Zusammenwirkung mit der Bezeichnung $\pm \mu$ weiter behandeln, und als erstes Gesetz annehmen, der Latten-Ablesungsfehler μ sei proportional der Zielweite s, d. h.:

$$\pm \mu = k s \qquad (1)$$

Auf mässige Entfernungen ist dieses jedenfalls richtig, und nur wenn bei grösseren Entfernungen besondere Unsicherheiten entstehen (Luft-Zittern im Sonnenschein u. s. w.), so wäre das Gesetz (1) abzuändern, doch ist davon jetzt nicht die Rede.

Fig. 1.
Fehler-Fortpflanzung des Nivellierens.

Der Gesamt-Höhen-Unterschied zwischen dem Anfangspunkte und dem Endpunkte der Linie L setzt sich nach Fig. 1. so zusammen:

$$H = r_1 - v_1 + r_2 - v_2 + r_3 - \dots v_n$$

Jede Ablesung r oder v ist mit dem mittleren Fehler $\pm \mu$ behaftet, es ist daher der Fehler ΔH von H:

$$\Delta H = \pm \mu \pm \mu \pm \mu \pm \mu \pm \mu + \dots \pm \mu$$

und der *mittlere* Fehler von M:

$$M = \sqrt{\mu^2 + \mu^2 + \mu^2 + \mu^2 + \mu^2 + \dots \mu^2} = \sqrt{n \mu^2}$$

Hier ist nach Fig. 1.:

$$n = \frac{L}{s} \tag{2}$$

also:

$$M = \sqrt{\frac{L}{s} \mu^2}$$

Wenn man hier auch noch die erste Gleichung (1) berücksichtigt, so hat man:

$$M = k \sqrt{L s} \tag{3}$$

Diese Gleichung enthält *zwei* Fehler-Gesetze, welche in Worten so lauten:

Erstes Fehler-Gesetz: Für ein und dasselbe Instrument und sonstige gleiche Umstände (k konstant) wächst bei konstanter Zielweite s der mittlere Fehler der Nivellierung proportional mit der *Quadratwurzel der nivellierten Strecke L.*

*Zweites Fehler-Gesetz**): Für dasselbe Instrument wächst der mittlere Nivellierungsfehler M, abgesehen von der Länge der Nivellierungslinie, proportional mit der *Quadratwurzel der Zielweite s.*

---

*) Die Priorität dieses zweiten Fehler-Gesetzes gehört der ersten Auflage dieses Werkes, „Taschenbuch der praktischen Geometrie 1873“, S. 165. (Man vergleiche hiezu auch „Zeitschr. f. Verm. 1877“, S. 66, S. 108 und S. 112.)

Dieses zweite Gesetz giebt eine Antwort auf die Frage, ob es besser ist, eine Linie L zu nivellieren *entweder* mit wenigen Aufstellungen aber unsicheren Einzelablesungen, *oder* mit vielen Aufstellungen und genaueren Einzelablesungen?

Das mathematische Gesetz entscheidet für das zweite Verfahren mit *kurzen* Zielweiten s.

Als grösste Zielweite gilt heute ziemlich allgemein die Entfernung $s = 50$ Meter, doch ist diese Wahl keine mathematische Folge aus dem fraglichen Gesetz. Ob unter gegebenen Verhältnissen eine kleinere oder auch eine grössere Zielweite nützlich ist, lässt sich nicht allgemein sagen.

Da eine Nivellierungs-Arbeit mit kleinen Zielweiten mühsamer ist als eine solche mit grossen Zielweiten, und da man die Arbeitsmenge nahezu umgekehrt proportional der Zielweite annehmen kann, so folgt, dass die erreichte Genauigkeit proportional der Quadratwurzel aus der aufgewendeten Arbeit wächst.

Da für konstante Zielweite s der mittlere Fehler M proportional $\sqrt{L}$ ist, so müssen die *Gewichte* verschiedener Nivellierungs-Resultate bei konstanter Zielweite s, und unter sonst gleichen Umständen, umgekehrt proportional den Längen L genommen werden, also:

$$p : p' = \frac{1}{L} : \frac{1}{L'} \tag{4}$$

Übergehend zu der zahlenmässigen Bestimmung der Nivellierungsfehler betrachten wir die Libelle und das Fernrohr.

Die Empfindlichkeit der Libelle und die Vergrösserung des Fernrohrs müssen in einer gewissen Beziehung stehen. Folgende Verhältnisse dürften sich empfehlen, wobei die Empfindlichkeit als Winkelwert für einen Ausschlag von 1 Linie ($2{,}3^{mm}$) angegeben ist.

Instrument	*Empfindlichkeit der Libelle*	*Vergrösserung des Fernrohrs*
zur Aufnahme von Querprofilen .	15—30″	10—15
zur Aufnahme von Längenprofilen .	10—15″	15—25
zur Ausführung von Nivellierungen erster Ordnung	3—6″	25—40

Daraus kann man schon schliessen, dass feine Nivellier-Instrumente sowohl an der Libelle als am Fernrohr nur etwa 1″ Zielfehler haben werden.

Zur Gewinnung einer ersten Übersicht berechnen wir nach der Gleichung (3) eine kleine Tabelle, wobei für einen Zielfehler k' in Sekunden zu setzen ist: $k = k' : \varrho''$, also:

$$M = \frac{k''}{\varrho''} \sqrt{L s} \tag{5}$$

Mittlerer Nivellierungsfehler für 1 Kilometer Länge.

Zielschärfe	Zielweite s								
	20^m	40^m	50^m	75^m	100^m	150^m	200^m	300^m	
$k'' = \pm 1''$	$\pm 0{,}7^{mm}$	$\pm 1{,}0^{mm}$	$\pm 1{,}1^{mm}$	$\pm 1{,}3^{mm}$	$\pm 1{,}5^{mm}$	$\pm 1{,}9^{mm}$	$\pm 2{,}2^{mm}$	$\pm 2{,}7^{mm}$	(6)
$k'' = \pm 2''$	1,4	1,9	2,2	2,7	3,1	3,8	4,3	5,3	
$k'' = \pm 5''$	3,4	4,8	5,4	6,6	7,7	9,4	10,8	13,3	

Diese Tabelle giebt manches zu erkennen: Bei der üblichen Zielweite von 50^m ist nur eine Zielschärfe von 2″ nötig, um einen mittleren Fehler von $2,2^{mm}$ auf 1^{km} zu erlangen, und dabei ist vorausgesetzt, dass nach jeder Latte immer nur *eine* Zielung stattfinde.

Aus dem Umstande, dass die theoretische Genauigkeit der Tabelle (6) S. 390 im allgemeinen in Wirklichkeit nicht erreicht wird, ist zu schliessen, dass in der Ausführung noch manche kleine Fehler, Erschütterungen des Instruments, Senkungen des Stativs und der Latten, dann Zielungs-Unsicherheiten in der Luft u. s. w., hinzukommen, welche in der bisherigen Theorie nicht berücksichtigt waren.

Entsprechend gelten auch die theoretischen Sätze, u. A. über die Gewichte nach (4), nur genähert.

Hin- und Her-Nivellieren.

Hat man eine Linie in verschiedene Strecken eingeteilt (welche nicht etwa *gleich* zu sein brauchen), und hat man jede Strecke s hin und her nivelliert, so giebt das eine Differenz d, und auf eine grössere Zahl solcher Differenzen kann man eine Genauigkeits-Rechnung gründen, welche theoretisch in Band I. § 11. vorbereitet ist, welche aber auch mit dem Gewichts-Gesetz in (4) wohl unmittelbar verstanden werden kann:

$$\begin{array}{llll} \text{Strecke} & s_1 & \text{giebt} & h_1 - h_1' = d_1 \\ \text{„} & s_2 & \text{„} & h_2 - h_2' = d_2 \\ & \vdots & & \\ \text{„} & s_n & \text{„} & h_n - h_n' = d_n \end{array}$$

Die mittlere Differenz für die Streckenlänge $s = 1$ wird:

$$D = \sqrt{\frac{1}{n}\left(\frac{d_1^2}{s_1} + \frac{d_2^2}{s_2} + \frac{d_3^2}{s_3} + \ldots \frac{d_n^2}{s_n}\right)} = \sqrt{\frac{1}{n}\left[\frac{d\,d}{s}\right]} \tag{7}$$

der mittlere Fehler *einer* Nivellierung der Strecken-Einheit:

$$m = \frac{D}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1}{2\,n}\left[\frac{d\,d}{s}\right]} \tag{8}$$

und der mittlere Fehler des Mittels aus zwei Nivellierungen der Strecken-Einheit:

$$M = \frac{m}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{n}\left[\frac{d\,d}{s}\right]} \tag{9}$$

Die Strecken s zählt man gewöhnlich in Kilometern, und die Differenzen d in Millimetern, und dann geben die Formeln (7), (8) und (9) einen Wert in Millimetern für 1 Kilometer.

Wir nehmen hiezu ein Beispiel von unserem im Jahr 1887 ausgeführten Nivellement der Stadt Hannover, und zwar geben wir in folgender Tabelle die zweifache Nivellierung der $1,8^{km}$ langen Hauptstrasse von Hannover (Lange-Laube und Georgsstrasse). Es ist dazu zu bemerken, dass das Zeichen × nach dem Vorgange der Landes-Aufnahme dekadische Ergänzung bedeutet, z. B.:

$$_{\times}9,9095 = 9,9095 - 10 = -0,0905.$$

Die Rechnung mit dekadischen Ergänzungen ist beim Nivellieren sehr bequem, weil man nicht zwei Spalten mit + und — zu führen braucht.

Punkt	Nivellierung I Höhen-Unterschied	Nivellierung II Höhen-Unterschied	I—II $= d$	Entfernung s	$\sqrt{s}$	$\frac{d}{\sqrt{s}}$	$\frac{d^2}{s}$	Mittel $\frac{I+II}{2}$
	m	m	mm	km		mm		mm
(2)	0,4428	0,4418	+ 1,0	0,20	0,45	2,2	4,84	0,4423
(75)	0,3540	0,3541	— 0,1	0,20	0,45	0,2	0,04	0,3541
(76)	×9,8016	×9,8034	— 1,8	0,17	0,41	4,4	19,36	×9,8025
(77)	0,2330	0,2340	— 1,0	0,17	0,41	2,4	5,76	0,2335
(78)	0,2157	0,2144	+ 1,3	0,18	0,42	3,1	9,61	0,2150
(79)	0,1940	0,1934	+ 0,6	0,23	0,48	1,2	1,44	0,1937
(80)	×9,5822	×9,5808	+ 1,4	0,16	0,40	3,5	12,25	×9,5815
(81)	×9,4694	×9,4686	+ 0,8	0,16	0,40	2,0	4,00	×9,4690
(82)	×9,1178	×9,1162	+ 1,6	0,18	0,42	3,8	14,44	×9,1170
(83)	0,4990	0,4984	+ 0,6	0,15	0,39	1,5	2,25	0,4987
(84)	×9,9095	×9,9051	+ 4,4	1,80			73,99	×9,9073
	$= -0,0905^m$	$= -0,0949^m$						$= -0,0927^m$

Der mittlere Fehler des Mittels aus beiden Nivellierungen wird:

$$M = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{73,99}{10}} = \pm 1,36^{mm} \text{ für } 1^{km} \tag{10}$$

Für die in diesen Fällen häufig vorkommende Berechnung von Ausdrücken $\frac{d}{\sqrt{s}}$ und $\frac{d^2}{s}$ haben wir im Anhang auf S. [7] und [8] einige Hilfstabellen gegeben. (Man kann auch den Rechenschieber benützen, unmittelbare Ausrechnung mit 4stelligen Logarithmen, u. s. w., und solche Hilfsmittel zur Probe gegenseitig anwenden.)

Bei der Verteilung der Differenzen I—II ist es eine bekannte Erfahrung, dass die Vorzeichen einseitig nach einer Seite hinneigen. Dieses zeigt sich auch an dem vorstehenden kleinen Beispiel: Wir haben 7 Mal positive Differenz I—II, und nur 3 Mal negative Differenz Die Summe der positiven Differenzen ist $+ 7,3^{mm}$ und die Summe der negativen Differenzen ist $- 2,9^{mm}$, also positive Differenz unbedingt vorwiegend. In den Hin- und Her-Messungen hebt sich dieses grossenteils wieder auf. Die Gründe solcher einseitigen Differenzen lassen sich vermuten (z. B. Einsinken des Instrumentes oder der Latten u. s. w.), aber schwer nachweisen; die Hauptsache ist, dass man unbedingt das zweite Nivellement in der *Gegen*-Richtung des ersten macht.

Linien-Ausgleichung.

Wenn eine Linie mit Zwischenpunkten hin und her nivelliert wird, so besteht die Ausgleichung lediglich darin, dass man die Höhen auf einen Ausgangspunkt bezieht und dann überall das einfache Mittel nimmt. (Etwaige grobe Fehler, welche auch vorkommen können, sind besonders zu untersuchen.)

Wenn eine Linie in sich selbst zurückkehrt, und hier einen Widerspruch zeigt, so wird derselbe nach dem Verhältnis der Entfernungen auf die Zwischenpunkte verteilt.

Ebenso wird verfahren, wenn eine Nivellierung am Anfang und am Ende an zwei bereits anderweitig unabänderlich fest bestimmte Punkte angeschlossen wird (z. B. an zwei Bolzen der Landes-Aufnahme).

Diese einfachen Ausgleichungen, welche die Praktiker sozusagen nach dem Gefühl erfunden haben, entsprechen vollständig den theoretischen Gesetzen; und man kann auch noch weitere Schlüsse darauf gründen.

Wir wollen diese Fälle nach dem Satze vom arithmetischen Mittel aus zwei ungleich gewichtigen Messungen behandeln.

Wenn ein Nivellierungszug von der Länge L in einem geschlossenen Polygon oder zwischen zwei Fixpunkten mit einem Widerspruch w abschliesst, so kann man die Höhe irgend eines Zwischenpunktes, welcher den Abstand l vom Anfangspunkt und den Abstand l' vom Endpunkt des Zuges hat, auf zweifache Weise ausdrücken; die beiden Resultate werden aber unter allen Umständen um w differieren; dieselben sind:

$$\left.\begin{array}{lll} 1) & H = h & \text{mit dem Gewicht } p_1 = \dfrac{1}{l} \\ 2) & H = h + w & \quad " \quad " \quad p_2 = \dfrac{1}{l'} \end{array}\right\} \tag{11}$$

Das Mittel ist:

$$H = \frac{p_1 h + p_2 (h + w)}{p_1 + p_2} = \frac{\dfrac{h}{l} + \dfrac{h + w}{l'}}{\dfrac{1}{l} + \dfrac{1}{l'}}$$

$$H = \frac{h l' + h l + w l}{l + l'} = h + w \frac{l}{l + l'} \tag{12}$$

Statt dessen kann man auch schreiben:

$$H = (h + w) - w \frac{l'}{l + l'} \tag{13}$$

Die zwei Gleichungen (12) und (13) sagen in Worten: Man hat den Widerspruch w proportional den Längen l und l' auf die zwei Resultate h und $h + w$ zu verteilen.

Der mittlere Fehler M einer Nivellierung vom Gewicht 1, d. h. von der Länge $l = 1$ wird:

$$m = \sqrt{p_1 \left(w \frac{l}{l + l'}\right)^2 + p_2 \left(w \frac{l'}{l + l'}\right)^2}$$

und mit Einsetzung der Gewichte nach (11):

$$m = \frac{w}{l + l'} \sqrt{l + l'} = \frac{w}{\sqrt{l + l'}} = \frac{w}{\sqrt{L}} \tag{14}$$

d. h. man findet den mittleren Fehler für die Längen-Einheit des Nivellierungszuges, indem man den Abschluss-Widerspruch w durch die Quadratwurzel der Länge L dividiert, was auch deswegen von vorn herein klar ist, weil man w zu behandeln hat als den mittleren Fehler des ganzen Zuges von der Länge L.

Mit Weiterbenützung des Satzes (7) S. 21 in Band I. findet man auch noch, dass der mittlere Fehler der ausgeglichenen Höhe ist:

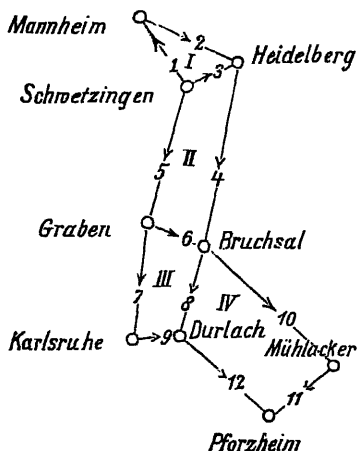
$$M = \frac{m}{\sqrt{p_1 + p_2}} = \frac{w}{L} \sqrt{l l'} \tag{15}$$

Dieses erreicht seinen grössten Wert, wenn $l = l' = \frac{L}{2}$ ist, und in diesem Falle wird:

$$M_{max} = \frac{w}{2} \tag{16}$$

Der Wurzelwert $\sqrt{l\,l'}$ in (15) hat bekanntlich die geometrische Bedeutung der Halbkreis-Ordinate für den Durchmesser $l + l' = L$ und das giebt eine Anschauung des Anwachsens und Wiederabnehmens des mittleren Fehlers *nach* der Ausgleichung zwischen zwei Fixpunkten im Abstande L.

§ 113. Nivelliernetz-Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen.

Fig. 1.
Teil des badischen Nivellierungs-Netzes.
(Massstab etwa 1 : 1 200 000.)

Die Pfeile bedeuten die Richtung des Steigens.)

Bei der Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen haben wir nach den Regeln zu verfahren, welche früher in Band I. § 37. bis § 42. entwickelt und dort in § 43. S. 104—106 übersichtlich zusammengestellt worden sind.

Die Anwendung dieser Regeln auf ein Nivelliernetz gestaltet sich sehr einfach.

Wir nehmen hiefür sofort ein Zahlen-Beispiel, und zwar nach Andeutung von Fig. 1. ein Stück des badischen Landes-Nivelliernetzes, dessen amtliche Bearbeitung wir 1883 bis 1884 ausgeführt haben*).

Die Punkte, um welche es sich hiebei handelt, sind durch Höhen-Marken älterer Art (nach Fig. 4. § 106. S. 360) bezeichnet.

Folgendes ist die Zusammenstellung der nivellierten Höhen-Unterschiede h, und der Entfernungen s:

Abriss der Messungen.

Nr.	Linie von — bis	Entfernung s	Niv.-Höhen-Unterschied h	
1.	Schwetzingen—Mannheim	14 km	0,893 m	(1)
2.	Mannheim—Heidelberg	20	9,125	
3.	Schwetzingen—Heidelberg	9	10,012	
4.	Heidelberg—Bruchsal	32	2,640	
5.	Schwetzingen—Graben	26	6,193	
6.	Graben—Bruchsal	12	6,481	
7.	Graben—Karlsruhe	22	6,999	
8.	Bruchsal—Durlach	17	1,712	
9.	Karlsruhe—Durlach	5	1,212	
10.	Bruchsal—Mühlacker	33	126,214	
11.	Mühlacker—Pforzheim	13	39,844	
12.	Durlach—Pforzheim	26	164,388	
		$[s] = 229$ km		

*) „Die Grossh. Bad. Haupt-Nivellements mit den Anschlüssen an die Nachbar-Staaten“ bearbeitet von Prof. Dr. *Jordan*. Herausgegeben von der Grossh. Oberdirektion des Wasser- und Strassenbaus. Karlsruhe. Druck und Kommissions-Verlag der *G. Braun*schen Hofbuchhandlung. 1885.

Übergehend zu der Aufstellung der Bedingungs-Gleichungen schreiben wir nach dem Anblick von Fig. 1. S. 394;

I. Es *soll* sein: $h_1 + h_2 - h_3 = 0$ (2)

Setzt man aber die gemessenen h aus vorstehendem Abriss ein, so hat man:

$$+0{,}893 + 9{,}125 - 10{,}012 = +0{,}006 = w_1 \quad (3)$$

Um diesen Widerspruch zu tilgen, fügt man zu jeder Messung eine Verbesserung v hinzu, und dann wird sein:

$$(h_1 + v_1) + (h_2 + v_2) - (h_3 + v_3) = 0 \quad (4)$$

oder in Zahlen:

$$+(0{,}893 + v_1) + (9{,}125 + v_2) - (10{,}012 + v_3) = 0 \quad (5)$$

Die Verbindung von (3) und (5) giebt:

$$\text{I.} \quad v_1 + v_2 - v_3 + 0{,}006 = 0 \quad (6)$$

Dieses ist die erste Bedingungs-Gleichung; und wenn man mit den drei anderen Polygonen ebenso verfährt, und wenn man zur Probe auch noch den Gesamt-Umfang hinzu nimmt, so erhält man tabellarisch folgendes:

Polygon	Linie	Länge s	Nivellierte Höhen-Unterschiede (+)	Nivellierte Höhen-Unterschiede (−)	Widerspruch w
I.	1. Schwetzingen—Mannheim	14km	+ 0,893m		
	2. Mannheim—Heidelberg .	20	+ 9,125		
	3. Heidelberg—Schwetzingen	9		— 10,012m	
		43	+ 10,018	— 10,012	$w_1 = +6^{mm}$
II.	3. Schwetzingen—Heidelberg	9	+ 10,012		
	4. Heidelberg—Bruchsal . .	32	+ 2,640		
	6. Bruchsal—Graben . . .	12		— 6,481	
	5. Graben—Schwetzingen .	26		— 6,193	
		79	+ 12,652	— 12,674	$w_2 = -22^{mm}$
III.	6. Graben—Bruchsal . . .	12	+ 6,481		
	8. Bruchsal—Durlach . . .	17	+ 1,712		
	9. Durlach—Karlsruhe . .	5		— 1,212	
	7. Karlsruhe—Graben . . .	22		— 6,999	
		56	+ 8,193	— 8,211	$w_3 = -18^{mm}$
IV.	10. Bruchsal—Mühlacker . .	33	+126,214		
	11. Mühlacker—Pforzheim .	13	+ 39,844		
	12. Pforzheim—Durlach . .	26		—164,388	
	8. Durlach—Bruchsal . . .	17		— 1,712	
		89	+166,058	—166,100	$w_4 = -42^{mm}$
Gesamt-Umfang	2. Mannheim—Heidelberg .	20	+ 9,125		
	4. Heidelberg—Bruchsal . .	32	+ 2,640		
	10. Bruchsal—Mühlacker . .	33	+126,214		
	11. Mühlacker Pforzheim .	13	+ 39,844		
	12. Pforzheim—Durlach . .	26		—164,388	
	9. Durlach—Karlsruhe . .	5		— 1,212	
	7. Karlsruhe—Graben . . .	22		— 6,999	
	5. Graben—Schwetzingen .	26		— 6,193	
	1. Schwetzingen—Mannheim	14	+ 0,893		
		191	+178,716	—178,792	$w' = -76^{mm}$

Hier bestehen mehrere Rechenproben:

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = w' \quad \text{d. h.} \quad +6 - 22 - 18 - 42 = -76$$

ferner für die s:

$$\frac{43 + 79 + 56 + 89 + 191}{2} = 229$$

Dabei ist 229 die Summe $[s]$, welche schon früher in dem Abrisse der Messungen angegeben war (S. 394).

Einen anderen Zweck als diese Rechenproben hatte die Ansetzung des Gesamt-Umfangs (S. 395) nicht, namentlich darf man nicht etwa den Umfang noch als fünfte Bedingungs-Gleichung ausser I. II. III. IV. in die Ausgleichung einführen, weil ja die Umfangsprobe in den vier Einzelschlüssen schon enthalten ist.

Die vier unabhängigen Bedingungs-Gleichungen sind hiernach:

$$\text{I.} \quad +v_1 + v_2 - v_3 + 6^{mm} = 0 \tag{6}$$

$$\text{II.} \quad +v_3 + v_4 - v_6 - v_5 - 22^{mm} = 0 \tag{7}$$

$$\text{III.} \quad +v_6 + v_8 - v_9 - v_7 - 18^{mm} = 0 \tag{8}$$

$$\text{IV.} \quad +v_{10} + v_{11} - v_{12} - v_8 - 42^{mm} = 0 \tag{9}$$

Wir kommen zur Frage der *Gewichte*. Wir nehmen hier schlechthin die Gewichte umgekehrt proportional den Entfernungen s (wie in § 112. Gleichung (4) S. 390 gezeigt wurde), und damit entsteht folgende Tabelle:

Nr.		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}	w
I.	a	+1	+1	−1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	^{mm} + 6
II.	b	.	.	+1	+1	−1	−1	.	.	.	.	.	.	− 22
III.	c	.	.	.	.	.	+1	−1	+1	−1	.	.	.	− 18
IV.	d	.	.	.	.	.	.	.	−1	.	+1	+1	−1	− 42
$\frac{1}{p}$	$= s$	14	20	9	32	26	12	22	17	5	33	13	26	

(10)

Hiernach wird:

$$\left[\frac{aa}{p}\right] = 14 + 20 + 9 = 43 \qquad \left[\frac{ab}{p}\right] = -9$$

$$\left[\frac{bb}{p}\right] = 9 + 32 + 26 + 12 = 79 \qquad \left[\frac{bc}{p}\right] = -12$$

. . . . u. s. w.

Daraus ergeben sich die Normalgleichungen in abgekürzter Schreibweise:

$$\left.\begin{array}{l} \underline{+43\,k_1} - 9\,k_2 \quad \cdot\cdot \quad \cdot\cdot \quad + 6^{mm} = 0 \\ \qquad \underline{+79\,k_2} - 12\,k_3 \quad \cdot\cdot \quad - 22^{mm} = 0 \\ \qquad\qquad \underline{+56\,k_3} - 17\,k_4 - 18^{mm} = 0 \\ \qquad\qquad\qquad \underline{+89\,k_4} - 42^{mm} = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \underline{0} \end{array}\right\} \tag{11}$$

Die allmähliche Auflösung nach dem Schema von Band I. § 41. S. 102 giebt:

$$\left.\begin{array}{l} \underline{+77{,}1\,k_2} - 12{,}0\,k_3 \quad . \; . \quad - 20{,}7 = 0 \\ \qquad \underline{+56{,}0\,k_3} - 17{,}0\,k_4 - 18{,}0 = 0 \\ \qquad\qquad \underline{+89{,}0\,k_4} - 42{,}0 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad \underline{-\;0{,}8} \end{array}\right\} \quad (12)$$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{+54{,}1\,k_3} - 17{,}0\,k_4 - 21{,}2 = 0 \\ \qquad \underline{+89{,}0\,k_4} - 42{,}0 = 0 \\ \qquad\qquad \underline{-\;6{,}4} \end{array}\right\} \quad (13)$$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{+83{,}7\,k_4} - 48{,}6 = 0 \;, \quad k_4 = +\frac{48{,}6}{83{,}7} = +0{,}581 \\ \qquad \underline{-14{,}7} \end{array}\right\} \quad (14)$$

$$-42{,}9 = -[p\,v\,v] \quad (15)$$

In (14) hat man die letzte Korrelate k_4 erhalten, welche nun rückwärts in (13) gesetzt wird, und $k_3 = +0{,}575$ giebt, und so weiter zurück, so dass man alle vier Korrelaten erhält:

$$k_1 = -0{,}063 \qquad k_2 = +0{,}358 \qquad k_3 = +0{,}575 \qquad k_3 = +0{,}581 \quad (16)$$

Nun hat man die Formeln für die v, nämlich allgemein:

$$v_1 = a_1 \frac{k_1}{p_1} + b_1 \frac{k_2}{p_1} + c_1 \frac{k_3}{p_1} + d_1 \frac{k_4}{p_1}$$

$$v_2 = a_2 \frac{k_1}{p_2} + b_2 \frac{k_2}{p_2} + c_2 \frac{k_3}{p_2} + d_2 \frac{k_4}{p_2}$$

. . . . u. s. w.

Diesem entspricht folgende Tabelle, welche sich an die frühere Tabelle (10) anschliesst:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
$\frac{1}{p} = s$	14	20	9	32	26	12	22	17	5	33	13	26
$k_1 = -0{,}063$, $k_1 s =$	−0,9	−1,3	+0,6	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$k_2 = +0{,}358$, $k_2 s =$	.	.	+3,3	+11,5	−9,3	−4,3	.	.	.	.	.	.
$k_3 = +0{,}575$, $k_3 s =$	.	.	.	.	.	+6,9	−12,6	+9,8	−2,9	.	.	.
$k_4 = +0{,}581$, $k_4 s =$	.	.	.	.	.	.	.	−9,9	.	+19,2	+7,6	−15,1
$v =$	−0,9	−1,3	+3,9	+11,5	−9,3	+2,6	−12,6	−0,1	−2,9	+19,2	+7,6	−15,1

Die so berechneten v setzt man zu den beobachteten h, und erhält damit folgenden

Abriss der Ausgleichung:

Nr.	Linie von — bis	Gemessen s	Gemessen h	v	Aus-geglichen $h+v$	$\sqrt{s}$	$\frac{v}{\sqrt{s}}$	$\frac{v^2}{s}$
		km	m	mm	m			
1.	Schwetzingen—Mannheim	14	0,893	— 0,9	0,8921	3,74	0,24	0,06
2.	Mannheim—Heidelberg	20	9,125	— 1,3	9,1237	4,47	0,29	0,08
3.	Schwetzingen—Heidelberg	9	10,012	+ 3,9	10,0159	3,00	1,30	1,69
4.	Heidelberg—Bruchsal	32	2,640	+11,5	2,6515	5,66	2,03	4,12
5.	Schwetzingen—Graben	26	6,193	— 9,3	6,1837	5,10	1,82	3,31
6.	Graben—Bruchsal	12	6,481	+ 2,6	6,4836	3,46	0,75	0,56
7.	Graben—Karlsruhe	22	6,999	—12,6	6,9864	4,69	2,69	7,24
8.	Bruchsal—Durlach	17	1,712	— 0,1	1,7119	4,12	0,02	0,00
9.	Karlsruhe—Durlach	5	1,212	— 2,9	1,2091	2,24	1,29	1,66
10.	Bruchsal—Mühlacker	33	126,214	+19,2	126,2332	5,74	3,35	11,22
11.	Mühlacker—Pforzheim	13	39,844	+ 7,6	39,8516	3,61	2,10	4,41
12.	Durlach—Pforzheim	26	164,388	—15,1	164,3729	5,10	2,96	8,76
								43,11

$$\text{Summe} \left[\frac{v\,v}{s}\right] = [p\,v\,v] = 43{,}11 \tag{18}$$

Nachdem die $h+v$ ausgerechnet sind, überzeugt man sich zuerst, ob die Bedingungs-Gleichungen stimmen, d. h. ob man nun die Höhen alle widerspruchsfrei zusammensetzen kann.

Dieses ist mit unseren $h+v$ der Fall, und indem wir nun *eine* Höhe als gegeben annehmen, nämlich Karlsruhe = 116,745 über N. N., finden wir die übrigen wie folgt:

Mannheim	104,4670^m	üb. N. N.	Heidelberg	113,5907^m	üb. N. N.	(19)
Schwetzingen	103,5749	„ „ „	Bruchsal	116,2421	„ „ „	
Graben	109,7586	„ „ „	Mühlacker	242,4754	„ „ „	
Karlsruhe	**116,7450**	„ „ „	Pforzheim	282,3270	„ „ „	
Durlach	117,9541	„ „ „				

(Diese Höhen weichen von unserer badischen *Gesammt*-Ausgleichung bis zu 16^{mm} in Mannheim ab. Hier handelt es sich nur um ein Rechenbeispiel, weshalb diese Abweichungen uns nichts angehen.)

Nachdem die Höhen stimmen, gehen wir zu den Genauigkeitsfragen, wozu bereits in (15) und (18) die Summe $\left[\frac{v\,v}{s}\right]$ mit Probe berechnet ist.

Um alles zu zeigen, wollen wir auch noch die dritte Berechnung dieser Art machen:

	w	k	$-w\,k$
I.	+ 6^{mm}	— 0,063^{mm}	+ 0,378
II.	— 22	+ 0,358	+ 7,876
III.	— 18	+ 0,575	+ 10,350
IV.	— 42	+ 0,581	+ 24,402
			+ 43,006 = — $[w\,k]$ (20)

Nun haben wir mit genügenden Proben, aus (15), (18) und (20), im Mittel:

$$[p\,v\,v] = \left[\frac{v\,v}{s}\right] = 43{,}0$$

also den mittleren Fehler der Gewichtseinheit, da wir vier Bedingungs-Gleichungen hatten:

$$m = \sqrt{\frac{43{,}0}{4}} = \pm\,3{,}3^{mm} \text{ für 1 Kilometer} \tag{21}$$

Endlich wollen wir auch noch den mittleren Fehler einer Funktion der ausgeglichenen Höhen bestimmen, wozu der Höhen-Unterschied von Mannheim bis Pforzheim gewählt werden möge.

Ja, wir wollen hiefür, zur Probe, *zwei* Wege wählen, nämlich nach Fig. 1. S. 394:

Mannheim—Pforzheim

$$H = -h_1 + h_5 + h_7 + h_9 + h_{12} \quad \textit{oder} \quad H = h_2 + h_4 + h_{10} + h_{11}$$

Die Rechnung geht nach den Formeln (16) S. 106, Band I. und schliesst sich an unsere bereits gemachte Elimination (11)—(15) an.

Damit erhalten wir für den ersten Weg, nämlich:

$$-h_1 + h_5 + h_7 + h_9 + h_{12} \quad \text{(s. o.)}$$

folgendes:

$$f_1 = -1 \qquad f_5 = +1 \qquad f_7 = +1 \qquad f_9 = +1 \qquad f_{12} = +1$$

alle anderen f sind gleich Null.

$$\left[\frac{af}{p}\right] = -14\ ,\quad \left[\frac{bf}{p}\right] = -26\ ,\quad \left[\frac{cf}{p}\right] = -27\ ,\quad \left[\frac{df}{p}\right] = -26\ ,\quad \left[\frac{ff}{p}\right] = +93.$$

$$\begin{array}{rrrrl}
\underline{+43{,}0\,r_1} & -\ 9{,}0\,r_2 & \ldots & \ldots & -14{,}0 = 0 \\
 & \underline{+79{,}0\,r_2} & -12{,}0\,r_3 & \ldots & -26{,}0 = 0 \\
 & & \underline{+56{,}0\,r_3} & -17{,}0\,r_4 & -27{,}0 = 0 \\
 & & & \underline{+89{,}0\,r_4} & -26{,}0 = 0 \\
 & & & & \underline{+93{,}0}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrl}
\underline{77{,}1\,r_2} & -12{,}0\,r_3 & \ldots & -28{,}9 = 0 \\
 & \underline{+56{,}0\,r_3} & -17{,}0\,r_4 & -27{,}0 = 0 \\
 & & \underline{+89{,}0\,r_4} & -26{,}0 = 0 \\
 & & & \underline{+88{,}4}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrl}
\underline{+54{,}1\,r_3} & -17{,}0\,r_4 & -31{,}5 = 0 \\
 & \underline{+89{,}0\,r_3} & -26{,}0 = 0 \\
 & & \underline{+77{,}6}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\underline{83{,}7\,r_4} & -35{,}9 = 0 \\
 & \underline{+59{,}3}
\end{array}$$

$$+43{,}9 = \frac{1}{P} \tag{22}$$

Der zweite Weg giebt, indem wir hier nur noch die Endgleichungen schreiben, folgendes:

$$
\begin{aligned}
43{,}0\, r_1 - \ 9{,}0\, r_2 \quad .. \quad .. \quad + 20{,}0 &= 0 \\
77{,}1\, r_2 - 12{,}0\, r_3 \quad .. \quad + 36{,}2 &= 0 \\
+ 54{,}1\, r_3 - 17{,}0\, r_4 + \ 5{,}6 &= 0 \\
83{,}7\, r_4 + 47{,}7 &= 0 \\
\underline{+ 44{,}2} &= \frac{1}{P}
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Die zwei Resultate 43,9 nach (22) und 44,2 nach (23) stimmen für diesen Zweck genügend überein, wir rechnen im Mittel:

$$\frac{1}{P} = 44{,}0$$

und, mit Zuziehung des mittleren Gewichts-Einheitsfehlers $m = \pm 3{,}3^{mm}$ nach (21), haben wir:

$$M = \pm 3{,}3 \sqrt{44{,}0} = \pm 21{,}9^{mm} \tag{24}$$

Dieses ist der mittlere Fehler des *ausgeglichenen* (d. h. nicht mehr auf einen bestimmten Nivellierungsweg bezogenen) Höhen-Unterschiedes *Mannheim—Pforzheim.*

§ 114. Netz-Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen.

In dem Nivellierungs-Netz Fig. 1. sind 6 Höhen-Unterschiede h mit ihren Entfernungen s bestimmt: *)

Höhen-Unterschiede	*Entfernungen*	*Gewichte* $p = \frac{1000}{s}$	
$h_1 = AB = + 10{,}8838^m$	$s_1 = 11{,}67^{km}$	$p_1 = 85$	
$h_2 = AC = + \ 4{,}6783$	$s_2 = \ 9{,}24$	$p_2 = 108$	
$h_3 = AD = + 18{,}5595$	$s_3 = 20{,}42$	$p_3 = 49$	(1)
$h_4 = CB = + \ 6{,}1963$	$s_4 = \ 6{,}05$	$p_4 = 165$	
$h_5 = CD = + 13{,}8677$	$s_5 = 12{,}86$	$p_5 = 78$	
$h_6 = BD = + \ 7{,}6657$	$s_6 = 16{,}58$	$p_6 = 60$	

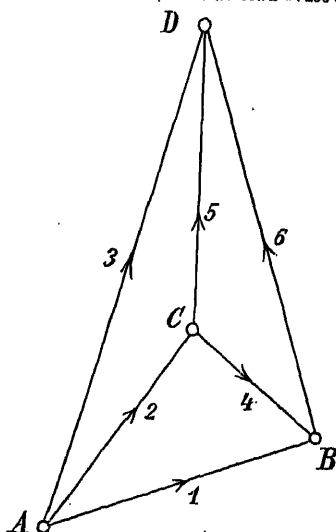
Die Richtung des Steigens ist in Fig. 1. durch Pfeile angegeben.

Die Gewichte p sind den Entfernungen umgekehrt proportional genommen, und zwar, um möglichst gleiche Coëfficienten der Normal-Gleichungen zu erhalten, haben wir gesetzt:

$$p = \frac{1000}{s} \tag{2}$$

wobei s in Kilometern genommen ist. Das Gewicht $p = 1$ kommt also einer Nivellierung der Strecke 1000^{km} zu.

Wir betrachten A als Ausgangspunkt, dann sind die drei anderen Punkte B, C und D vollkommen bestimmt durch die drei Höhen-Unterschiede AB, AC, AD, welche wir deshalb als unabhängige Unbekannte einführen.

Fig. 1.
Nivellierungs-Netz (Massstab etwa 1 : 250 000).

*) Die hier benützten Messungen sind einer Abhandlung von General *v. Morozowicz* in der „Zeitschr. f. Verm. 1876", S 328—333 entnommen (Vergl. „Zeitschr. f. Verm. 1876", S. 390—394).

Dass die Punkte B , C und D unmittelbar mit A verbunden sind, ist hiebei unwesentlich.

Nun bezeichnen wir die wahrscheinlichsten Verbesserungen der 6 absoluten Höhen-Unterschiede mit $v_1\ v_2\ v_3\ v_4\ v_5\ v_6$. Als Näherungswerte der 3 unabhängigen Unbekannten, d. h. der Höhen von B , C und D über A werden die 3 Beobachtungen selbst genommen, und die zugehörigen wahrscheinlichsten Verbesserungen seien $x_1\ x_2\ x_3$.

Man hat 6 Fehler-Gleichungen, entsprechend den 6 beobachteten Grössen; die 3 ersten Fehlergleichungen werden sehr einfach, nämlich:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & v_1 = x_1 \\ 2) & v_2 = x_2 \\ 3) & v_3 = x_3 \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Zur Aufstellung der vierten Fehlergleichung betrachten wir das Dreieck BCA, dasselbe giebt:

$$10{,}8838 + x_1 = 4{,}6783 + x_2 + 6{,}1963 + v_4$$

hieraus folgt:

$$4) \qquad v_4 = x_1 - x_2 + 0{,}0092^m \qquad (4)$$

In ähnlicher Weise findet man auch die beiden letzten Fehlergleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll} 5) & v_5 = - x_2 + x_3 + 0{,}0135^m \\ 6) & v_6 = - x_1 + x_3 + 0{,}0100^m \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Die 6 Gleichungen (3) , (4) und (5) haben die allgemeine Form:

$$v = a x_1 + b x_2 + c x_3 + l$$

und die geordnete Zusammenstellung der Coëfficienten giebt mit Annahme des Centimeters als Einheit folgendes:

Num.	p	a	b	c	l
1.	85	+1	0	0	0
2.	108	0	+1	0	0
3.	49	0	0	+1	0
4.	165	+1	−1	0	$+0{,}92^{cm}$
5.	78	0	−1	+1	$+1{,}35^{cm}$
6.	60	−1	0	+1	$+1{,}00^{cm}$

Die Coëfficienten der Normalgleichung werden:

$$\begin{array}{llll} [paa] = +310{,}0 & [pab] = -165{,}0 & [pac] = -\ \ 60{,}0 & [pal] = +\ \ 91{,}8 \\ & [pbb] = +351{,}0 & [pbc] = -\ \ 78{,}0 & [pbl] = -257{,}1 \\ & & [pcc] = +187{,}0 & [pcl] = +165{,}3 \\ & & & [pll] = +341{,}9 \end{array}$$

Man löst die hiezu gehörigen Gleichungen in üblicher Weise auf, und findet dabei auch die Gewichte P der 3 Unbekannten, und ausserdem die Summe $[pvv] = [pll.3]$. Die Resultate sind:

$$\left.\begin{array}{lll} x_1 = -0{,}18^{cm} & x_2 = +0{,}48^{cm} & x_3 = -0{,}74^{cm} \\ P_1 = \ \ 177 & P_2 = \ \ 194 & P_3 = \ \ 130 \\ & [pll.3] = 79 \text{ (Centimeter).} & \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Die sämtlichen Verbesserungen v erhält man nach Angabe der Fehlergleichungen (3), (4) und (5):

$$v_1 = -0{,}18^{cm} \qquad v_4 = +0{,}26^{cm}$$
$$v_2 = +0{,}48 \qquad v_5 = +0{,}13$$
$$v_3 = -0{,}74 \qquad v_6 = +0{,}44$$

und hiermit berechnet man die ausgeglichenen Höhen-Unterschiede:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Höhen-Unterschied } AB = 10{,}8838^m - 0{,}0018^m = 10{,}8820^m \\ \quad " \quad AC = 4{,}6783 + 0{,}0048 = 4{,}6831 \\ \quad " \quad AD = 18{,}5595 - 0{,}0074 = 18{,}5521 \\ \quad " \quad CB = 6{,}1963 + 0{,}0026 = 6{,}1989 \\ \quad " \quad CD = 13{,}8677 + 0{,}0013 = 13{,}8690 \\ \quad " \quad BD = 7{,}6657 + 0{,}0044 = 7{,}6701 \end{array}\right\} \quad (7)$$

Zur Probe macht man die Berechnung der Summe $[p\,v\,v]$ aus den einzelnen v:

Num.	v	v^2	p	$p\,v^2$
1	$-0{,}18^{cm}$	0,0324	85	2,75
2	$+0{,}48$	0,2304	108	24,88
3	$-0{,}74$	0,5476	49	26,83
4	$+0{,}26$	0,0676	165	11,15
5	$+0{,}13$	0,0169	78	1,32
6	$+0{,}44$	0,1936	60	11,62
				78,55

Die Summe $[p\,v\,v] = 78{,}55$ stimmt genügend mit der aus der Elimination erhaltenen Summe $[p\,l\,l.3] = 79$, und damit ist die ganze Ausgleichung versichert.

Der mittlere Fehler einer Nivellierung vom Gewichte $= 1$ wird:

$$m = \pm \sqrt{\frac{79}{6-3}} = \pm 5{,}1^{cm} \qquad (8)$$

Das Gewicht $p = 1$ kommt nach (3) einer Nivellierung von 1000^{km} Länge zu, wir erhalten daher (ohne in Bezug auf m deswegen eine neue Bezeichnung einzuführen) den mittleren Fehler für 1^{km}:

$$m = \frac{5{,}1}{\sqrt{1000}} = \pm 0{,}16^{cm} = \pm 1{,}6^{mm} \qquad (9)$$

Die Gewichte der aus den Normalgleichungen bestimmten Unbekannten sind bei (6) schon gelegentlich der Elimination bestimmt worden, und man berechnet daraus die entsprechenden mittleren Fehler:

$$M_{AB} = \frac{5{,}1}{\sqrt{177}} = \pm 0{,}39^{cm} \qquad M_{AC} = \frac{5{,}1}{\sqrt{194}} = \pm 0{,}37^{cm}$$

$$M_{AD} = \frac{5{,}1}{\sqrt{130}} = \pm 0{,}45^{cm}$$

Damit hat man die absoluten Höhen mit ihren mittleren Fehlern:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Absolute Höhe von } A = 0{,}0000 \text{ (Ausgangspunkt)} \\ \quad " \quad " \quad " \quad B = 10{,}8820 \pm 0{,}0039^m \\ \quad " \quad " \quad " \quad C = 4{,}6831 \pm 0{,}0037^m \\ \quad " \quad " \quad " \quad D = 18{,}5521 \pm 0{,}0045^m \end{array}\right\} \quad (13)$$

Die beigeschriebenen mittleren Fehler beziehen sich auf den Ausgangspunkt A, und das gilt auch, wenn nun für A etwa eine Höhe über N. N. eingeführt wird, z. B.:

Punkt A ,	Höhe $= 50{,}0000^m \pm m_a$		über N. N.
„ B ,	„ $= 60{,}8820$	$\pm (m_a \pm 3{,}9^{mm})$	„ „ „
„ C ,	„ $= 54{,}6831$	$\pm (m_a \pm 3{,}7^{mm})$	„ „ „
„ D ,	„ $= 68{,}5521$	$\pm (m_a \pm 4{,}5^{mm})$	„ „ „

Anmerkung.

Zur Vergleichung wollen wir das im vorstehenden nach vermittelnden Beobachtungen behandelte Beispiel auch mit *Korrelaten* behandeln, und ausserdem dabei, um den Wert der Ziffern besser zu beurteilen, die Höhen auf 1^{mm} und die Entfernungen auf 1^{km} *abrunden*. Man hat dann:

$$\begin{array}{ll} h_1 = 10{,}884^m & s_1 = 12^{km} \\ h_2 = 4{,}678 & s_2 = 9 \\ h_3 = 18{,}560 & s_3 = 20 \\ h_4 = 6{,}196 & s_4 = 6 \\ h_5 = 13{,}868 & s_5 = 13 \\ h_6 = 7{,}666 & s_6 = 17 \end{array}$$

Bedingungsgleichungen:

$$\begin{array}{l} -v_1 + v_2 + v_4 - 10^{mm} = 0 \\ -v_2 + v_3 - v_5 + 14 = 0 \\ -v_4 + v_5 - v_6 + 6 = 0 \end{array}$$

Normalgleichungen:

$$\begin{array}{l} \underline{+27\,k_1} - 9\,k_2 - 6\,k_3 - 10^{mm} = 0 \\ \underline{+42\,k_2} - 13\,k_3 + 14 = 0 \\ \underline{+36\,k_3} + 6 = 0 \end{array}$$

Korrelaten: $k_1 = +0{,}18^{mm}$ $k_2 = -0{,}38^{mm}$ $k_3 = -0{,}27^{mm}$

Verbesserungen:

$$v_1 = -2^{mm}\,,\; v_2 = +5^{mm}\,,\; v_3 = -8^{mm}\,,\; v_4 = +3^{mm}\,,\; v_5 = +1^{mm}\,,\; v_6 = +4^{mm}$$

$$-[w\,k] = 8{,}74 \qquad \left[\frac{v\,v}{s}\right] = 8{,}83$$

Also mit genügender Übereinstimmung: $\left[\frac{v\,v}{s}\right] = 8{,}8$

$$m = \sqrt{\frac{8{,}8}{3}} = \pm 1{,}7^{mm} \text{ für } 1^{km}.$$

Die ausgeglichenen Höhen stimmen innerhalb 1^{mm} mit den früheren, schärfer berechneten überein.

§ 115. Bildung der Normalgleichungen u. s. w. nach der Figur.

Wenn man die langen Tabellen einer ausgedehnten Nivellierungs-Netzausgleichung betrachtet, worin meist eine ganze Menge Glieder fehlen (d. h. gleich Null sind), so kommt man zu dem Gedanken, dass man diese langen und breiten Tabellen zum

grossen Teil ersparen, und die Resultate *nach dem Anblick einer Figur* bilden kann, welche man ohnehin braucht.

Wir wollen dieses an dem Beispiel unserer Hannoverschen Stadt-Nivellierungs-Ausgleichung zeigen (welche ausführlicher in der „Zeitschrift der Hannoverschen Ingenieur- und Architekten-Vereins, 1887", S. 682—699 mit Karte, Blatt 38, veröffentlicht ist.

Die nachfolgenden Fig. 1. S. 405 und Fig. 2. S. 406 sind von dort entnommen, und diese beiden Figuren in Verbindung mit untenstehendem Abriss werden genügen, um jenes ziemlich umfassende Nivellierungs-Material in gedrängtester und zugleich übersichtlichster Form zur Anschauung zu bringen.

Abriss der Nivellierungs-Ausgleichung der Stadt Hannover.

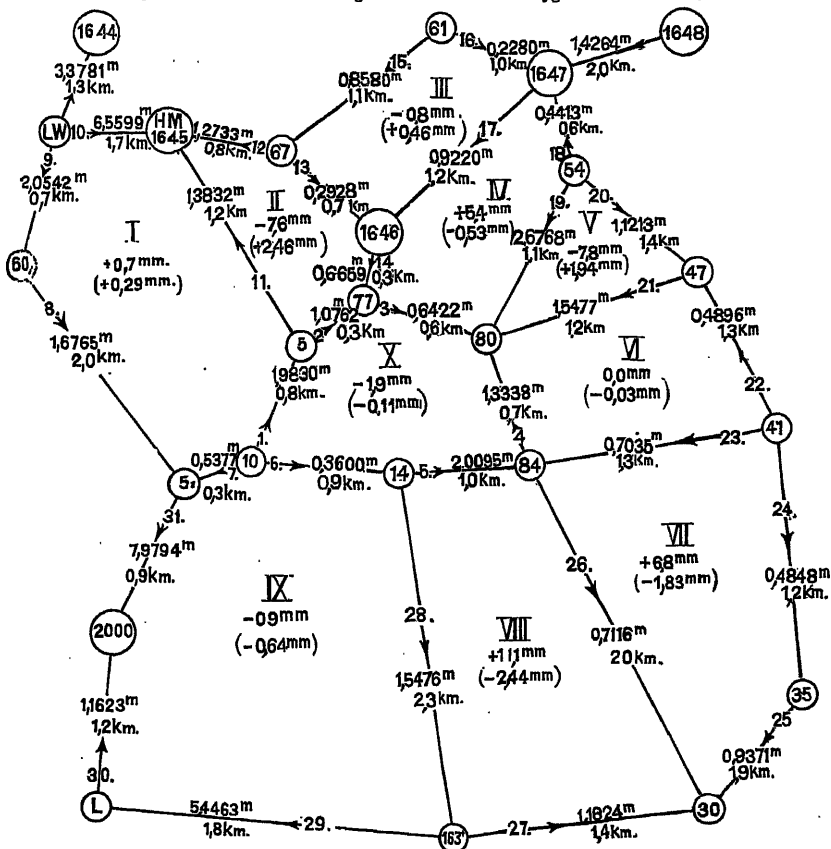
Nummer	Entfernung s	Nivellierter Höhen-Unterschied h	Verbesserung v	Verbesserter Höhen-Unterschied $h+v$	$\sqrt{s}$	$\frac{v}{\sqrt{s}}$	$\frac{v^2}{s}$	Polygon
1	0,8^{km}	1,9830^{m}	−0,3^{mm}	1,9827^{m}	0,89	0,34	0,12	
2	0,3	1,0762	−0,8	1,0754	0,55	1,35	1,82	
3	0,6	0,6422	+0,2	0,6424	0,77	0,26	0,07	X.
4	0,7	1,3338	+0,1	1,3339	0,84	0,12	0,01	
5	1,0	2,0095	−2,3	2,0072	1,00	2,30	5,29	
6	0,9	0,3600	−0,5	0,3595	0,95	0,53	0,28	
7	0,3	0,5377	+0,3	0,5380	0,55	0,54	0,29	
8	2,0	1,6765	−0,6	1,6759	1,41	0,43	0,18	I.
9	0,7	2,0542	−0,2	2,0540	0,84	0,24	0,06	
10	1,7	6,5599	+0,5	6,5604	1,30	0,38	0,14	
11	1,2	1,3832	+2,6	1,3858	1,10	2,37	5,62	
12	0,8	1,2733	−2,0	1,2713	0,89	2,24	5,02	II.
13	0,7	0,2928	+1,4	0,2942	0,84	1,66	2,76	
14	0,3	0,6659	+0,9	0,6668	0,55	1,63	2,66	
15	1,1	0,8580	−0,5	0,8575	1,05	0,47	0,22	
16	1,0	0,2280	+0,5	0,2285	1,00	0,50	0,25	III.
17	1,2	0,9220	+1,2	0,9232	1,10	1,09	1,19	
18	0,6	0,4413	+0,3	0,4416	0,77	0,39	0,15	IV.
19	1,1	2,6768	−2,7	2,6741	1,05	2,57	6,60	
20	1,4	1,1213	+2,7	1,1240	1,18	2,28	5,20	V.
21	1,2	1,5477	+2,4	1,5501	1,10	2,17	4,71	
22	1,3	0,4896	+0,0	0,4896	1,14	0,00	0,00	VI.
23	1,3	0,7035	+2,3	0,7058	1,14	2,02	4,08	
24	1,2	0,4848	−2,2	0,4826	1,10	2,00	4,00	
25	1,9	0,9371	−3,5	0,9336	1,38	2,52	6,35	VII.
26	2,0	0,7116	−1,2	0,7104	1,41	0,85	0,72	
27	1,4	1,1624	+3,4	1,1658	1,18	2,80	7,84	VIII.
28	2,3	1,5476	+4,1	1,5517	1,52	2,70	7,29	
29	1,8	5,4463	−1,2	5,4451	1,34	0,89	0,79	
30	1,2	1,1623	−0,8	1,1615	1,10	0,72	0,52	IX.
31	0,9	7,9794	+0,6	7,9800	0,95	0,63	0,40	
	34,9						74,63	

Der Gang der Ausgleichung ist dieser:

Aus den Feldschreibbüchern oder aus vorläufigen Zusammenstellungen von der Form § 112. S. 392 erhält man die nivellierten Höhen-Unterschiede h und die Entfernungen s des Abrisses von S. 404 (das übrige wird erst später erhalten).

Nun macht man das Übersichts-Netz Fig. 1., deutet durch einen Pfeil an jeder Linie die Richtung des Steigens an, und schreibt alle nivellierten Höhen und Entfernungen dazu.

Bei dieser Gelegenheit macht man sich auch über die Nummerierung schlüssig.

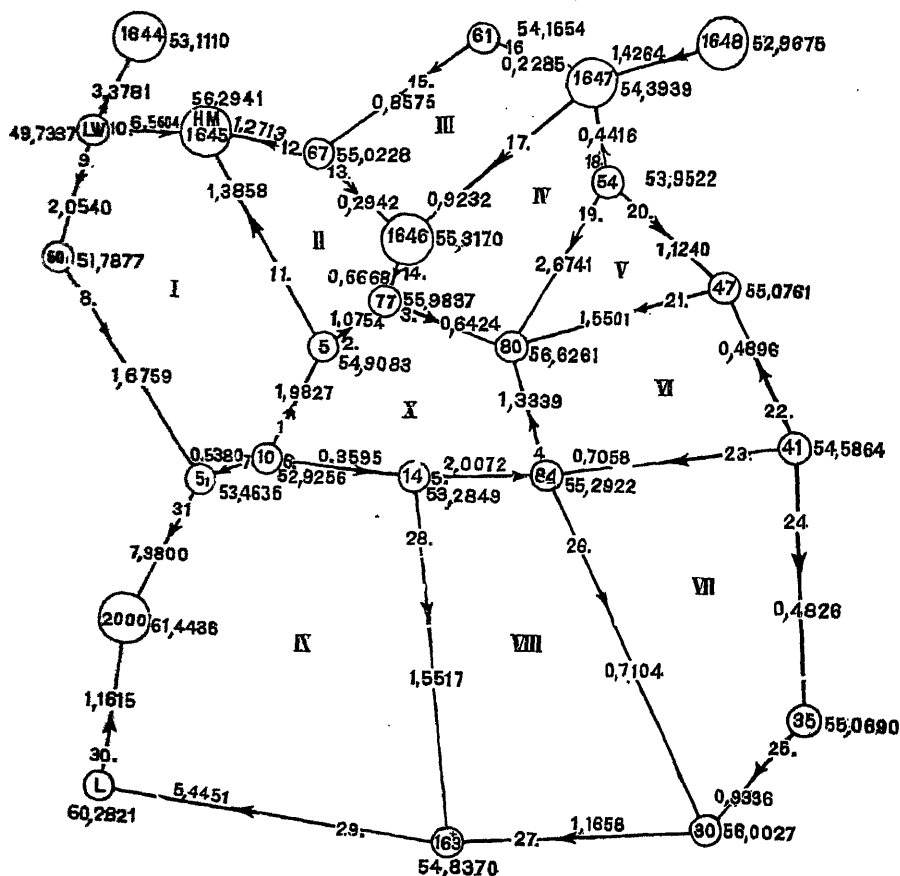
Fig. 1. *)
Nivellierungs-Netz der Stadt Hannover.
Übersicht der Nivellierungs-Linien und der Polygon-Schlussfehler.

Die Pfeile bedeuten die Richtung des Steigens und des positiven Vorzeichens. An der Hinterseite des Pfeiles steht die Nummer der Linie. An der Vorderseite (Spitze) des Pfeiles steht der nivellierte Höhen-Unterschied in Metern und die Länge in Kilometern. Im Innern jedes Polygons steht zunächst der Schlussfehler in Millimetern und darunter, in Klammer, die Korrelate der Ausgleichung, ebenfalls in Millimetern.

*) Die zwei nördlich angefügten Punkte (1644) und (1648) sind Bolzen der Landes-Aufnahme, welche zu unserer hier besprochenen Ausgleichung in keiner Beziehung stehen.

Die so erhaltene Fig. 1. S. 405 enthält ausser den Entfernungen und den nivellierten Höhen-Differenzen auch die Widersprüche in den einzelnen Polygonen. Wir rechnen beispielshalber den Fall I. hier ausführlich vor, indem das Polygon von der nordwestlichen Ecke im positiven Sinne durchlaufen gedacht wird:

10.	$+ 6{,}5599^m$	
11.		$- 1{,}3832^m$
1.		$- 1{,}9830$
7.	$+ 0{,}5377$	
8.		$- 1{,}6765$
9.		$- 2{,}0542$
	$+ 7{,}0976^m$	$- 7{,}0969^m$, $w_1 = + 0{,}7^{mm}$.

(Fortsetzung S. 407.)

Fig. 2.
Nivellierungs-Netz der Stadt Hannover.
Übersicht der ausgeglichenen Höhen-Unterschiede und der Höhen über Normal-Null.

Die sämtlichen 10 Widersprüche w sind die folgenden:

I.	$+0,7^{mm}$	II.	$-7,6^{mm}$	III.	$-0,8^{mm}$	IV.	$+5,4^{mm}$
V.	$-7,8$	VI.	$0,0$	VII.	$+6,8$	VIII.	$+11,1$
		IX.	$-0,9$	X.	$-1,9$		

Diese Widersprüche w schreibt man ebenfalls in Fig. 1. S. 405 ein.

Nun wird die Annahme gemacht, dass die Gewichts-Reciproken der einzelnen Linien den Längen proportional sind; und damit können wir, ohne erst eine Tabelle der Bedingungsgleichungen zu bilden, sofort die *Normalgleichungen* nach dem Anblick von Fig. 1. S. 405 anschreiben. Die erste Normalgleichung wird:

$$+6,70\,k_1 - 1,20\,k_2 - 0,30\,k_9 - 0,80\,k_{10} + 0,70 = 0$$

und zwar ist der erste Coëfficient nach dem Anblicke von Fig. 1. S. 405 so entstanden:

$$1,7 + 1,2 + 0,8 + 0,3 + 2,0 + 0,7 = +6,7.$$

Der zweite Coëfficient entspricht der Grenzlinie zwischen I. und II. u. s. w.

Alle 10 Normalgleichungen zusammen sind, abgekürzt geschrieben, folgende

Normalgleichungen:

										mm
$6,7k_1$	$-1,2k_2$	..	..	..	..	..	..	$-0,3k_9$	$-0,8k_{10}$	$+0,7=0$
	$3,3k_2$	$-0,7k_3$	$-0,3k_4$	..	..	..	..	..	$-0,3k_{10}$	$-7,6=0$
		$4,0k_3$	$-1,2k_4$	..	..	..	..	..	..	$-0,8=0$
			$3,8k_4$	$-1,1k_5$	..	..	..	..	$-0,6k_{10}$	$+5,4=0$
				$3,7k_5$	$-1,2k_6$	..	..	..	..	$-7,8=0$
					$4,5k_6$	$-1,3k_7$	..	..	$-0,7k_{10}$	$+0,0=0$
						$6,4k_7$	$-2,0k_8$	..	..	$+6,8=0$
							$6,7k_8$	$-2,3k_9$	$-1,0k_{10}$	$+11,1=0$
								$7,4k_9$	$-0,9k_{10}$	$-0,9=0$
									$4,3k_{10}$	$-1,9=0.$

Die Auflösung dieser 10 Gleichungen giebt:

$k_1 = +0,29^{mm}$	$k_4 = -0,53^{mm}$	$k_7 = -1,83^{mm}$
$k_2 = +2,46$	$k_5 = +1,94$	$k_8 = -2,44$
$k_3 = +0,46$	$k_6 = -0,03$	$k_9 = -0,64$
		$k_{10} = -0,11$

Diese Korrelaten werden nun auch in Fig. 1. S. 405 eingeschrieben. Die Korrelate bedeutet für ein Polygon den Korrektionswert für 1^{km}, welcher auf dieses Polygon entfällt. Damit kann man alle Linien-Korrektionen nach Fig. 1. S. 405 leicht finden; z. B.:

$$v_1 = -0,8\,(+0,29^{mm}) + 0,8\,(-0,11^{mm}) = -0,23^{mm} - 0,09^{mm} = -0,32^{mm}.$$

Die sämtlichen so berechneten Linien-Verbesserungen v und ihre Zufügung zu den nivellierten Höhen-Unterschieden h kann man auch in Fig. 1. S. 405 einfügen (handschriftlich etwa rot); da aber unser Holzschnitt Fig. 1. doch hiezu nicht ausreicht, haben wir die v und die $h+v$ in den Abriss S. 404 eingeschrieben, von wo aus jedoch jedenfalls die $h+v$ wieder in ein Netz Fig. 2. S. 406 übergetragen werden.

Nachdem also die verbesserten Höhen-Unterschiede $h+v$ in Fig. 2. S. 406 eingetragen sind, kann man die Höhen aller Knotenpunkte widerspruchsfrei zusammensetzen, und zwar nehmen wir als Ausgangshöhe über N. N. die Höhe des Bolzens (1646) $= 55,317^{m}$. Wir erhalten damit die Höhenwerte, welche nicht nur in Fig. 2. S. 406

sich finden, sondern auch nochmals in folgender Tabelle vereinigt sind. (Zugleich wurden auch die in der Anmerkung S. 405 erwähnten zwei fremden Punkte (1644) und (1648) mit ausgerechnet.)

Punkt	Höhe über N. N.	Punkt	Höhe über N. N.	Punkt	Höhe über N. N.
(1644)	53,1110	(54)	53,9522	(2000)	61,4436
(L W)	49,7337	(47)	55,0761	(L)	60,2821
(H M)	56,2941	(80)	56,6261	(163*)	54,8370
(67)	55,0228	(77)	55,9837	(30)	56,0027
(1646)	55,3170	(5)	54,9083	(35)	55,0690
(1647)	54.3939	(10)	52,9256	(41)	54,5864
(1648)	52,9675	(5_1)	53,4636	(84)	55,2922
(61)	54,1654	(60_1)	51,7877	(14)	53,2849

Damit ist die Ausgleichung fertig.

(Was weiter über die Anschlüsse an die Landes-Aufnahme von Interesse ist, findet man in der „Zeitschr. der Hannov. Arch.- u. Ing.-Vereins 1887", S. 694.)

Übergehend zur *Genauigkeits-Berechnung* haben wir zuerst in dem Abriss S. 404 alle einzelnen $\frac{v^2}{s}$ ausgerechnet mit der Summe $\left[\frac{v\,v}{s}\right] = 74{,}63$.

Dazu machen wir folgende

Probe-Rechnung:

Nummer	w	k	$-wk$
I.	$+\ 0{,}7^{mm}$	$+0{,}29^{mm}$	$-\ 0{,}2$
II.	$-\ 7{,}6$	$+2{,}46$	$+19{,}6$
III.	$-\ 0{,}8$	$+0{,}46$	$-\ 0{,}4$
IV.	$+\ 5{,}4$	$-0{,}53$	$+\ 2{,}8$
V.	$-\ 7{,}8$	$+1{,}94$	$+15{,}2$
VI.	$0{,}0$	$-0{,}03$	$0{,}0$
VII.	$+\ 6{,}8$	$-1{,}83$	$+12{,}4$
VIII.	$+11{,}1$	$-2{,}44$	$+27{,}0$
IX.	$-\ 0{,}9$	$-0{,}64$	$-\ 0{,}6$
X.	$-\ 1{,}9$	$-0{,}11$	$+\ 0{,}2$
			76,0

Die Übereinstimmung $\left[\frac{v\,v}{s}\right] = 74{,}63$ und $= 76{,}0$ ist genügend, wir nehmen einfach das Mittel 75,3 und haben daraus, mit Rücksicht auf die 10 Bedingungsgleichungen:

$$\text{Mittlerer Fehler} = \sqrt{\frac{75{,}3}{10}} = \pm\, 2{,}7^{mm} \text{ für } 1^{km}.$$

§ 116. Allgemeines über Nivellierungs-Ausgleichung.

Nachdem in § 113—§ 115. bereits Beispiele von Nivellierungsnetz-Ausgleichungen durchgerechnet worden sind, wobei der Ansatz der Bedingungsgleichungen oder der Fehlergleichungen keine Schwierigkeit machte, ist es nun doch auch nützlich, über diese Gleichungen eine allgemeinere Betrachtung anzustellen.

Wir betrachten ein Netz von p Punkten, zwischen welchen h Verbindungshöhen gemessen sind.

Um p Punkte der Höhe nach gegen einander festzulegen, braucht man $p-1$ unabhängige Messungen von Höhen-Differenzen, z. B. die Verbindungen von einem Punkt mit den $p-1$ übrigen, oder die $p-1$ Verbindungen, welche ein offener über alle p Punkte in beliebiger Aufeinanderfolge gelegter Zug enthält.

Wenn daher Ausgleichung möglich sein soll, so muss die Zahl h der wirklich vorhandenen Höhen-Verbindungen grösser als $p-1$ sein, d. h.:

$$h > p - 1 \tag{1}$$

Der Unterschied zwischen h und $p-1$ zählt die überschüssigen Messungen, und ebensogross ist auch die Zahl der unabhängigen Bedingungsgleichungen, welche wir mit r bezeichnen, also:

$$r = h - p + 1 \tag{2}$$

Z. B. in dem Hannoverschen Stadt-Netz Fig. 1. § 115. S. 405 haben wir mit Weglassung von (1644) und (1648), welche gar nicht zu dem Netze gehören, $p = 22$ Punkte, $h = 31$ Verbindungs-Höhen, also:

$$r = 31 - 22 + 1 = 10 \tag{3}$$

wie auch unmittelbar eingesehen wurde.

Wir gehen nun zu der Ausgleichung nach *vermittelnden Beobachtungen* über:

Betrachtet man hiebei einen Ausgangspunkt als fest gegeben, und die $p-1$ Höhen-Unterschiede der übrigen Punkte gegen den Ausgangspunkt als unabhängige Unbekannte, so kann man die sämtlichen gemessenen h Höhen in diesen $p-1$ Unbekannten ausdrücken, und hat daher h Fehlergleichungen zur Bestimmung von $p-1$ Unbekannten, welche nach der M. d. kl. Q. sowohl die Unbekannten selbst, als auch deren Gewichte liefern.

Die Anzahl der aufzulösenden Normalgleichungen ist hier gleich der Anzahl der unabhängigen Unbekannten, d. h. $= p-1$.

Man hat nun folgende Vergleichung der beiden Methoden:

	Bedingte Beobachtungen (Korrelaten)	*Vermittelnde Beobachtungen*	
Anzahl der Punkte	p	p	(4)
„ „ gemessenen Höhen-Unterschiede . .	h	h	
„ „ unabhängigen Höhen-Unterschiede .	$p-1$	$p-1$	
„ „ Bedingungsgleichungen	$h-p+1$	. .	
„ „ Fehlergleichungen	. .	h	
„ „ Normalgleichungen	$h-p+1$	$p-1$	

Da die Anzahl der aufzulösenden Normalgleichungen hauptsächlich bestimmend ist für die Grösse der Arbeit, so wird man nach der Methode der bedingten oder der vermittelnden Beobachtungen ausgleichen, je nachdem:

$$h - p + 1 < p - 1 \quad \text{oder} \quad h - p + 1 > p - 1$$

$$h < 2(p-1) \quad \text{oder} \quad h > 2(p-1) \tag{5}$$

Der zweite Fall tritt bei Nivellierungsnetzen meistens ein, es ist also in Hinsicht auf die Zahl der Endgleichungen meist besser, nach bedingten Beobachtungen (mit Korrelaten) auszugleichen.

Jedoch giebt es auch noch andere Rücksichten, nämlich in Bezug auf die Gewichts- und Fehlerberechnungen. Bei den vermittelnden Beobachtungen bekommt man die Gewichte der $p-1$ unabhängigen Unbekannten geradezu nebenbei, und mehr braucht man selten. Anders ist es bei bedingten Beobachtungen; hier muss man jedes einzelne Gewicht durch besondere Rechnung bestimmen, wie z. B. das Gewicht der Höhe zwischen Mannheim und Pforzheim in dem Beispiel § 113. S 399 besonders berechnet wurde.

Andererseits spricht wieder zu Gunsten der Korrelaten-Methode (bedingte Beobachtungen), dass man sofort nach der Ausgleichung die schöne durchschlagende Probe der widerspruchfreien Höhen-Berechnung hat, während bei den vermittelnden Beobachtungen die Proben entfernter liegen.

Fast alle grösseren Nivellierungs-Ausgleichungen, z. B. der preussischen Landes-Aufnahme, unseres badischen Netzes (Anm. S. 394), sind nach der Korrelaten-Methode ausgeglichen. Eine Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen mit Gewichts-Berechnung für *alle* Punkte enthält das Landes-Nivellement von Sachsen, bearbeitet von *Nagel*, Berlin 1886 („Zeitschr. f. Verm. 1886“, S. 540 und 570).

Binde-Punkte. Wenn ein Punkt eines Höhen-Netzes nur mit *zwei* anderen Punkten verbunden ist, so bildet seine Höhe keinen wesentlichen Bestandteil der Ausgleichung. Wir unterscheiden daher *Knoten*-Punkte, welche mindestens nach dreien anderen Netzpunkten Verbindung haben, und *Binde*-Punkte, welche nur mit *zwei* anderen Netzpunkten Anschluss haben.

Z. B. in dem Hannover'schen Stadt-Nivellierungsnetz Fig. 1. § 115. S. 405 haben wir ausser den Knotenpunkten ziemlich viele Bindepunkte: (60), (2000), (L), (35). (Die zwei nördlichen Punkte (1644) und (1648) gehören überhaupt nicht zu der Ausgleichung.)

Man kann solche Bindepunkte auch aus der Ausgleichung fortlassen, ohne das Ausgleichungs-Resultat zu ändern, denn es treten dann eben die *Summen* der Höhen und der Entfernungen ein, und nach der Ausgleichung hat man die Korrektion v einer zusammengezogenen Linie wieder auf die Teile nach dem Verhältnis der Entfernungen umzulegen. Die Höhe des Bindepunkts wird in beiden Fällen dieselbe, wie man durch nähere Betrachtung der Beiträge zeigen kann, welche in dem einen und in dem anderen Falle zu den Normalgleichungen u. s. w. geliefert werden.

Viele Bindepunkte wird man in eine Ausgleichung nicht aufnehmen, um die Übersichtlichkeit zu wahren, indessen wird die *Zahl* der Bedingungsgleichungen durch die Bindepunkte nicht beeinflusst, wie aus der Formel (2) hervorgeht, in welcher jeder etwa eingeschaltete oder ausgeschiedene Bindepunkt sowohl die Zahl h der Höhen als auch die Zahl p der Punkte *gleich* trifft, also die Zahl $r = h - p + 1$ ungeändert lässt.

Fig. 1.

Als *Beispiel* für die Anwendung der soeben gewonnenen Sätze über Bindepunkte u. s. w. wollen wir die Ausgleichung der nebenstehenden Fig. 1. nehmen. Nach der Korrelaten-Methode würde man drei Bedingungsgleichungen anschreiben:

$$\left.\begin{aligned} v_1 + v_2 - v_3 + w_1 &= 0 \\ v_3 + v_4 - v_6 - v_5 + w_2 &= 0 \\ v_6 + v_7 - v_8 + w_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

und im Übrigen wäre nach § 113. zu verfahren.

Da aber F und K nur *Binde*-Punkte und keine *Knoten*-Punkte sind, kann man sie auch ausscheiden, und dann reduziert sich die ganze Ausgleichung auf *ein* geschlossenes Viereck $SHBG$.

Um dieses zu erreichen, gleicht man zuerst das nördliche Dreieck SFH für sich aus, nach dem Verhältnis der Längen, welche s_1, s_2, s_3 seien, dann tritt *nach* dieser Dreiecks-Ausgleichung die Linie SH mit verstärktem Gewichte auf, oder mit einer reduzierten Länge, s_3' entsprechend der Gleichung:

$$\frac{1}{s_3'} = \frac{1}{s_3} + \frac{1}{s_1 + s_2} \qquad (7)$$

Ebenso verfährt man mit dem südlichen Dreieck GBK; nach der Ausgleichung bekommt GB eine reduzierte Entfernung s_6' entsprechend der Gleichung:

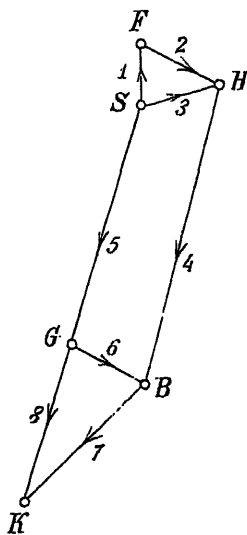
$$\frac{1}{s_6'} = \frac{1}{s_6} + \frac{1}{s_7 + s_8} \qquad (8)$$

Nun hat man das Viereck:

SH	mit der Entfernung s_3'	nach (7)
HB	„ „ „ s_4	
BG	„ „ „ s_6'	nach (8)
GS	„ „ „ s_5	

Gleicht man das Viereck, wobei die Höhen SH und BG die Ergebnisse der vorhergehenden Dreiecks-Ausgleichungen sind, nach dem Verhältnis der vier Entfernungen s_3', s_4, s_6', s_5 aus, und schaltet nachher wieder F und K als Bindepunkte ein, so hat man *dasselbe*, was die Korrelaten-Ausgleichung nach den drei Bedingungsgleichungen (6) giebt.

Ob man hier nach dem bei (7) und (8) u. s. w. beschriebenen Verfahren, oder geradezu nach Korrelaten ausgleichen will, ist Sache des Gutdünkens; sieht man näher zu, so wird man finden, dass man in beiden Fällen *dasselbe* zu rechnen hat. Die Korrelaten-Methode hat das in eine mechanische Regel gebracht, was man im anderen Falle durchdenken muss.

Der Grund, warum man einzelne Bindepunkte, wie z. B. (60), (2000), (L), (35) in Fig. 1. § 115. S. 405 mit in die Netzausgleichung aufnimmt, ist nur der, dass das wichtige Punkte sind, die man nachher doch scharf einschalten muss, was ebensoviel Mühe machen kann, als die Hineinziehung in die Netzausgleichung selbst. Immerhin wird die Berechnung des mittleren Fehlers in der Gesamtausgleichung auch etwas schärfer mit als ohne die Bindepunkte.

Ein einzelnes Polygon, welches in sich geschlossen ist, und sozusagen nur aus Bindepunkten besteht, wird, wenn man etwa die Korrelaten-Methode auf dasselbe anwenden wollte, dieselbe Ausgleichung erhalten, welche wir schon früher in § 112. S. 393 nach dem Grundsatz des arithmetischen Mittels fanden, nämlich Verteilung des Schlusswiderspruchs nach dem Verhältnis der Längen.

Verschiedene mittlere Fehler.

Wenn man in einem Nivellierungs-Netz jede Linie, in Strecken geteilt, in sich hin und her misst, und wenn man dann die Mittel der Hin- und Her-Messungen in eine Netz-Ausgleichung einführt, so bekommt man zwei Berechnungen des mittleren Fehlers:

1) aus den Strecken-Differenzen d in der Anzahl n:

$$m_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{n}\left[\frac{d\,d}{s}\right]}$$

2) aus den Verbesserungen v der Linien l in der Netz-Ausgleichung bei r Bedingungsgleichungen:

$$m_2 = \sqrt{\frac{1}{r}\left[\frac{v\,v}{l}\right]}$$

In den bis jetzt erschienenen Ausgleichungen der trigonometrischen Abteilung der Landes-Aufnahme haben wir folgende Werte m_1 und m_2:

Nachweisung *)	*Hin- und Her-Messungen* m_1	*Netz-Ausgleichung* m_2
Band II. (1873)*) S. 71 u. S. 149	$\pm 1{,}52^{mm}$	$\pm 1{,}79^{mm}$
Band III. (1875)*) S. 120 . . .	$\pm 1{,}51$	$\pm 1{,}76$
Band IV. (1880) S. 39 u. S. 44 .	$\pm 1{,}25$	$\pm 2{,}24$
Band V. (1883) S. 41 u. S. 43 .	$\pm 1{,}62$	$\pm 1{,}93$
Band VI. (1886) S. 30 u. S. 32 .	$\pm 1{,}28$	$\pm 2{,}18$
Einfacher Durchschnitt	$\pm 1{,}44^{mm}$	$\pm 1{,}98^{mm}$ (9)

für 1 Kilometer.

Gewöhnlich giebt die Netz-Ausgleichung einen etwas grösseren Wert als die Vergleichung der Hin- und Her-Nivellierungen, wobei es aber auch darauf ankommt, ob die Differenzen der Hin- und Her-Nivellierungen sich auf kurze Entfernungen, „Strecken" von 1—2^{km}, oder auf weite Entfernungen, „Linien" von 10—20^{km} u. s. w. beziehen.

Ferner ist es wichtig zu wissen, ob und wieviel Ausscheidungen, Verwerfungen und Nachmessungen vor dem Eingehen in die Netz-Ausgleichung vorgenommen wurden u. s. w. (Die Landes-Aufnahme hat weniger als 1% Verwerfungen.)

Es kommen hier auch die schon früher bei der Berechnung von $\left[\frac{d\,d}{s}\right]$ (§ 112. S. 392) erwähnten Fragen von Punkt-Verrückungen, Strahlenbrechungen u. s. w. in Betracht.

*) Vergl. hiezu „Zeitschr. f. Verm. 1877", S. 395; 1880, S. 370—373; 1883, S. 501—507; 1886, S. 358—360.

Ausgleichung von Gebirgs-Nivellierungen.

Während in der Ebene die Annahme der Gewichte p umgekehrt proportional den Entfernungen ganz am Platze ist, kann bei stärkeren Steigungen diese Annahme ungenügend werden, namentlich dann, wenn stark steigende Linien mit ebenen Linien in einer Ausgleichung zusammen kommen, und wenn keine genügenden Latten-Vergleichungen gemacht wurden.

Wenn wir setzen:

$$m = \mu \sqrt{s} \quad \text{und} \quad \frac{1}{p} = s \quad \text{oder} \quad = \mu^2 s \tag{10}$$

wo μ der mittlere Nivellierungsfehler für die Länge $s = 1$, m der mittlere Fehler für die Länge s, und p das Gewicht ist, so haben wir nur die eigentlichen Nivellierungsfehler berücksichtigt, bei starken Steigungen kommen aber auch die Unsicherheiten in den Maassen der benützten *Latten* und vielleicht noch andere mit der Höhe wachsende kleine Fehler in Betracht, und deswegen ist es besser, hier für eine Länge s und eine Höhe h zu setzen:

$$m = \sqrt{(\mu \sqrt{s})^2 + (\lambda h)^2} \quad , \quad \frac{1}{p} = \mu^2 s + \lambda^2 h^2 \tag{11}$$

Nun entsteht die Frage, wie man die Konstanten μ und λ dieser Formel bestimmen soll?

Wenn verschiedene Polygone mit ihren Schlussfehlern vorliegen, so wird man, wenn das vorstehende richtig ist, verschiedene Schlussfehler erhalten, je nachdem ein Polygon mehr oder weniger ausgedehnt in der Lage *oder* in der Höhe ist. *Vogler* hat zuerst den Gedanken verfolgt, nach solchen Rücksichten die Schlussfehler zu trennen, d. h. die Schlussfehler als Funktion der Längen s und der Höhen h der Polygone in empirischer Ausgleichung darzustellen („Zeitschr. f. Verm. 1877", S. 95—97 und 1877, S. 396—403). *Helmert* hat hiezu eine schärfere Theorie in den „Astron. Nachrichten", 89. Band, Nr. 2127 und Nr. 2128 (Februar 1877) entwickelt.

(Eine kurze Zusammenfassung hievon, „Fehlertrennung in Nivellements-Polygonen", haben wir in der „Zeitschr. f. Verm. 1885", S. 44—47 gegeben.)

Bei unseren *badischen Nivellierungen*, welche in der Zeit von 1873—1882 nach sehr verschiedenen Methoden, und mit zum Teil ungenügenden Latten-Vergleichungen gemacht worden waren, konnte die einfache Gewichts-Annahme $\frac{1}{p} = s$ unmöglich beibehalten werden.

Wir nahmen daher Gewichte nach dem Gesetz der Gleichung (11), und bestimmten die Fehlerteile μ und λ von Fall zu Fall, auf verschiedene Weisen, d. h. es wurden die Fehlerteile *a priori* geschätzt.

Unsere so gewonnene Netz-Ausgleichung mit 22 Polygonen enthält die amtliche Veröffentlichung „Die Grossh. Badischen Hauptnivellements u. s. w., Karlsruhe 1885" (vergl. die Anmerkung unten auf S. 394).

Kapitel XI.

Trigonometrische Höhenmessung.

§ 117. Messung der Höhenwinkel.

Die Theodolite, welche wir früher in § 47. S. 141—143 beschrieben haben, dienen auch zum Messen von Höhenwinkeln. Da wir früher nur die Horizontalwinkel-Messung beschrieben haben, ist jetzt das nachzutragen, was die Höhenwinkelmessung besonders verlangt.

Zuerst betrachten wir die Anordnung der *Libellen.* Will man gute Höhenwinkel messen, so muss man unbedingt eine Libelle in der Richtung des Fernrohrs haben, also z. B. die Libelle L_2 in Fig. I. S. 141, oder die Libelle L_1 in Fig. II. S. 142, oder die Libelle L an dem nachher zu behandelnden Instrument Fig. 1. S. 415.

Hat man einen Höhenkreis ohne eine solche Längs-Libelle, z. B. an dem Münchener Theodolit Fig. III. S. 143, was allerdings manchmal angetroffen wird, so kann das nur den Sinn haben, dass das Instrument zunächst wesentlieh für Lagemessungen bestimmt war, und nur für *untergeordnete* Höhenmessungen noch ein Höhenkreischen beigegeben wurde. (Oder es ist auch manchmal anzunehmen, dass der Verfertiger nicht das richtige Verständnis für die Höhenwinkel-Messung hatte.)

Ein Höhenkreis-Instrument ohne Libelle in der Fernrohr-Richtung wäre eben so verfehlt, wie etwa ein Nivellier-Instrument ohne eine Libelle parallel dem Fernrohr, was noch niemand versucht hat.

Es ist hier auch die Libelle *auf dem Fernrohr selbst* zu erwähnen, wie z. B. auf dem kleinen theodolitartig gebauten Instrument Fig. 6. S. 351, das wir dort Nivellier-Theodolit genannt haben.

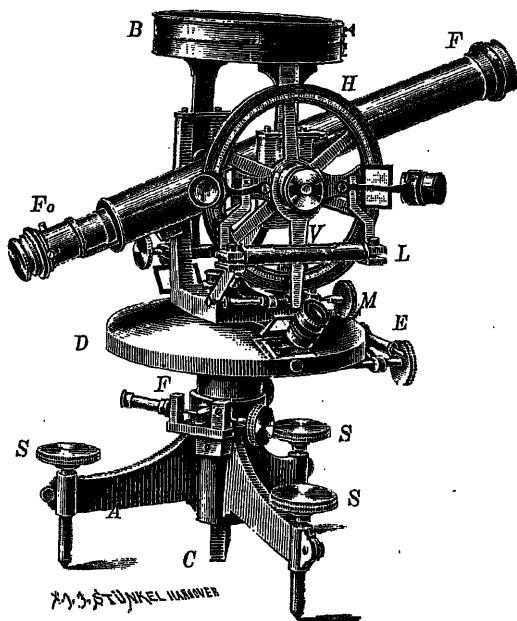
Eine solche Fernrohr-Libelle kann wohl auch zum Höhenwinkelmessen gebraucht werden, und zwar in der Weise, dass man für jeden Höhenwinkel *zweimal* abliest, einmal bei der Einstellung auf den Höhen-Zielpunkt, und einmal bei einspielender Libelle, indem vorausgesetzt wird, dass die Libellen-Axe und die Ziel-Axe parallel seien; indessen das ist nur ausnahmsweise für Höhenwinkel zu empfehlen; die eigentliche gute Anordnung besteht in einer Alhidaden-Libelle, im Sinne von II. S. 140, in der Fernrohr-Richtung, mit genügender Empfindlichkeit von etwa 10″ auf 1 Strich.

Diese Libelle muss bei jeder einzelnen Höhen-Zielung scharf einspielen, ebenso wie die Libelle eines Nivellier-Instrumentes; und da es schwierig ist, die Libelle so fein richtig, d. h. rechtwinklig zur Vertikal-Axe zu stellen, dass sie *allgemein* einspielt, so hilft man sich in gleich einfacher Weise, wie beim Nivellieren, dadurch, dass man bei jeder einzelnen Zielung mit einer passend gelegenen gewöhnlichen Fuss-Stellschraube soweit nachdreht, dass die Blase gut einspielt.

Ausserdem hat man aber auch (wie beim Nivellieren) das feinere Mittel einer besonderen Neigungsschraube zum Einstellen der in der Fernrohr-Richtung liegenden Libelle.

Dieses zeigt Fig. 1. S. 415 mit der Schraube M, welche auf die Libelle L wirkt, ganz unabhängig von den drei Fuss-Stellschrauben S.

Die Libelle L ist fest verbunden mit dem Nonienträger des Höhenkreises und mit dem senkrechten Hebelsarm V, gegen welchen die Schraube M wirkt. Hält man also mit der Schraube M die Libelle scharf im Einspielen, so behält der Hebel V und der Nonienträger *konstante Neigung.*

Fig. 1.
Höhenwinkel-Messung.

(Hannov. Sammlung; Mechaniker *Randhagen.*)

Ablesen der Libelle. Statt die Libelle mit der Schraube M wirklich zum Einspielen zu bringen, kann man auch die Blasen-Ausschläge ablesen und in Rechnung bringen, wie wir dieses beim feinen Nivellieren kennen gelernt haben. Indessen ist dieses Verfahren auch nur bei feinen Höhenwinkel-Messungen (etwa Refraktionsbestimmungen u. s. w.) am Platze, nicht aber bei den gewöhnlichen trigonometrischen Höhenmessungen, die wir hier im Sinne haben, wo Genauigkeit von 1—2″ überhaupt selten erreicht wird.

Höhenkreis mit einem Nonius.

Was wir früher schon über die Excentricität zwischen Limbus und Alhidade eines Teilkreises in § 54. bis § 56. gesagt haben, gilt natürlich auch für den Höhenkreis, und *zwei* einander gegenüberstehende Nonien bewirken hier ebenso die Eliminierung der Alhidaden-Excentricität wie am Horizontalkreis.

Man findet aber nicht selten kleine Höhenkreise mit nur *einem* Nonius, so z. B. bei dem Münchener Theodolit Fig. III. S. 143; und der Grund mag hier einfach darin liegen, dass *ein* Nonius sich gelegentlich am Ständer K anbringen liess, während für *zwei* Nonien ein besonderer Träger hätte angebracht werden müssen.

Indessen ist für die Höhenwinkel der Feld- und Landmessung die Anwendung *eines* Nonins (oder Mikroskops) deswegen besonders zu betrachten, weil diese Winkel die Eigentümlichkeit haben, fast immer *klein* zu sein, im freien Felde meist zwischen — 5° und + 5° schwankend, und auch im Mittelgebirge selten über 10°.

Bei *kleinen* Höhenwinkeln wirkt aber die Excentricität nahezu konstant (wenn die Ablesungen immer nahezu an denselben Stellen des Kreises erfolgen). Misst man also solche Höhenwinkel mit *einem* Nonius, aber mit Durchschlagen des Fernrohrs, so bekommt man trotz des Durchschlagens einen nahezu *konstanten* Fehler, der ähnlich wie ein konstanter Indexfehler wirkt und in Rechnung gebracht werden kann.

Hat man eine Libelle auf dem Fernrohr wie bei dem Nivellier-Theodolit Fig. 6. S. 351 und einen Höhenkreis mit *einem* Nonius, so empfiehlt es sich, die Libelle nach der Nivellierprobe Fig. 4. S. 349 richtig zu stellen, und jeden Höhenwinkel als Differenz zweier Einstellungen, einmal auf den Zielpunkt und einmal mit einspielender Libelle, zu bestimmen; dann ist man von dem konstanten Einfluss der Excentricität bei kleinen Höhenwinkeln unabhängig.

Die erwähnte Nivellierprobe ist auch dann anzuwenden, wenn man nicht einen Vollkreis, sondern nur einen Höhen-*Sektor*, mit *einem* Nonius hat, so dass der Indexfehler nicht durch Durchschlagen eliminiert oder bestimmt werden kann. Solche mangelhaftere Verhältnisse findet man etwa bei Tachymetern und Kippregeln, bei deren Beschreibung wir wieder hierauf zurückkommen werden.

Indem wir von diesen zuletzt erwähnten Besonderheiten absehen, haben wir für die gewöhnliche Höhenwinkel-Messung folgende Anweisung:

1) Man bringt den Zielpunkt in das Gesichtsfeld.

2) Man sieht zu, ob die Libelle gut einspielt und bringt sie erforderlichenfalls zum scharfen Einspielen mit einer geeignet liegenden Stellschraube oder, wenn die Libelle beweglich ist, mit der besonderen Einstell-Mikrometerschraube.

3) Man bringt den Fadenkreuzpunkt oder wenigstens den (richtig gestellten) Horizontalfaden auf den Zielpunkt.

4) Man liest an dem Kreise ab, den man zu diesem Zweck in beliebige bequeme und gut beleuchtete Lage bringen, also auch aus der Messungs-Ebene herausdrehen kann.

Das Ganze wird mit durchgeschlagenem Fernrohr wiederholt (vgl. hiezu § 118.) und aus den in beiden Lagen erhaltenen Ergebnissen das Mittel genommen.

§ 118. Berechnung der Höhenwinkel.

Hat man nach der soeben gegebenen Anweisung einen Höhenwinkel gemessen, so besteht die Berechnung im wesentlichen in einfacher Mittelbildung. Trotzdem ist hierüber noch Verschiedenes zu sagen:

Index-Fehler.

Wenn man bei einspielender Libelle eine Höhenzielung nimmt, so bekommt man einen Höhenwinkel dann unmittelbar richtig, wenn der horizontalen Zielung die Ablesung Null entspricht. Wenn dieses nicht der Fall ist, sondern bei horizontaler Zielung etwa die Ablesung $+ x$ gemacht wird, so wird statt eines richtigen Höhenwinkels α der falsche Wert $\alpha + x$ erhalten, und man sagt dann, der Höhenwinkel hat den Index-Fehler $+ x$, oder er verlangt eine Index-Verbesserung $- x$.

Das Wichtigste, was über den Index-Fehler zu sagen ist, ist der Satz, dass derselbe aufgehoben wird durch *Durchschlagen* des Fernrohrs und Messen in beiden Lagen.

Wenn man sich das Fernrohr samt dem Nonius zusammen als eine ideale Gerade vorstellt, welche sich an einem festen Höhenkreis auf- und ab-bewegt, so kann man sich die Eliminierung des Index-Fehlers nach Fig. 1. leicht klar machen: Es sei MM' der Durchmesser eines festen Höhenkreises, welcher die Null-Teilstriche (oder 0° und 180°) verbindet. F' sei die ideale Vereinigung der Fernrohr-Axe mit dem Ablese-Zeiger (Nonius-Nullstrich). Der Kreis-Durchmesser MM' mache mit der Horizontalen HH' den Winkel x (Index-Fehler) und der wirkliche zu messende Höhenwinkel sei $= \alpha$, dann ist es leicht, nach Fig. 1. einzusehen, dass man folgendes bekommt:

Fig. 1.
Index-Fehler.

$$\begin{array}{ll} \text{Lage I.} & \alpha' = \alpha + x \\ \text{Lage II.} & \alpha'' = \alpha - x \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Mittel } \frac{\alpha' + \alpha''}{2} = \alpha \quad \text{und} \quad \frac{\alpha' - \alpha''}{2} = x \tag{1}$$

Da in Wirklichkeit die Fernrohr-Ziel-Axe nicht mit dem Ablese-Zeiger *eine* Gerade F bildet, wie in Fig. 1. angenommen ist, so verhält sich die Sache etwas anders, als in Fig. 1. dargestellt ist; dass aber das Schluss-Ergebnis dasselbe bleibt, wird sich leicht überblicken lassen. Um jedoch jedem Zweifel vorzubeugen, haben wir in den nachfolgenden Figuren 2., 3. und 4. die Sache nochmals gründlicher dargestellt, und zugleich auch die gebräuchlichste Anordnung berücksichtigt, dass nicht der Kreis, sondern der Nonienhalter fest ist, und dass der Kreis fest mit dem Fernrohr verbunden auf- und niedergeht. In Fig. 2., 3. und 4. soll die stark gezogene, mit einer Pfeilspitze versehene Linie die Ziel-Axe des Fernrohrs vorstellen. Der an den Enden mit 0 und 00 bezeichnete Kreisdurchmesser ist derjenige, welcher die Anfangspunkte der Teilung enthält. Da der Kreis mit dem Fernrohr fest verbunden ist, so macht die Fernrohr-Axe mit dem Durchmesser 0—00 einen konstanten Winkel c. Da die Libelle einspielen soll, können wir annehmen, dass die Ablese-Vorrichtung N eine feste Stellung hat, so dass die Verbindungslinie zwischen dem Kreismittelpunkt und dem Ablese-Index N einen konstanten Winkel n mit der Horizontalen macht.

I. Erste Einstellung.

Fig. 2. zeigt die Stellung des Kreises und des Fernrohrs, welche nötig ist, um einen wahren Höhenwinkel α zu messen. Am Kreis wird abgelesen der Winkel α', welchen der nach dem Index N gezogene Kreishalbmesser mit dem Null-Halbmesser macht.

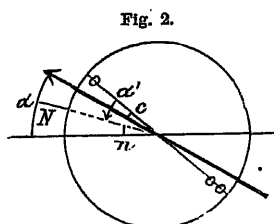



Fig. 2.

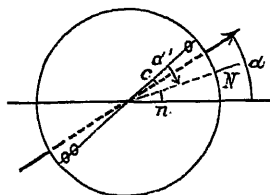
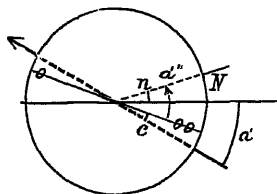



Fig. 3.

II. Umdrehen.

Fig. 3. zeigt die um 180° gedrehte, im übrigen aber unverändert gelassene Stellung des Kreises, des Fernrohrs und des Index-Striches (weshalb die Ziel-Axe des Fernrohrs, welche in Fig. 2. *vor* dem Kreise liegend angenommen ist, nun in Fig. 3. als ***hinter*** dem Kreise liegend, punktiert gezeichnet ist).

Fig. 4.

III. Durchschlagen.

Um den erstmals angezielten Punkt wieder zu erhalten, schlägt man nun das Fernrohr durch, und erhält, da der Kreis die Bewegung des Fernrohrs mitmacht, die in Fig. 4. gezeichnete Stellung. Die Ablesung erfolgt an dem unverändert gebliebenen Index-Strich N, und indem man von der Rückverlängerung 00 des Kreishalbmessers 0 zählt, erhält man die Ablesung α''.

Man entnimmt aus Fig. 2. und Fig. 4. die Beziehungen:

$$\alpha = \alpha' + n - c \qquad \alpha = \alpha'' + c - n$$

folglich:

$$\alpha = \frac{\alpha' + \alpha''}{2} \qquad c - n = \frac{\alpha' - \alpha''}{2} \tag{2}$$

Dieses sind im wesentlichen dieselben Gleichungen wie die früheren (1).

Man bekommt also den Höhenwinkel α als arithmetisches Mittel der Ablesungen α' und α'', unabhängig vom Index-Fehler $c - n$, und der Index-Fehler $c - n$ selbst wird erhalten als halbe Differenz zweier zusammengehöriger Ablesungen α' und α''.

Da der Index-Fehler seiner Natur nach konstant sein muss, so hat man für die Höhenwinkel-Messung in zwei Fernrohrlagen die Probe, dass die Differenz je zweier Ablesungen α' und α'' konstant sein muss.

Obgleich auf diese Weise der Index-Fehler unschädlich gemacht wird, ist es doch für manche Zwecke wünschenswert, ihn wegzuschaffen, oder wenigstens klein zu machen, was entweder durch Verschieben der Nonien oder durch Verschieben des Fadenkreuzes (in vertikalem Sinn) geschehen kann.

Um den Index-Fehler eines Nonius wegzuschaffen, verfährt man so:

Man misst einen Höhenwinkel in zwei Fernrohrlagen, und erhält denselben unabhängig von dem Index-Fehler als arithmetisches Mittel der zwei Ablesungen eines Nonius. Während nun das Fadenkreuz den angezielten Punkt deckt, und die Libelle einspielt, stellt man den Nonius so, dass er das obige arithmetische Mittel als Ablesung giebt.

Wenn man dagegen die Korrektion am Fadenkreuz vornehmen will, so stellt man den Kreis mittelst der Mikrometer-Schraube so, dass jenes arithmetische Mittel am Nonius abgelesen wird, und verschiebt dann das Fadenkreuz derart, dass es den Punkt deckt, auf welchen vorher eingestellt wurde.

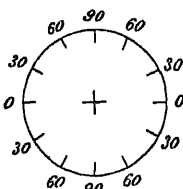
Jeder Nonius hat seinen besonderen Index-Fehler; wenn beide Index-Fehler gleich sind, so stehen die Nonien einander diametral gegenüber (abgesehen von Excentricität). Durch Verschieben des Fadenkreuzes kann man nur den Indexfehler *eines* Nonius wegschaffen.

Verschiedene Bezifferungen des Höhenkreises.

Die Bezifferung des Kreises wird sehr verschieden gemacht, und da hievon auch die Ausrechnung der Schluss-Ergebnisse abhängt, müssen wir diese Verhältnisse näher betrachten.

Fig. 5.
Höhen- und Tiefenwinkel.

I. Höhenwinkel und Tiefenwinkel. Das Einfachste ist, geradezu Höhenwinkel und Tiefenwinkel abzulesen, wie in Fig. 5. angedeutet ist.

Hiebei giebt jeder Nonius bei jeder Fernrohrlage einen Wert des Höhenwinkels, und man hat das Mittel aus je zwei Ablesungen an demselben Nonius zu nehmen, also im ganzen das Mittel aus allen vier Ablesungen.

Beispiel zu Fig. 5.

Non.	Lage *I*	Lage *II*	Mittel	*II—I*
links	+ 5° 26′ 30″	+ 5° 29′ 40″	+ 5° 28′ 5″	+ 3′ 10″
rechts	+ 5° 24′ 10″	+ 5° 27′ 30″	+ 5° 25′ 50″	+ 3′ 20″
Mittel	+ 5° 25′ 20″	+ 5° 28′ 35″	+ 5° 26′ 57,5″ $= \alpha$	

Wenn ein erheblicher Index-Fehler vorhanden ist, so können bei kleinen Höhen- oder Tiefenwinkeln die vier Ablesungen verschiedene Zeichen erhalten, doch kann man in der Ausrechnung des Höhenwinkels nicht irren, wenn man nur diese Vorzeichen rein algebraisch berücksichtigt.

Diese einfache Anordnung Fig. 5. zeigt beim ersten Blick manche Vorteile; sie hat aber auch manche Nachteile: Man braucht hiebei einen doppelten Nonius oder einen nach zwei Richtungen bezifferten Nonius, und die Vorzeichen der Winkel (+ oder —) müssen stets mit aufgeschrieben werden, was zu Irrungen führen kann.

Fig. 6.
Zenit-Distanzen.

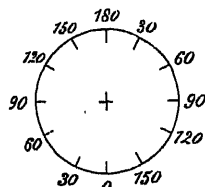
II. Zenit-Distanzen. Am meisten gebräuchlich ist die Anordnung von Fig. 6., wobei die horizontale Ziel-Linie die Ablesung 90° bekommt.

Die Ablesungen für Höhenwinkel und Tiefenwinkel werden hier im *gleichen* Sinn gemacht. Wenn Lage *I* Zenit-Distanzen giebt, so giebt Lage *II* deren Supplemente (gewissermassen Nadir-Distanzen). Bezeichnet man die Ablesungen in der ersten und zweiten Fernrohrlage bzw. mit *I* und *II*, und die entsprechenden Höhenwinkel mit α' und α'', so findet man:

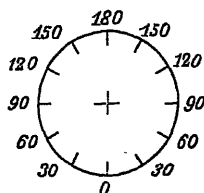
$$\alpha' = 90° - I \qquad - \alpha'' = 90° - II$$

folglich:

$$\alpha = \frac{\alpha' + \alpha''}{2} = \frac{II - I}{2} \qquad (3)$$

Man erhält den Höhenwinkel nach Grösse und Vorzeichen als halbe Differenz der Ablesungen. Um dabei die Lagen *I* und *II* nicht zu verwechseln, benennt man sie gewöhnlich nach dem Kreis; ist dieser in Lage *I* links, so muss er in Lage *II*

rechts sein. Wenn die Formel (3) gelten soll, so muss diejenige Lage, welche Zenit-Distanzen giebt, mit I bezeichnet werden. Zwei Beispiele zeigt folgende Tabelle:

Non.	Lage I Kreis links	Lage II Kreis rechts	$II-I$	Bemerkungen
				Konstante Summe
links	88° 2′ 10″	91° 57′ 50″	+ 3° 55′ 40″	180° 0′ 0″
rechts	88° 0′ 20″	91° 56′ 10″	+ 3° 55′ 50″	179° 56′ 30″
		Mittel $II-I$	+ 3° 55′ 45″	
		Höhenwinkel $\frac{II-I}{2}$	+ 1° 57′ 52,5″	
links	90° 10′ 30″	89° 49′ 20″	— 0° 21′ 10″	179° 59′ 50″
rechts	90° 9′ 10″	89° 47′ 40″	— 0° 21′ 30″	179° 56′ 50″
		Mittel $II-I$	— 0° 21′ 20″	
		Höhenwinkel $\frac{II-I}{2}$	— 0° 10′ 40″	

Fig. 7.
Zenit- u. Nadir-Distanzen.

Eine unwesentliche Abänderung des Falles von Fig. 6. S. 419 zeigt Fig. 7.; man erhält hier in jeder Lage an dem einen Nonius eine Zenit-Distanz, an dem andern eine Nadir-Distanz, und statt des ersten der zwei vorstehenden Beispiele hätte man das folgende:

Non.	*Lage I*	*Lage II*		
links	88° 2′ 10″	91° 57′ 50″	$II-I=$	+ 3° 55′ 40″
rechts	91° 56′ 10″	88° 0′ 20″	$I-II$	+ 3° 55′ 50″
			Mittel	+ 3° 55′ 45″
			Höhenwinkel	+ 1° 57′ 52,5″

Wenn der Index-Fehler klein ist, mag es zuweilen bequem sein, alle Ablesungen einzeln auf Höhenwinkel zu reduzieren, z. B. aus dem ersten Beispiel der obigen Tabelle folgendes zu bilden:

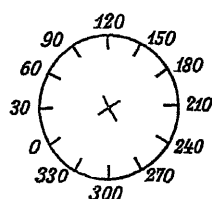
+ 1° 57′ 50″ + 1° 57′ 50″
+ 1° 59′ 40″ + 1° 56′ 10″
Gesamt-Mittel + 1° 57′ 52,5″

III. Durchlaufende Bezifferung. Fig. 8. Wenn der Höhenkreis wie der Horizontalkreis des Theodolits von 0° bis 360° durchlaufend beziffert ist, so stehen die Ablesungen I und II, welche an einem Nonius bei zwei Fernrohrlagen gemacht sind, zu dem Höhenwinkeln α in folgenden Beziehungen:

Fig. 8.
Durchlaufende Teilung.

$$\alpha = \frac{180° + I - II}{2}$$

oder Zenit-Distanz:

$$z = 90° - \alpha = \frac{II - I}{2} \tag{4}$$

Als Lage I ist diejenige zu bezeichnen, welche beim Erheben des Fernrohrs wachsende Ablesungen giebt. Bei der Bildung der Differenz $II - I$ wird II nötigenfalls um 360° vermehrt. Ein Beispiel dient zur Erläuterung:

Non.	*Lage I*	*Lage II*		*II — I*
links	30° 22′ 30″	213° 35′ 0″		183° 12′ 30″
rechts	210° 22′ 20″	33° 34′ 30″		183° 12′ 10″
			Mittel	183° 12′ 20″
			Zenit-Distanz	91° 36′ 10″
			Höhenwinkel	— 1° 36′ 10″

Oder um sofort den Höhenwinkel zu erhalten, rechnet man so:

links	$180° + I - II =$	— 3° 12′ 30″
rechts	$180° + I - II =$	— 3° 12′ 10″
	Mittel	— 3° 12′ 20″
	Höhenwinkel	— 1° 36′ 10″

Auch bei dieser Anordnung muss, wie bei Zenit-Distanzen, die Summe der Abesungen für einen Nonius konstant sein.

Wir haben bei dem letzten Beispiel angenommen, dass der Nullpunkt des Kreises ganz willkürlich liegt, so dass von einem Index-Fehler im gewöhnlichen Sinn keine Rede ist. Diese Anordnung *III* kommt namentlich dann vor, wenn der Kreis auf seiner Axe wie der Limbus eines Repetitions-Theodolits drehbar ist, und nur für die Dauer einer einzelnen Messung festgestellt wird. Man misst dann einen Winkel mit irgend welcher Kreisstellung, macht jedoch die Wiederholungen der Messung mit *anderen* Kreisstellungen.

Diese Einrichtung ist sehr zu empfehlen, damit nicht die wenigen Teilstriche, welche den fast allein vorkommenden Höhenwinkeln von wenigen Graden entsprechen, ausschliesslich zur Anwendung kommen.

Eigentliche Repetitions-Messung (mit zwei Libellen) kommt bei Höhenwinkeln kaum vor.

Die Genauigkeit der Höhenwinkel-Messung ist bei gleichem Kreisdurchmesser meist etwas geringer, als die Genauigkeit der Horizontalwinkel-Messung.

Namentlich muss man sich hüten vor konstanten Fehlern, welche z. B. beim Einstellen der Libelle vorkommen können.

§ 119. Einfluss der Axenfehler des Theodolits auf die Höhenwinkel-Messung. *)

Wir denken uns das Höhenwinkelmess-Instrument so konstruiert, dass ein fester Höhenkreis in die vertikale Ziel-Ebene gebracht wird; mit dem Fernrohr sei ein Index fest verbunden, und zwar so, dass der Index am Höhenkreis Null zeigt, wenn die Ziel-Linie vertikal ist (Ablesung von Zenit-Distanzen ohne Indexfehler). Allerdings ist gewöhnlich das Verhältnis umgekehrt, indem der Kreis sich mit dem Fernrohr dreht und der Index fest ist, da es sich aber nur um die *relative* Drehung der Ziel-Linie gegen eine in der Ebene des Kreises feste Gerade handelt, so können wir unsere Rechnung wohl auf die obige Voraussetzung gründen; der Übersichtlichkeit wegen können

*) Beim ersten Studium zu übergehen.

wir ferner annehmen, dass der Kreis in die Beobachtungs Ebene selbst gerückt sei, und dass der Nullpunkt der Kreis-Teilung mit dem Zenitpunkt des Kreises zusammenfällt.

Als „Indexlinie“ bezeichnen wir diejenige Lage der Ziel-Axe, welche diese Axe einnehmen würde, wenn kein Ziel-Axenfehler (Kollimationsfehler) vorhanden wäre.

Wenn das Ganze um eine Vertikal-Axe gedreht wird, welche nicht genau vertikal ist, so wird in den verschiedenen Lagen, in welche der Kreis hiebei kommen kann, der Zenitpunkt des Kreises nicht mehr mit dessen Nullpunkt zusammenfallen, jedoch kann man in jeder Kreislage den Kreis in seiner Ebene unabhängig von dem übrigen Instrument so viel drehen, dass diese Bedingung wieder erfüllt ist, und zwar dient hiezu die in der Richtung der Zielung angebrachte Libelle.

Wenn das Instrument mit Axenfehlern behaftet ist, so wird, bei einer Zenit-Distanz-Messung, am Kreis der Winkel abgelesen, um welchen sich die oben definierte Indexlinie dreht, vom Zenit- und Nullpunkt des Kreises bis zu derjenigen Lage, welche der Fernrohr-Zielung entspricht. (Projektion der Fernrohr-Axe auf die Kreis-Ebene.)

Wir werden zuerst den Ziel-Axenfehler (Kollimationsfehler) c mit dem Fehler i der Horizontal-Axe zusammennehmen, und nachher noch den Fehler v der Vertikal-Axe mit in Rechnung bringen.

Um den Aufstellungspunkt I des Instruments denken wir eine Kugel von beliebigem Halbmesser beschrieben, um die in Betracht kommenden Winkel als Bestandteile sphärischer Dreiecke zu veranschaulichen (Fig. 1. und Fig. 2.).

Die Horizontal-Ebene des Beobachtungspunktes I sei die Ebene ACB, das Zenit sei Z. Die Horizontal-Axe des Theodolits hat statt AB die falsche Lage $A'B'$, und sei unter dem Winkel $BIB' = i$ gegen die wahre Horizontale IB geneigt.

Wäre kein Ziel-Axenfehler c vorhanden, so müsste sich nun die Ziel-Axe in einer Ebene $CP'Z'$ rechtwinklig zu $A'B'$ drehen (wobei $Z'IZ = i$ ist), und jedenfalls ist IZ' die Zenit-Stellung der früher beschriebenen Indexlinie. Wegen des Ziel-Axenfehlers c bewegt sich aber die Ziel-Axe in der flachen Kegelfläche $C'PZ''$, oder es tritt an Stelle des Bogens $P'Z'$ der Parallelbogen PZ''.

Wird ein Punkt P angezielt, dessen wahre Zenit-Distanz $ZIP = z$ ist, so wird statt z am Instrument der Winkel $Z'IP' = z'$ abgelesen, welchen die Indexlinie durchläuft von ihrer Zenit-Stellung IZ' bis zu der Stellung IP'. Diese Drehung z' wird auch gemessen durch den Winkel $ZA'P$ in dem sphärischen Dreieck $ZA'P$ (Fig. 2.), dessen drei Seiten die Werte haben:

$$A'Z = 90° + i \qquad A'P = 90° - c \qquad ZP = z$$

Dieses Dreieck $ZA'P$ liefert die Gleichung:

$$\cos ZP = \cos A'Z \cos A'P + \sin A'Z \sin A'P \cos A'$$

oder mit den eingeführten Bezeichnungen:

$$\cos z = \cos(90^\circ + i) \cos(90^\circ - c) + \sin(90^\circ + i) \sin(90^\circ - c) \cos z' \qquad (1)$$

und wenn statt der Zenit-Distanzen z und z' die entsprechenden Höhenwinkel eingeführt werden, nämlich:

$$h = 90^\circ - z \qquad h' = 90^\circ - z'$$

so giebt die Gleichung (1):

$$\sin h = - \sin i \sin c + \cos i \cos c \sin h'.$$

Durch Reihen-Entwicklung erhält man:

$$\sin h = - i\,c + \left(1 - \frac{i^2}{2}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2}\right) \sin h'$$

$$\sin h' - \sin h = i\,c + \frac{i^2 + c^2}{2} \sin h'$$

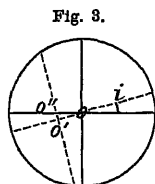
$$\sin h' - \sin h = (h' - h) \cos h'$$

folglich mit Vertauschung von h' und h in den Korrektions-Gliedern:

$$h' - h = \frac{i\,c}{\cos h} + \frac{i^2 + c^2}{2} \tang h \qquad (2)$$

Wenn man die zwei Fehler i und c *einzeln* untersucht hätte, so würde man auf ähnliche Weise wie früher in § 53. die Glieder $\frac{i^2}{2} \tang h$ und $\frac{c^2}{2} \tang h$ erhalten haben, dagegen wäre das Produkt $\frac{i\,c}{\cos h}$ in (2) auf diesem Wege nicht zu finden gewesen.

Dieses Produkt, welches mit $h = 0$ nicht verschwindet, lässt sich folgendermassen geometrisch deuten: Fig. 3. stelle das Fadenkreuz des zur Beobachtung dienenden Fernrohrs vor, O ist der Fadenkreuzpunkt, welcher der richtigen Ziel-Axe entspricht, OO' ist der Horizontalfaden bei unrichtiger Instrumentenstellung. Da wir das Vorhandensein eines Ziel-Axenfehlers c annehmen, sei der zum Anzielen dienende Fadenkreuzpunkt von O nach O' gerückt, wobei $OO' = c$ ist. Wenn die Horizontal-Axe des Instruments um den Winkel i gegen die wahre Horizontale geneigt wird, so wird bei horizontaler Zielung auch der Horizontalfaden um den Winkel i gedreht, so dass das ganze Fadenkreuz die in Fig. 3. punktiert gezeichnete Lage erhält. Der dadurch erzeugte Höhenwinkelfehler ist der Bogen $O'O''$, und da $OO' = c$, und der Winkel $O''OO' = i$ ist, so hat man $O'O'' = c \tang i$ oder genähert $O'O'' = c\,i$; es ist also für $h = 0$ dieser Bogen $O'O''$ mit dem ersten Glied der Formel (2) identisch.

Fig. 3.

Es bleibt jetzt noch übrig, den Einfluss eines Fehlers v der Vertikal-Axe zu untersuchen, und hiezu können wir die Neigung der Horizontal-Axe betrachten als teilweise herrührend von einer Neigung v der Vertikal-Axe, denn es ist nach (8) § 53. S. 164:

$$i' = v \sin u$$

und an Stelle von i in (2) ist zu schreiben $i + i'$, folglich wird nun:

$$h' - h = \frac{(i + v \sin u)\, c}{\cos h} + \frac{(i + v \sin u)^2 + c^2}{2} \tang h$$

$$h' - h = \frac{i^2 + c^2 + v^2 \sin^2 u}{2} \tang h + \frac{c\, i + c\, v \sin u + i\, v \sin u \sin h}{\cos h} \qquad (3)$$

Für die numerische Rechnung in Sekundenmass ist jedoch dieser Ausdruck noch mit 206265″ zu dividieren.

Die *quadratischen* Glieder dieses Ausdrucks (3) hätte man auch durch Einzelbetrachtung der Fehler i, c, v, ähnlich wie früher in § 53. erhalten, während die *Produkte* hiebei verloren gegangen wären, wie die folgende Betrachtung zeigt: Da $h' - h$ eine Funktion von c, i und v ist, welche für $c = 0$, $i = 0$ und $v = 0$ verschwindet, so kann man $h' - h$ nach dem *Taylor*schen Satz in eine Reihe nach Potenzen von c, i und v entwickelt denken, nämlich:

$$h' - h = f(c, i, v)$$

$$h' - h = \frac{\partial f}{\partial c} c + \frac{\partial f}{\partial i} i + \frac{\partial f}{\partial v} v +$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial c^2} c^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 i} i^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 v} v^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial c\, \partial i} c\, i + \frac{\partial^2 f}{\partial c\, \partial v} c v + \frac{\partial^2 f}{\partial i\, \partial v} i v + \ldots$$

Wie der Ausdruck (3) zeigt, sind die Glieder erster Ordnung in dieser Reihe im vorliegenden Falle = Null, und die drei folgenden quadratischen Glieder können durch Einzelbetrachtungen gefunden werden, nicht aber die drei letzten Produkt-Glieder.

Der Fehler-Ausdruck (3) für Höhenwinkel-Messung unterscheidet sich von den früher in § 53. entwickelten entsprechenden Formeln für Horizontalwinkel-Messung wesentlich dadurch, dass bei jenen Formeln Glieder *erster* Ordnung vorhanden waren, während jetzt, bei der Höhenfehler-Formel, nur noch Glieder von *zweiter* Potenz vorhanden sind. Dieses deutet schon an, dass die Höhenfehler sehr klein sein werden.

In der That giebt die Ausrechnung nach der Formel (3), für einen einzelnen Teil von der Form $\frac{\delta^2}{2\varrho} \tang h$, folgendes:

δ	Höhenwinkel h							
	1°	5°	10°	20°	30°	45°	60°	90°
1′	0,000″	0,001″	0,002″	0,003″	0,01″	0,01″	0,02″	∞
5′	0,004″	0,02″	0,04″	0,08″	0,13″	0,22″	0,38″	∞
10′	0,014″	0,08″	0,15″	0,32″	0,50″	0,87″	1,51″	∞
30′	0,136″	0,76″	1,38″	2,86″	4,53″	7,86″	13,60″	∞

Diese Tabelle berechtigt uns, bei Höhenwinkel-Messungen mit einem einigermassen berichtigten Theodolit, und bei Höhen, die nicht über 45° gehen, die Axenfehler schlechthin zu vernachlässigen.

Wenn hiernach die ganze Fehlertheorie, die wir in diesem § entwickelt haben, in gewissem Sinne zu einem negativen Resultat geführt hat, nämlich dazu, dass man diese Theorie zu den Messungen nicht braucht, so wollen wir unsere theoretische Arbeit doch nicht für überflüssig erklären.

Diese Theorie befreit den Messenden von der sonst wohl vorhandenen Furcht vor schädlichen Einflüssen der Axenfehler.

§ 120. Grundzüge der Theorie der trigonometrischen Höhenmessung.

Bei mässigen Entfernungen kann man Höhen-Unterschiede nach Andeutung von Fig. 1. dadurch bestimmen, dass man einen lotrechten Abstand h mit einer wagrechten Entfernung a zu einem rechtwinkligen Dreieck ABE verbindet, und den einen Winkel α misst; dann hat man nach Fig. 1.:

$$h = a \tang \alpha \qquad (1)$$

Fig. 1.

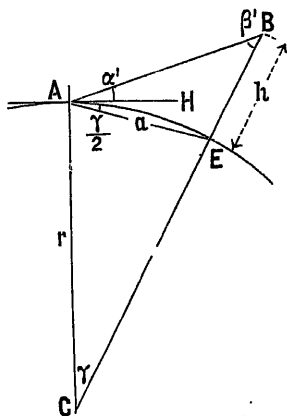
Dieses ist aber nur bei kurzen Entfernungen nahezu richtig, aus zwei Gründen:

Erstens macht sich die *Erdkrümmung* sehr bald bemerklich, so dass die Linie AE in Fig. 1. nicht mehr als Gerade, sondern als Bogen behandelt werden muss, und zwar ist dieses hier in viel stärkerem Masse der Fall als bei Lagemessungen. Während der Lage nach ein Dreieck von 5000 Meter Seite noch als eben behandelt werden kann, wird für die Höhe schon bei 500 Meter Entfernung die Erdkrümmung merkbar.

Zweitens kommt noch die *Strahlenbrechung* (Refraktion) hinzu, so dass auch die Linie AB in Fig. 1. nicht eine Gerade, sondern ein Bogen wird. Die Strahlenbrechung entsteht aus dem Umstand, dass die unteren Schichten der Luft dichter sind als die oberen. Obgleich aber die physikalischen Gesetze der Lichtbrechung bekannt und der Rechnung zugänglich sind (s. § 128.), treten doch infolge des beständigen Wechsels in dem Zustand der Atmosphäre Unsicherheiten ein, welche bis jetzt die trigonometrischen Höhenmessungen nicht zu der Schärfe der Lagemessungen gelangen liessen, und da andererseits für genaue Höhenbestimmungen das ausgezeichnete Verfahren des Nivellierens vorhanden ist, so ist die trigonometrische Höhenmessung jetzt auf Messungen niederen Rangs im Gebirge beschränkt worden.

Erdkrümmung.

Fig. 2.

In Fig. 2. sei AE die kugelförmig gekrümmte Erdoberfläche mit dem Halbmesser r, AH ist Tangente in A und α' der Höhenwinkel der Zielung von A nach B. Die Linie AB wird hier vorerst als *gerade* angenommen. Die Entfernung der beiden Punkte A und E sei $= a$, und es soll wegen der Kleinheit von a, im Verhältnis zum Erdhalbmesser r, gleichgültig sein, ob man a in der Sehne AC oder in dem Bogen AE gemessen denkt *)

*) Wenn der Bogen AE mit b bezeichnet wird, und die Sehne mit a, so ist:

$$b = r\gamma \qquad \text{und} \qquad a = 2r \sin\frac{\gamma}{2}$$

Die Reihen-Entwicklung giebt:

Indem die beiden eingeschriebenen Winkel γ bei C, und $\frac{\gamma}{2}$ bei A, sich selbst erklären, können wir auch den dritten Winkel β' bei B bestimmen durch die Gleichung:

$$(\alpha' + 90^\circ) + \gamma + \beta' = 180^\circ$$

$$\beta' = 90^\circ - (\alpha' + \gamma) \tag{2}$$

Nun giebt das geradlinige Dreieck $A\,B\,E$ nach dem Sinus-Satz:

$$\frac{h}{a} = \frac{\sin\left(\alpha' + \frac{\gamma}{2}\right)}{\sin \beta'} = \frac{\sin\left(\alpha' + \frac{\gamma}{2}\right)}{\cos(\alpha' + \gamma)}$$

Da γ klein sein soll, kann man entwickeln:

$$\sin\left(\alpha' + \frac{\gamma}{2}\right) = \sin \alpha' + \frac{\gamma}{2} \cos \alpha' + \ldots$$

$$\cos(\alpha' + \gamma) = \cos \alpha' + \ldots$$

Also:

$$\frac{h}{a} = \frac{\sin \alpha' + \frac{\gamma}{2} \cos \alpha'}{\cos \alpha'} = \operatorname{tang} \alpha' + \frac{\gamma}{2}$$

$$h = a \operatorname{tang} \alpha' + a \frac{\gamma}{2}$$

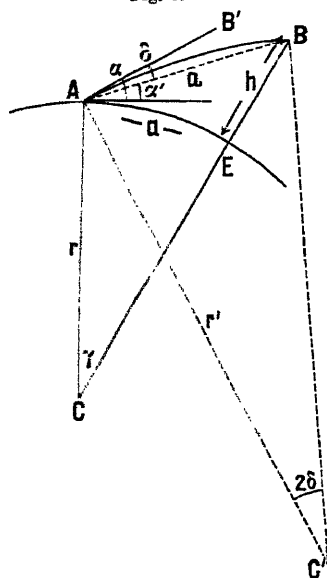



Fig. 3.

Es ist aber weiter:

$$\gamma = \frac{a}{r} \tag{3}$$

folglich nun:

$$h = a \operatorname{tang} \alpha' + \frac{a^2}{2r}. \tag{4}$$

Strahlenbrechung.

An Stelle der *geraden* Lichtbahn $A\,B$ in Fig. 2. S. 425 wollen wir nun eine *krumme* Lichtlinie AB annehmen, wie in Fig. 3. angedeutet ist.

Man kann diesen Fall (Fig. 3.) auf den vorhergehenden Fall (Fig. 2.) mit Gleichung (4) zurückführen, wenn man den Winkel δ weiss, welchen in Fig. 3. die Gerade $A\,B$ mit der Tangente $A\,B'$ bildet.

Man nimmt näherungsweise an (vorbehältlich der späteren Bestätigung durch Versuche), dass der Bogen $A\,B$ ein flacher *Kreisbogen* sei mit dem Mittelpunkt C', dessen Centriwinkel bei

---

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{6}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^3 = \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma^3}{48}$$

folglich:

$$b - a = \frac{r\,\gamma^3}{24} = \frac{r}{24}\left(\frac{b}{r}\right)^3 = \frac{b^3}{24\,r^2}$$

Setzt man z B. $b = 20\,000^m$ und $r = 6\,370\,000^m$, so wird $b - a$ nur $= 0{,}008^m$, was hier unmerklich ist.

C' das Doppelte des kleinen Winkels $B'AB = \delta$ ist, wie in Fig. 3. S. 426 mit 2δ bei C' eingeschrieben ist.

Der Halbmesser r' des flachen Bogens AB wird *konstant* angenommen, und durch einen Coëfficienten k in Beziehung zu dem Erdhalbmesser r gesetzt durch die Gleichung:

$$r = k\,r' \quad \text{oder} \quad \frac{1}{r'} = \frac{k}{r} \tag{5}$$

Der hier eingeführte Coëfficient k enthält zunächst eine sehr willkürliche Annahme; es wird vorbehalten, nachher zu zeigen, wie k bestimmt werden kann, und dass es in runder Zahl etwa $= 0{,}13$ ist.

Jedenfalls kann man vorerst mit dieser Annahme (5) weiter rechnen, und in dem näherungsweise die beiden Bögen AE und AB einander *gleich*,*) $= a$ gesetzt werden, hat man weiter:

$$AB = a = 2\,r'\,\delta$$

$$\delta = \frac{1}{2}\frac{a}{r'}$$

oder wegen (5):

$$\delta = \frac{1}{2}\frac{a\,k}{r} \tag{6}$$

Nach Fig. 3. S. 426 hat man:

$$\alpha' = \alpha - \delta = \alpha - \frac{1}{2}\frac{a\,k}{r}$$

Dieses setzt man in die Gleichung (4), und zwar abermals genähert, weil auch α immer ein ziemlich kleiner Winkel ist:

$$tang\,\alpha' = tang\left(\alpha - \frac{1}{2}\frac{a\,k}{r}\right) = tang\,\alpha - \frac{1}{2}\frac{a\,k}{r}$$

Damit giebt die Gleichung (4):

$$h = a\,tang\,\alpha - \frac{a^2 k}{2r} + \frac{a^2}{2r}$$

oder mit Zusammenfassung der zwei letzten Glieder:

$$h = a\,tang\,\alpha + \frac{1-k}{2r}\,a^2 \tag{7}$$

Dieses ist die Grundformel der trigonometrischen Höhenmessung; obgleich mancherlei Näherungen dabei angewendet wurden, ist diese Formel (7) doch für die meisten praktischen Zwecke ausreichend.

Bestimmung des Refraktions-Coëfficienten k.

Das einfachste Mittel, theoretisch genommen, zur Bestimmung von k, besteht darin, dass man eine Höhe h genau durch *Nivellieren* bestimmt, und dann einen Höhenwinkel α bei bekannter Entfernung a misst; denn wenn h nebst a, α und r als gegeben zu betrachten sind, so kann man die Gleichung (7) nach k (oder $1-k$) auflösen:

$$1 - k = \frac{2r}{a^2}\,(h - a\,tang\,\alpha) \tag{8}$$

---

*) In der sehr übertrieben gezeichneten Fig. 3. S. 426 scheint die Annahme $AE = AB$ kaum zulässig; indessen in der Wirklichkeit, wo γ ein kleiner Winkel von nur etwa $10' - 20'$ ist, kann die Annahme $AE = AB$ unbedingt gemacht werden.

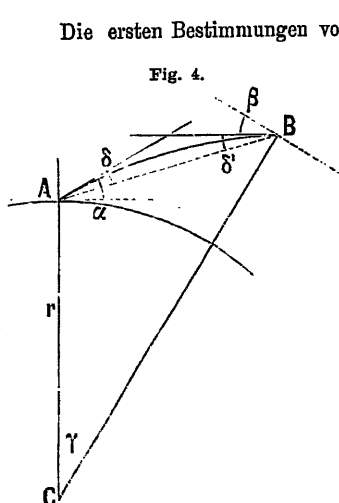
Dieses theoretisch einfachste Mittel wurde aber früher nicht angewendet, weil das genaue Nivellieren auf grosse Entfernungen und grosse Höhen gescheut wurde. (In neuerer Zeit hat namentlich *Bauernfeind* in München Refraktions-Bestimmungen nach dem Grundsatz der Gleichung (8) angestellt.

Die ersten Bestimmungen von k hat man schon frühzeitig durch das Verfahren der gegenseitigen Messungen erlangt, wie in Fig. 4. angedeutet ist. Misst man von A nach B den Höhenwinkel α und von B nach A den Tiefenwinkel β, so hat man die Gleichung:

Fig. 4.

$$\gamma + (90° + \alpha - \delta) + (90° - \beta - \delta') = 180°$$
$$\delta + \delta' = \gamma + \alpha - \beta \quad .$$

Mit der Annahme $\delta' = \delta$, und mit der Gleichung (6) hat man:

$$\delta + \delta' = 2\,\delta = \frac{a\,k}{r} = \gamma + \alpha - \beta$$

Nach (3) ist

$$\gamma = \frac{a}{r}\,\varrho,$$

damit wird, für Winkelmass:

$$1 - k = \frac{r}{a}\left(\frac{\beta - \alpha}{\varrho}\right) \tag{9}$$

Nach diesem Grundsatz sind gegenseitige (und womöglich gleichzeitige) Höhenmessungen in grosser Zahl zur Bestimmung der Refraktions-Konstanten angestellt worden. Einige Mittelwerte der dabei erhaltenen Resultate sind die folgenden:

1751.	*Tobias Mayer* (De refractionibus objectorum terrestrium etc., Göttingen 1751, § XII.) berechnete aus französischen Messungen:	$k = {}^1/_8 = 0{,}1250$
1792.	*Delambre* und *Méchain* (Base du système métrique, tome III S. 776) fanden im Mittel	$k =$ 0,1678
1823.	*Gauss* (Berl. Astr. Jahrbuch 1826 S. 91)	$k =$ 0,1306
1831.	*Struve* (Breitengrad-Messung in den Ostseeprovinzen Russlands. Band I. S. 187, Dorpat 1831)	$k =$ 0,1237
1834.	*Bessel* (Gradmessung in Ostpreussen S. 197)	$k =$ 0,1370
1849.	*Baeyer* (Küstenvermessung S. 490—491) Küsten-Dreiecke $k = 0{,}1362$, Binnenland $k = 0{,}1239$, Mittel	$k =$ 0,1300
1858.	Britische Landes-Aufnahme (*Ordnance trigonometrical survey*, S. XV.) $\frac{1}{2}\,k = \frac{1}{15{,}4}$ bis $\frac{1}{9{,}4}$, im Mittel $\frac{1}{2}\,k = \frac{1}{12{,}6}$ oder .	$k =$ 0,1587
1870—1875.	Preussische Landes-Aufnahme, Nivellements und Höhenbestimmungen:	
	Erster Band, 1870, S. 135, in der Nähe der See 0,1292, im Binnenland 0,1175, Mittel	$k =$ 0,1234
	Zweiter Band, 1873, S. 90	$k =$ 0,1007
	Dritter Band, 1875, S. 151	$k =$ 0,1299
	Durchschnitt dieser 10 Werte	$k =$ 0,1327

Die hier aufgeführten vier deutschen Bestimmungen geben:

Gauss	$k = 0{,}1306$
Bessel	0,1370
Baeyer	0,1300
Landes-Aufnahme	0,1180
Durchschnitt	$k = 0{,}1289.$

In Deutschland ist es üblich geworden, den von *Gauss* in Hannover, also in der Mitte von Deutschland, gefundenen Mittelwert $k = 0{,}1306$ als mittleren Refraktions-Coëfficienten anzunehmen. Dieses stimmt auch nahe mit dem soeben roh berechneten Durchschnitt, und wir nehmen daher in runder Zahl:

$$\text{Mittelwert} \quad . \; . \; . \quad k = 0{,}13. \tag{10}$$

Die im vorstehenden mitgeteilten Einzelwerte sind selbst wieder *Mittel*werte aus grösseren Beobachtungsreihen, und sie schwanken nur etwa zwischen 0,10 und 0,16, und die mittlere Abweichung vom Mittelwert wäre also nur 0,015 oder rund etwa Ein Zehntel von k selbst.

Viel grössere Schwankungen erhält man aber, wenn man die *Einzel*werte betrachtet, aus denen jene Mittelwerte bestimmt sind. Wir bilden hiezu folgende Vergleichung:

	Maximum	*Minimum*	*Differenz*
Delambre	$k = 0{,}5954$	$-0{,}0070$	0,6024
Baeyer	0,2668	0,0829	0,1839
Gauss	0,2078	$-0{,}1141$	0,3219
		Mittel	0,3694

Die grösste Abweichung vom Mittel wäre also $= 0{,}1847$, d. h. grösser als k selbst.

Um auch die *durchschnittliche* Abweichung vom Mittel zu veranschaulichen, betrachten wir im Folgenden die 28 Refraktions-Bestimmungen, welche *Gauss* im „Berliner astron. Jahrbuch für 1826“, S. 91, mitgeteilt hat.

k	$k - k_m$	k	$k - k_m$
0,125	$-0{,}005$	0,129	$-0{,}009$
0,145	$-0{,}025$	0,116	$+0{,}004$
0,146	$-0{,}026$	0,128	$-0{,}008$
0,128	$-0{,}008$	0,086	$+0{,}034$
0,123	$-0{,}003$	0,124	$-0{,}004$
0,164	$-0{,}044$	0,073	$+0{,}047$
0,158	$-0{,}038$	0,115	$+0{,}005$
0,159	$-0{,}039$	0,126	$-0{,}006$
0,109	$+0{,}011$	0,208	$-0{,}088$
0,135	$-0{,}015$	0,122	$-0{,}002$
0,133	$-0{,}013$	0,031	$+0{,}089$
0,145	$-0{,}025$	0,060	$+0{,}060$
0,111	$+0{,}009$	$-0{,}114$	$+0{,}234$
0,157	$-0{,}037$	$+0{,}226$	$-0{,}106$
1,938	$\pm 0{,}298$	1,430	$\pm 0{,}696$
		1,938	$\pm 0{,}298$
		3,368	$\pm 0{,}994$

$$k_m = \frac{3{,}368}{28} = 0{,}120 \qquad \varDelta_m = \frac{\pm 0{,}994}{28} = \pm 0{,}035$$

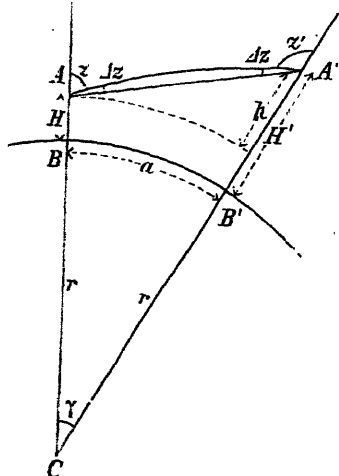
Der Mittelwert 0,120 stimmt nicht mit dem von *Gauss* selbst berechneten Mittelwert $k = 0{,}1306$, weil bei letzterem die verschiedenen Entfernungen berücksichtigt sind. Es kam uns hier nur darauf an, die Abweichungen $k - k_m$ zu veranschaulichen, deren Durchschnittswert $\Delta_m = \pm 0{,}035$ ist. Durch diese und mehrere ähnliche Vergleichungen kamen wir dazu, anzunehmen, dass die mittlere Abweichung der jeweils stattfindenden Refraktion von einem Mittelwerte, etwa $k = 0{,}13$, etwa zu $\frac{1}{4}\,k$ geschätzt werden kann; und um für überschlägige Genauigkeits-Schätzungen einen Anhalt zu haben, setzen wir:

$$\text{Mittelwert } k = 0{,}13\ (1 \pm 0{,}25) \tag{11}$$

Mit dieser Annahme und mit der Formel (7) kann man nun die Höhenberechnungen ausführen, wie wir in § 124. zeigen werden.

§ 121. Weitere Entwicklungen.

Obgleich die in dem vorigen § 120. entwickelte Formel (7) S. 427 für die meisten praktischen Zwecke ausreicht, und auch sofort zu den Anwendungen von § 122. und § 123. gebraucht werden kann, haben wir doch noch einige weitere Entwicklungen für den Fall gegenseitiger Messungen zu machen; und auch bei Beschränkung auf jene Formel (7) S. 427 ist es teilweise erwünscht, die im vorigen § 120. angewendeten Näherungen nun schärfer zu begründen.

Fig. 1.
Gegenseitige Messungen.

In Fig. 1. bezeichnet C den Mittelpunkt der zunächst als kugelförmig angenommenen Erde, BB' ist die Meeresfläche; A und A' sind zwei Punkte, deren Höhen über dem Meere bzw. H und H' sind. Die krumme Linie AA' stellt die Lichtkurve vor, über deren Krümmung (z. B. nahezu kreisförmig) zunächst noch keine Annahme gemacht werden soll. Die Zenit-Distanzen in A und A' seien bzw. $= z$ und $= z'$. Die kleinen Winkel, welche die Lichtkurven AA' mit der Sehne AA' macht, nämlich Δz und $\Delta z'$, heissen Refraktionswinkel, und ihre Summe $\Delta z + \Delta z'$ ist die gesamte Refraktion des Strahles AA'.

Das geradlinige Dreieck CAA' liefert folgende Gleichung:

$$\frac{CA' - CA}{CA' + CA} = \frac{tang\,\frac{A - A'}{2}}{tang\,\frac{A + A'}{2}} \tag{1}$$

Dabei ist:

$$\text{Winkel } A = 180° - (z + \Delta z)$$
$$\text{und Winkel } A' = 180° - (z' + \Delta z')$$
$$\text{Summe } A + A' = 180° - \gamma$$

ferner:

$$CA = r + H \qquad CA' = r + H'$$

Damit geht die Gleichung (1) über in folgende:

$$\frac{H' - H}{2r + H + H'} = \frac{tang\ {}^1/_2\,(z' + \Delta z' - z - \Delta z)}{cotang\ {}^1/_2\,\gamma}$$

$$H' - H = 2r\left(1 + \frac{H + H'}{2r}\right) tang\,\frac{\gamma}{2}\ tang\,\frac{z' + \Delta z' - (z + \Delta z)}{2} \qquad (2)$$

Hinreichend genau ist:

$$2\,r\ tang\,\frac{\gamma}{2} = a \qquad (3)$$

also nach (2) und (3):

$$H' - H = a\left(1 + \frac{H + H'}{2r}\right) tang\,\frac{(z' + \Delta z') - (z + \Delta z)}{2} \qquad (4)$$

Das geradlinige Dreieck CAA' giebt die Winkelsumme:

$$\gamma + 180^\circ - (z + \Delta z) + 180^\circ - (z' + \Delta z') = 180^\circ \qquad (5)$$

oder:

$$\Delta z + \Delta z' = \gamma + 180^\circ - (z + z') \qquad (6)$$

Nun wird der Refraktions-Coëfficient k eingeführt durch die Annahme:

$$\Delta z + \Delta z' = k\,\gamma \qquad (7)$$

und weiter soll die Annahme gemacht werden, dass Δz und $\Delta z'$ *gleich* seien, also:

$$\Delta z = \Delta z' = \frac{1}{2}\,k\,\gamma \qquad (8)$$

Mit Hilfe der Gleichung (5) kann man die Gleichung (4) zweifach umformen, indem man entweder $z' + \Delta z'$ oder $z + \Delta z$ eliminiert. Im ersten Falle nimmt man aus (5):

$$z' + \Delta z' = 180^\circ + \gamma - (z + \Delta z)$$

und damit giebt (4):

$$H' - H = a\left(1 + \frac{H + H'}{2r}\right) cotg\left(z + \Delta z - \frac{\gamma}{2}\right) \qquad (9)$$

und dementsprechend findet man auch:

$$H - H' = a\left(1 + \frac{H + H'}{2r}\right) cotg\left(z' + \Delta z' - \frac{\gamma}{2}\right) \qquad (10)$$

und mit Rücksicht auf (8) bildet man daraus zwei neue Formen:

$$H' - H = a\left(1 + \frac{H + H'}{2r}\right) cotg\left(z - \frac{1 - k}{2}\,\gamma\right) \qquad (11)$$

$$H - H' = a\left(1 + \frac{H + H'}{2r}\right) cotg\left(z' - \frac{1 - k}{2}\,\gamma\right) \qquad (12)$$

Aus (5) und (8) bildet man:

$$1 - k = \frac{z + z' - 180^\circ}{\gamma} \qquad (13)$$

und dieses in (11) und in (12) gesetzt, giebt übereinstimmend:

$$H' - H = a\left(1 + \frac{H + H'}{r}\right) tang\,\frac{z' - z}{2} \qquad (14)$$

Diese letzte Gleichung (14) zeigt, dass man bei *gegenseitigen* Messungen (*z und z'* gemessen) den Höhen-Unterschied $H' - H$ findet, ohne die Refraktion zu kennen; es ist aber dabei die (zweifelhafte) Annahme gemacht, dass Δz und $\Delta z'$ *gleich* seien.

Für *ein*seitige Messungen haben wir die Formeln (11) und (12), welche beide im wesentlichen dasselbe sagen. Setzt man $H' - H = h$, so hat man hieraus:

$$h = a\left(1 + \frac{H + H'}{2r}\right) cotg\left(z - \frac{1-k}{2}\gamma\right) \tag{15}$$

Setzt man hier wieder nach (3): $\gamma = \frac{a}{r}$ und $z = 90° - \alpha$, so wird:

$$a\, cotg\left(z - \frac{1-k}{2}\gamma\right) = a\, tang\left(\alpha + \frac{1-k}{2r}a\right)$$

$$= a\, tang\, a + \frac{1-k}{2r}a^2$$

$$h = a\left(1 + \frac{H + H'}{2r}\right) tang\, \alpha + \frac{1-k}{2r}a^2 + \ldots \tag{16}$$

Dieses ist wieder im wesentlichen dieselbe Formel, wie (7) § 120. S. 427 als Ergebnis der roheren Entwicklung von § 120.

Den Korrektionsfaktor $\left(1 + \frac{H+H'}{2r}\right)$, welcher der Mittelhöhe $\frac{H + H'}{2}$ entspricht, kann man nach der Hilfstafel S. [10] des Anhangs berücksichtigen.

Bestimmung des Erdhalbmessers r.

Bisher haben wir die Erde als *kugel*förmig angenommen, und für Messungen von geringer Ausdehnung kann man eine solche Annahme gelten lassen. Für die Erde im ganzen nimmt man dann in runder Zahl:

$$r = 6\,370\,000 \text{ Meter } (log\, r = 6.80414) \tag{17}$$

Wenn man dagegen einen bestimmten Teil der Erde im Sinne hat, so ist zu berücksichtigen, dass die Erde ein Umdrehungs-Ellipsoid ist, das an verschiedenen Stellen und nach verschiedenen Richtungen verschiedene Krümmungen hat. Für Deutschland, mit der Mittelbreite $\varphi = 50°$, hat man den mittleren Krümmungshalbmesser:

$$log\, r = 6.80489 \quad (r = 6\,381\,000^m) \tag{18}$$

und mit diesem Mittelwert sind die Tafeln S. [10]—[11] in unserem Anhange berechnet.

Indessen bei einigermassen scharfen Berechnungen auf weitere Entfernungen ist die Annahme eines solchen konstanten Wertes (18) auch noch zu roh, die Krümmung der Erde hat in demselben Punkte nach verschiedenen Richtungen Werte, welche bis zu 0,3 % unter einander abweichen.

Die Berechnung dieser Krümmungs-Verhältnisse gehört in die höhere Geodäsie, und wird in unserem dritten Bande gelehrt werden. Inzwischen geben wir, zur Gewinnung einer Übersicht, im Folgenden eine kleine Tabelle der Werte $log\, r$ für verschiedene Breiten und verschiedene Azimute:

Tafel für $log\, r$, wo r in Metern der Erdkrümmungs-Halbmesser.

Azimut	$\varphi = 40°$	$\varphi = 45°$	$\varphi = 50°$	$\varphi = 55°$	$\varphi = 60°$
0°	6.80353	6.80391	6.80429	6.80466	6.80500
15°	6 80365	6.80401	6.80437	6.80472	6.80505
30°	6.80396	6.80428	6.80459	6.80490	6.80519
45°	6.80439	6.80464	6.80489	6.80514	6.80537
60°	6.80482	6.80500	6.80519	6.80538	6.80555
75°	6.80513	6.80527	6.80542	6.80555	6.80568
90°	6.80524	6.80537	6.80550	6.80562	6.80573

Wenn es sich darum handelt, die Änderung der Erdkrümmung zu berücksichtigen, überhaupt wenn man nach den genaueren Formeln, z. B. (15) rechnen will, so wird man *besondere* Hilfstafeln für die jeweiligen Verhältnisse anzulegen haben, auf welche wir hier nicht eingehen können.

§ 122. Anwendungen auf die Meeresfläche.

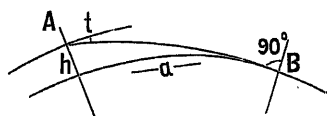
Höhenwinkel-Messungen in Beziehung auf das Meer geben manche Anwendungen unserer bisher entwickelten Formeln. Obgleich diese Anwendungen zum Teil rein seemännischer Art sind, und den Feld- und Landmesser nicht berühren, wollen wir doch, der Vollständigkeit wegen, das Wesentlichste hievon hier vorführen:

Zur See braucht man für astronomische Höhenmessung ausser der Refraktion und der Parallaxe noch die *Kimmtiefe*, um gemessene Höhen auf wahre Höhen zu reduzieren. Der Seemann misst nämlich z. B. eine Sonnenhöhe mit dem Sextanten als kürzesten Abstand des Sonnnen-Ober- oder -Unterrandes von der *Kimm*, d. h. von der Begrenzungslinie zwischen Wasser und Luft.

Indem wir die Grundformel der trigonometrischen Höhenmessung nach (7) § 120. S. 427 vornehmen, nämlich:

$$h = a \, tang \, \alpha + \frac{1-k}{2r} a^2 \tag{1}$$

finden wir daraus die Kimmtiefen-Formel in folgender Weise:

Fig. 1.
Kimmtiefe.

In Fig. 1. betrachten wir die Ziel-Linie AB von einem Punkte A, welcher die Höhe h über dem Meere hat, nach der Kimm B, d. h. eine das Meer in B berührende Licht-Linie, welche in A den Tiefenwinkel t hat. Wendet man hierauf die Grundgleichung (1) zweifach an, nämlich zuerst für die Zielung von A nach B, und dann für eine fingierte Messung von B nach A, so erhält man zwei Gleichungen:

von A nach B: $$-h = a \, tang \, (-t) + \frac{1-k}{2r} a^2 \tag{2}$$

von B nach A: $$+h = a \, tang \, 0 + \frac{1-k}{2r} a^2 \tag{3}$$

Die letzte Gleichung giebt die Sehweite:

$$a = \sqrt{\frac{2r}{1-k} h} \tag{4}$$

Nimmt man den Erdhalbmesser $r = 6\,370\,000^m$ und den Refraktions-Coëfficienten $k = 0{,}13$, so erhält man, für a und h in Metern:

$$a = 3826{,}7 \sqrt{h} \tag{5}$$

Damit ist folgendes berechnet:

Höhe h	*Sehweite a*	*Höhe h*	*Sehweite a*	*Höhe h*	*Sehweite a*
0^m	$0{,}0^{km}$	6^m	$9{,}4^{km}$	30^m	$21{,}0^{km}$
1	3,8	7	10,1	40	24,2
2	5,4	8	10,8	50	27,1
3	6,6	9	11,5	100	38,3
4	7,7	10	12,1	500	85,6
5	8,6	20	17,1	1000	121,0

Die Formel für die Kimmtiefe findet man, wenn man (2) und (3) subtrahiert, dieses giebt:

$$2\,h = a \; tang \; t$$

und dieses mit (4) zusammen genommen, zugleich mit $tang\; t = \frac{t}{\varrho}$, giebt:

$$t = 2\,\varrho \sqrt{\frac{1-k}{2\,r}} \sqrt{h} \qquad (6)$$

Setzt man wieder $r = 6\,370\,000^m$, und $k = 0{,}13$, so giebt die Formel (6):

$$t = 107{,}8'' \sqrt{h} \qquad (7)$$

Hiernach ist Folgendes berechnet:

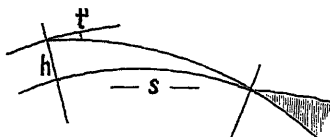
Höhe h	*Kimmtiefe t*	*Höhe h*	*Kimmtiefe t*	*Höhe h*	*Kimmtiefe t*	*Höhe h*	*Kimmtiefe t*
0^m	0′ 0″	5^m	4′ 1″	10^m	5′ 41″	50^m	12′ 42″
1	1′ 48″	6	4′ 24″	15	6′ 58″	60	13′ 55″
2	2′ 32″	7	4′ 45″	20	8′ 2″	70	15′ 2″
3	3′ 7″	8	5′ 5″	30	9′ 50″	80	16′ 4″
4	3′ 36″	9	5′ 23″	40	11′ 22″	90	17′ 3″
5	4′ 1″	10	5′ 41″			100	17′ 58″

Ausführlichere Tafeln dieser Art enthalten die nautischen Werke (z. B. *Domke,* nautische Tafeln, Berlin 1874, S. 73.)

Das Vorstehende gilt nur für die freie Kimm. Die Kimm vor einem Strande erscheint tiefer, sofern nicht etwa der Strand *hinter* der Kimm auftaucht, d. h. selbst schon weiter als die Sehweite für freies Meer entfernt ist.

Ist man genötigt, eine Kimm zu benutzen, welche sich nicht gegen den Himmel, sondern gegen Land abhebt, so wird man zuerst überlegen, ob man die Strandlinie wirklich sieht oder ob sie sich hinter der Kimm befindet, und hiezu dient die Formel (5) mit der zugehörigen Tabelle der Sehweite (S. 433).

Fig. 2.
Strandtiefe.

Den Tiefenwinkel t für eine Messung nach einem Strande in der Entfernung s bekommt man nach Andeutung von Fig. 2. ebenfalls aus der Grundgleichung (1), nämlich:

$$-h = s \; tang\,(-t') + \frac{1-k}{2\,r} s^2$$

$tang\,(-t') = -\frac{t'}{\varrho}$ gesetzt, giebt die Auflösung nach t':

$$t' = \frac{h}{s}\varrho + \frac{1-k}{2\,r}\varrho\, s \qquad \left(log \frac{1-k}{2\,r}\varrho = 8.14\,878\right) \qquad (8)$$

Beispielshalber berechnen wir hiernach für $h = 4^m$:

$s = 1^{km}$	$t = 13'\,59''$
2^{km}	$7'\,21''$
4^{km}	$4'\,23''$
6^{km}	$3'\,42''$
$7{,}7^{km}$	$3'\,36''$ (freie Kimm.)

Endlich kann man noch die Beobachtung der Kimmtiefe t von einem Punkte aus, dessen Höhe h bekannt ist, dazu benützen, um den Refraktions-Coëfficienten k zu bestimmen, denn die Gleichung (6) lässt sich so auflösen:

$$1 - k = \frac{r}{2h}\left(\frac{t}{\varrho}\right)^2 \qquad (9)$$

Man wird die Höhe h möglichst gross nehmen, also etwa von einem Berge in der Nähe des Meeres, dessen Höhe h man zuvor nivelliert hat, den Tiefenwinkel nach der See messen.

Solche Bestimmungen, überhaupt Ziel-Linien über das Meer geben im allgemeinen einen etwas grösseren Wert k als Beobachtungen über Land. (Über See etwa $k = 0{,}16$, über Land 0,13.) Dieses würde zur See einer schwächeren Temperatur-Abnahme nach oben entsprechen als zu Lande (vgl. § 128.—129.), was an sich wahrscheinlich ist.

§ 123. Hilfstafeln für trigonometrische Höhenmessung.

Ausser den kleinen Zahlen-Tabellen, welche bereits auf S. 433 und S. 434 mitgeteilt sind, haben wir für den praktischen Gebrauch eine Anzahl von grösseren Tafeln berechnet, und im Anhang auf S. [9] bis [12] zusammengestellt.

Zur Erklärung dieser Tafeln nehmen wir zuerst die einfache Grundformel (7) § 120. S. 427 wieder vor, nämlich:

$$h = a \tang \alpha + \frac{1-k}{2r} a^2 \qquad (1)$$

oder:

$$h = a \tang \alpha + \frac{a^2}{2r} - \frac{a^2 k}{2r} \qquad (2)$$

Fig. 1.
Erdkrümmung und Refraktion.

Dieser Gleichung entspricht die nebenstehende Fig. 1. Hier ist AE die krumme Erdoberfläche, AH die Horizontale, AB die krumme Lichtbahn und AB' die Tangente der Lichtbahn; folglich ist:

$$\text{Erdkrümmung} \quad EH = \frac{a^2}{2r}$$

$$\text{Refraktion} \quad BB' = \frac{a^2 k}{2r}$$

$$HB' = a \tang \alpha \text{ (genähert)}$$

folglich: $EB = h = HB' + EH - BB'$ entsprechend Gleichung (2).

Wir haben nun zuerst auf Seite [9] des Anhangs die beiden Teile $\frac{a^2}{2r}$ und $\frac{a^2 k}{2r}$ der Formel (2) und die Differenz $\frac{1-k}{2r} a^2$ in einer Tafel ausgerechnet und auch den Refraktionswinkel $\delta = \frac{a k}{2r} \varrho$ entsprechend Fig. 3. § 120. S. 426 beigegeben.

Wenn ein entfernter Punkt unter dem Höhenwinkel 0° erscheint, so liegt er *höher* als der Standpunkt, nämlich um den Betrag $\frac{1-k}{2r} a^2$, deswegen nennt man diesen Wert die „Horizont-Korrektion".

Die Zahlenwerte von Seite [9] sind abgerundet gegeben, weil es sich hier nur um Gewinnung einer Übersicht handelt. Diese Zahlenwerte, und namentlich die Refraktionswinkel δ, dienen zu Genauigkeits-Schätzungen; man sieht z. B. auf Seite [9], dass für eine Entfernung auf 30 Kilometern der Refraktionswinkel $= 1' \, 3''$ ist; wenn man also nach (11) § 120. S. 430 annimmt, dass die Refraktion um 25% unsicher ist, so hat man für 30^{km} rund $\pm 15''$ Unsicherheit des Höhenwinkels anzunehmen, u. s. w.

Schärfere Zahlenwerte sind auf Seite [10] und Seite [11] gegeben, wovon Anwendung im nächsten § 124. gezeigt werden soll.

Mit $k = 0{,}13$ und $\log r = 6.80489$ hat man zu Seite [9]—[11] folgende Zahlenwerte:

Korrektion für Erdkrümmung $\frac{a^2}{2r} = 0{,}078357 \left(\frac{a}{1000}\right)^2$, $\log \frac{1}{2r} = 2.89408-10$

Korrektion für Refraktion $\frac{a^2 k}{2r} = 0{,}010186 \left(\frac{a}{1000}\right)^2$, $\log \frac{k}{2r} = 2.00802-10$

Gesamt-Horizont-Korrektion $\frac{1-k}{2r} a^2 = 0{,}068171 \left(\frac{a}{1000}\right)^2$, $\log \frac{1-k}{2r} = 2.83360-10$

Refraktionswinkel $\delta = \frac{\varrho k}{2r} a = 2{,}1011'' \left(\frac{a}{1000}\right)^2$, $\log \frac{\varrho'' k}{2r} = 7.32245-10$

Endlich haben wir noch auf Seite [12] eine trigonometrische Höhentafel für ganz roh genäherte Bestimmungen mitgeteilt, welche zu manchen überschläglichen Schätzungen gebraucht werden kann.

Es sind dabei andere Werte r und k zu Grunde gelegt, als bei unseren übrigen Tafeln; es ist nämlich für Seite [12]:

$$r = 6\,365\,000 \quad \text{und} \quad k = 0{,}16;$$

und zwar beziehen sich diese Annahmen auf die libysche Wüste, für welche die fragliche Tafel zuerst bestimmt war. Bei der geringen Genauigkeit, von welcher hier überhaupt nur die Rede ist, ist dieses ziemlich gleichgültig.

Ein zweiter mittelbarer Gebrauch der fraglichen Tafel Seite [12] besteht darin, dass man damit aus gegebener Höhe h und gemessenem Höhenwinkel α rasch die Entfernung a bestimmen kann.

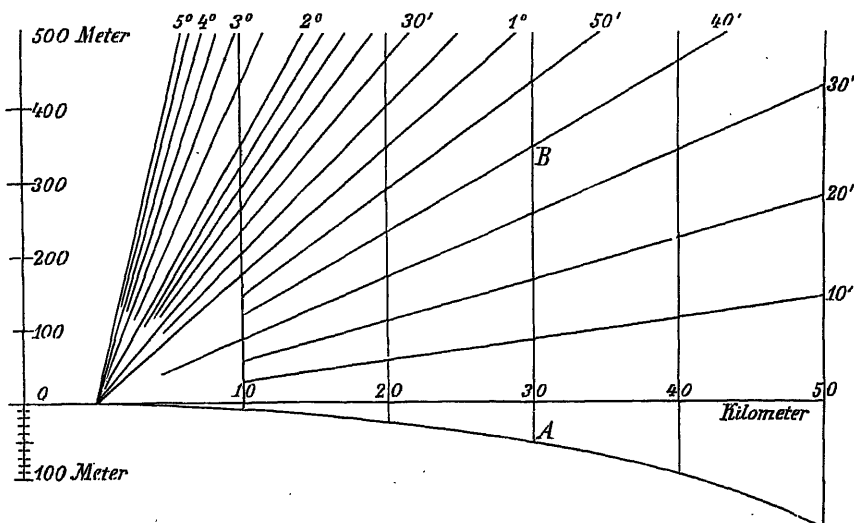
Natürlich sind solche Bestimmungen sehr unsicher, allein sie können wenigstens dazu dienen, bei flüchtigen Aufnahmen, z. B. auf Entdeckungsreisen, gemessene Höhenwinkel und die zugehörigen nur näherungsweise bekannten Entfernungen in Einklang zu bringen, und es kann eine grössere Zahl von Höhenwinkeln bei solchen flüchtigen Aufnahmen wesentlich bei der Situations-Konstruktion mitwirken.

Zur See ist diese Methode sehr gebräuchlich, man misst dabei vom Schiff aus, also in bekannter Höhe h über dem Meeresspiegel die Tiefenwinkel nach verschiedenen Punkten der Grenzlinie zwischen dem Wasserspiegel und der Küste.

Zu Lande ist die Methode weniger wertvoll, weil die Höhen h nicht ebenso wie zu Schiffe bekannt sind, doch lässt sich in der oben angedeuteten Weise diese Methode auch zu Lande verwerten.

In solchen Fällen kann man indessen auch rein *graphische* Bestimmungen anwenden; und wir haben hiezu ein Diagramm konstruiert, welches in seinen Hauptlinien durch Fig. 2. S. 437 veranschaulicht ist. Die geraden Linien entsprechen

hiebei den Werten $a \, tang \, \alpha$, und die unten beigefügte Kurve giebt noch die Korrektion $\frac{1-k}{2r} a^2$ für Erdkrümmung.

Fig. 2.
Diagramm für trigonometrische Höhen.
Horizontal-Massstab = 1 : 500 000. Höhen-Massstab 1 = 1 : 10 000.

Der Horizontal-Massstab von Fig. 2. ist 1 : 500 000, der Höhen-Massstab 1 : 10 000; man entnimmt daraus z. B., dass für die Distanz 30 Kilometer und den Höhenwinkel 0° 40′ die Höhe $AB = 410^m$ beträgt, in genügender Übereinstimmung mit der Tafel Seite [12] des Anhangs, welche 408^m giebt.

§ 124. Einseitige Höhen-Bestimmung mit mittlerer Refraktion.

Wir nehmen unsere einfache Grundformel (7) § 120. S. 427 nochmals vor:

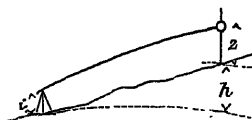
$$h = a \, tang \, \alpha + \frac{1-k}{2r} a^2 \tag{1}$$

Damit bekommt man den Höhen-Unterschied zwischen der Fernrohrmitte diesseits, und dem Zielpunkt jenseits.

Fig. 1.
Instrumentenhöhe = i.
Zielhöhe = z.

z
h
i

In vielen Fällen hat man eine Instrumentenhöhe i und eine Zielpunktshöhe z zu berücksichtigen; wenn nach Fig. 1. die Fernrohrmitte die Höhe i über dem eigentlichen Fixpunkte, z. B. über einem trigonometrischen Signalstein hat, und wenn der Zielpunkt die Höhe z über dem jenseitigen Fixpunkte hat, so kommt zu der Formel (1) noch die Reduktion $i - z$ hinzu, und man hat dann nach Fig. 1.:

$$h = a \, tang \, \alpha + \frac{1-k}{2r} a^2 + i - z \tag{2}$$

Wenn hier α, i und z mit algebraischen Vorzeichen richtig behandelt werden ($+\alpha$ für Höhenwinkel, $-\alpha$ für Tiefenwinkel u. s. w.), so bekommt man auch h immer von selbst richtig, nämlich h positiv, wenn der jenseitige Punkt über dem diesseitigen Punkte ist, u. s. w.

Die Entfernung a soll trigonometrisch bestimmt sein; vielleicht kann man $\log a$ geradezu aus den Triangulierungs-Berechnungen entnehmen, in anderen Fällen muss man es aus den Coordinaten berechnen. Wir wollen für letzteres ein Beispiel hersetzen:

Es handelt sich um eine Höhenmessung von Karlsruhe, Polytechnikum, nach der Durlacher Warte; folgendes sind die gegebenen Coordinaten und die darauf gegründete (nach S. 192 zu führende) Entfernungs-Berechnung:

	y	x
Karlsruhe, Polytechnikum, Pfeiler . .	+ 3508,36	+ 53046,50
Durlacher Warte, Signalkugel . . .	— 1892,36	+ 54452,14
Differenzen	+ 5400,72	— 1405,64

$\log$ 5400,72	3.732 452	$\log a = 3.746\,690$ $\quad a = 5580{,}71^m$
	0.014 238	
$\log$ 1405,64	3.147 874	
	0.584 578	

Nun habe man mit einem Theodolit, der auf dem Pfeiler des Polytechnikums stand, nach der Signalkugel den Höhenwinkel gemessen:

$$\alpha = +1^\circ\, 26'\, 18''$$

damit wird berechnet:

$\log a$	3.746 690
$\log tang\, \alpha$	8.399 828
$\log a\, tang\, \alpha$	2.146 518

$a\, tang\, \alpha = +140{,}13^m$

Hiezu nimmt man aus der Hilfstafel S. [10] des Anhangs, mit $a = 5580$ den Wert $\frac{1-k}{2r}a^2 = 2{,}12^m$, oder wenn man statt a selbst, den $\log a$ näher zur Verfügung hat, nimmt man aus der Hilfstafel S. [11], mit $\log a = 3.747$, den Wert $2{,}13^m$, hinreichend übereinstimmend mit dem ersteren; wir haben also nun:

$$\begin{aligned} a\, tang\, \alpha &= +140{,}13^m \\ \frac{1-k}{2r}a^2 &= +\quad 2{,}12 \\ \hline & \quad\; 142{,}25^m \end{aligned}$$

Nun kommen noch die Reduktionen i und z; es ist in unserem Falle $i = 0{,}27^m$ die Höhe des Theodolit-Fernrohrs über dem Pfeiler des Polytechnikums, und $z = 2{,}11^m$ die Höhe der Signalkugel über dem Pfeiler auf der Durlacher Warte, man erhält also die von Pfeiler zu Pfeiler gerechnete Höhe h im ganzen so:

$$\begin{aligned} a\, tang\, \alpha &= +140{,}13^m \\ \frac{1-k}{2r}a^2 &= +\quad 2{,}12 \\ \hline & +142{,}25 \\ i = 0{,}27^m \quad z = 2{,}11^m \quad \text{giebt } i - z &= -\quad 1{,}84 \\ \hline h &= +140{,}41^m \end{aligned} \qquad (3)$$

d. h. die Oberfläche des Pfeilers auf der Durlacher Warte liegt um $140{,}41^m$ höher als die Oberfläche des Pfeilers auf dem Karlsruher Polytechnikum.

Wenn in dem vorstehenden Beispiele der Höhenwinkel α negativ wäre und alles andere wie zuvor, so würde man folgende Rechnung haben:

$$\alpha = -1^\circ 26' 18'' \qquad a \, tang \, \alpha = -140{,}13^m$$

$$\frac{1-k}{2r} a^2 = + \quad 2{,}12$$

$$\overline{\qquad - 138{,}01}$$

$$i = 0{,}27^m \qquad z = 2{,}11^m \quad \text{giebt } i - z = - \quad 1{,}84$$

$$\overline{h = -139{,}85^m}$$

Der jenseitige Punkt wäre $139{,}85^m$ tiefer als der diesseitige Punkt.

Genauigkeit.

Um zu überlegen, welche Genauigkeit eine Höhen-Bestimmung von der Art der vorhergehenden haben mag, hat man drei Fehlerquellen zu betrachten:

1) Fehler der Entfernung a.
2) Fehler des Höhenwinkels α.
3) Fehler der Refraktion k.

Die entsprechenden Höhenfehler wollen wir mit dh_a, dh_α und dh_k bezeichnen, und dann ist zunächst nach (1):

$$dh_a = d\,a \, tang \, \alpha + 2\,a\,d\,\alpha \, \frac{1-k}{2r} \tag{4}$$

Hier ist das zweite Glied wohl immer verschwindend klein, und wenn man es mit *trigonometrisch* bestimmten Entfernungen a zu thun hat, so ist der Fehler $d\,a$ auch fast immer so klein (jedenfalls kleiner als 1^m), dass auch das erste Glied von (3) so gut wie unschädlich bleibt, denn die Höhenwinkel α selbst sind im freien Lande auch immer klein, und auch bei Gebirgs-Aufnahmen selten 10°. (Bekanntlich werden die Höhenwinkel nach Augenmass vom Unerfahrenen stark überschätzt.)

Wenn wir hiernach den Entfernungsfehler $d\,a$ bei trigonometrisch bestimmten Entfernungen im allgemeinen als unschädlich für die Höhen-Bestimmungen ansehen können, so führt diese Überlegung umgekehrt dazu, dass auch ziemlich mangelhafte Entfernungen immer noch, wenn nicht zu sehr guten, so doch zu brauchbaren Höhen-Bestimmungen benützt werden können.

Aus eigener Erfahrung können wir die württembergische trigonometrische Höhen-Aufnahme auf Grundlage der lithographierten Flurkarten in 1 : 2500 anführen.

Jeder Flurkartenpunkt, z. B. Markstein, konnte als Standpunkt genommen werden; die Coordinaten solcher Standpunkte wurden von uns nach dem Verfahren abgemessen, das früher in § 18. S. 49, Fig. 3. beschrieben ist; und die so abgemessenen Coordinaten mit anderen geradezu trigonometrisch bestimmten Coordinaten (z. B. von Kirchtürmen u. s. w.), sowie auch unter sich, zu Entfernungs-Berechnungen verbunden.

Schätzt man den mittleren Fehler der aus den Messtisch-Aufnahmen in 1 : 2500 abgemessenen Coordinaten zu $1 - 2^m$, so findet man bei der Kleinheit der Höhenwinkel (fast immer unter 5°), dass keine erheblichen Höhenfehler hieraus entstehen, wie auch der Erfolg bestätigt hat.

Man kann sogar noch viel weniger genaue Entfernungen, z. B. Abmessungen aus *topographischen* Karten in 1 : 25000, oft mit Vorteil zu trigonometrischen Höhen benützen, wenn man nur *kleine* Höhenwinkel hat, oder überhaupt, wenn man die aufzuwendenden Mittel mit dem zu erreichenden Zweck in richtige Beziehung bringt.

Um die zweite Fehlerquelle, die Ungenauigkeit der Höhenwinkel-Messung, zu beurteilen, hat man das Hauptglied $a \tan g\, \alpha$ der Formel (1) nach α zu differentiieren. Dieses giebt:

$$dh_\alpha = \frac{a\, d\alpha}{\cos^2 \alpha} \tag{5}$$

Wegen der Kleinheit von α wird man aber den Nenner $\cos^2 \alpha = 1$ setzen dürfen, und damit wird hinreichend genau:

$$dh_\alpha = a\, d\alpha \quad \text{oder} \quad = a \frac{d\alpha''}{\varrho''} \tag{6}$$

wenn $d\alpha''$ ein Winkelfehler in Sekunden ist.

Wenn wir bei unserem vorstehenden Beispiele Karlsruhe—Durlach den Höhenwinkel α etwa mit einem mittleren Fehler $d\alpha = \pm 5''$ gemessen haben, so giebt das bei einer Entfernung $a = 5581^m$ einen Fehler:

$$dh_\alpha = 5581^m \frac{5}{206\,265} = \pm 0{,}14^m \tag{7}$$

Solche Fehlerschätzungen können jederzeit ebenso wie bei trigonometrischen Lage-Messungen gemacht werden.

Zur dritten Fehlerquelle der Refraktion übergehend, halten wir uns an die früher bei (11) § 120. gemachte Annahme, dass der mittlere Fehler der Refraktion gleich einem Viertel der Refraktion selbst ist.

Nun ist nach der Hilfstafel Seite [9] des Anhangs bei $5{,}6^{km}$ Entfernung der Refraktionswert:

$$\frac{a^2 k}{2r} \text{ rund } = 0{,}3^m, \quad \text{also} \quad dh_k = \frac{1}{4} \frac{a^2 k}{2r} \text{ rund } = 0{,}1^m \tag{8}$$

und diese runde Schätzung mag hier genügen.

Dann hat man nach (7) und (8) zusammen:

$$dh_{\alpha, k} = \sqrt{0{,}14^2 + 0{,}10^2} = \pm 0{,}17^m$$

Dieses wäre der mittlere Fehler des oben bei (3) berechneten Höhen-Unterschiedes $140{,}41^m$, und man wird hiernach schreiben:

$$h = 140{,}41 \pm 0{,}17^m \tag{9}$$

Diese Fehlerschätzung kann auch zu einer Vergleichung mit einer Nivellierung führen: Hätte man jene Entfernung von $5{,}6^{km}$ nivelliert, oder mit unvermeidlichen Umwegen, statt dessen, etwa 9^{km}, und nimmt man einen mittleren Nivellierungsfehler von $\pm 5^{mm}$ für 1^{km} an, so wird:

$$\text{Mittlerer Nivellierungsfehler} = 5^{mm} \sqrt{9} = 15^{mm} \tag{10}$$

Dieser Wert (10) ist nur etwa der zehnte Teil des trigonometrischen Höhenfehlers (9). Aber andererseits ist dieser Genauigkeits-Vergleichung eine Arbeits-Vergleichung gegenüber zu stellen: Die Messung des Höhenwinkels, einschliesslich der Höhenberechnung ist eine Arbeit von höchstens einer Stunde, die Nivellierung wäre mindestens eine Tages-Arbeit.

§ 125. Höhenmessung aus einem Zwischenpunkte.

Wenn von *einem* Standpunkte die Höhen h und h' zweier Zielpunkte bestimmt werden, so ist der Höhen-Unterschied der letzteren $= h - h'$. Wenn nun beide Messungen nahezu *gleichzeitig* gemacht wurden, so ist es gerechtfertigt, anzunehmen, dass der Refraktions-Coëfficient bei beiden Messungen derselbe war, dass also in dem Höhen-Unterschied $h - h'$ nur die *Differenz* der beiden Refraktionsfehler eingeht. Es lässt sich das schon daraus schliessen, dass alle die Refraktion hauptsächlich beeinflussenden Umstände, nämlich Temperatur und Druck der Luft, für beide Messungen dieselben sind, wir werden aber in der Theorie der Strahlenbrechung (§ 128.) diese Annahme noch näher begründet finden, namentlich weil der Wert k von dem Höhenwinkel selbst (z. B. ob der Höhenwinkel positiv oder negativ ist) nahezu unabhängig ist.

Wir betrachten zuerst eine einfache Messung, und haben hiefür die Formel:

$$h_1 = a_1 \, tang \, \alpha_1 + \frac{a_1^2}{2r} - \frac{a_1^2 k}{2r}$$

Nach den Betrachtungen des vorigen § 124. findet sich der mittlere Fehler Δh_1 als Funktion des mittleren Fehlers $\Delta \alpha_1$ von α_1 und des mittleren Fehlers Δk von k, (indem der Fehler von a vernachlässigt, und α_1 als sehr klein behandelt wird):

$$\Delta h_1 = \sqrt{(a_1 \Delta \alpha_1)^2 + \left(\frac{a_1^2 \Delta k}{2r}\right)^2} \tag{1}$$

Für eine zweite Messung h_2 gilt eine ähnliche Formel, und unter Voraussetzung *gleicher* Refraktionsfehler Δk erhält man für den Höhen-Unterschied $h_1 - h_2$ folgenden mittleren Fehler:

$$m = \sqrt{(a_1 \Delta \alpha_1)^2 + (a_2 \Delta \alpha_2)^2 + \left(\frac{(a_1^2 - a_2^2) \Delta k}{2r}\right)^2} \tag{2}$$

Man kann also unter dieser Voraussetzung sich von dem Refraktionsfehler teilweise unabhängig machen, wenn man sich so aufstellt, dass die zwei Punkte, deren Höhen-Unterschied man bestimmen will, möglichst gleich weit entfernt sind, und es wird durch solche Höhenmessung aus einem Zwischenpunkte die Genauigkeit der Resultate wesentlich erhöht.

Wir nehmen beispielsweise an, dass der mittlere Fehler beider Höhenwinkel $\Delta \alpha_1 = \Delta \alpha_2 = \pm 5''$ sei, und wenn $\Delta k = {}^1/_4 k = 0{,}0325$ genommen wird, so giebt die Gleichung (2), mit $log\, r = 6.80489$, folgendes:

$$m = \sqrt{0{,}0005876\,(a_1^2 + a_2^2) + 0{,}000006485\,(a_1^2 - a_2^2)^2} \tag{3}$$

wobei m in Metern, dagegen a_1 und a_2 in Kilometern genommen ist.

Es wurde hiemit folgende Tafel für m berechnet:

Mittlerer Fehler der trigonometrischen Höhenmessung aus einem Zwischenpunkte, für den mittleren Winkelfehler $\Delta\alpha = \pm 5''$.

a_1 oder a_2	0^{km}	1^{km}	2^{km}	3^{km}	4^{km}	5^{km}	6^{km}	7^{km}	8^{km}	9^{km}	10^{km}	12^{km}
	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
0^{km}	0,00	0,02	0,05	0,08	0,11	0,14	0,17	0,21	0,25	0,30	0,35	0,47
1^{km}	0,02	0,03	0,05	0,08	0,11	0,14	0,17	0,21	0,25	0,30	0,35	0,47
2^{km}	0,05	0,05	0,07	0,09	0,11	0,14	0,17	0,21	0,25	0,30	0,35	0,46
3^{km}	0,08	0,08	0,09	0,10	0,12	0,15	0,18	0,21	0,25	0,29	0,34	0,46
4^{km}	0,11	0,11	0,11	0,12	0,14	0,16	0,18	0,21	0,25	0,29	0,34	0,45
5^{km}	0,14	0,14	0,14	0,15	0,16	0,17	0,19	0,22	0,25	0,29	0,33	0,44
6^{km}	0,17	0,17	0,17	0,18	0,18	0,19	0,21	0,23	0,25	0,29	0,33	0,42
7^{km}	0,21	0,21	0,21	0,21	0,21	0,22	0,23	0,24	0,26	0,29	0,32	0,41
8^{km}	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,26	0,27	0,30	0,32	0,40
9^{km}	0,30	0,30	0,30	0,29	0,29	0,29	0,29	0,29	0,30	0,31	0,33	0,40
10^{km}	0,35	0,35	0,35	0,34	0,34	0,33	0,33	0,32	0,32	0,33	0,34	0,39
12^{km}	0,47	0,47	0,46	0,46	0,45	0,44	0,42	0,41	0,40	0,40	0,39	0,41

Man sieht hieraus z. B., dass zwei Punkte in der Entfernung von 12^{km} durch *eine* Messung, d. h. mit $a_1 = 12^{km}$ und $a_2 = 0^{km}$, in Hinsicht auf ihren Höhen-Unterschied mit einem mittleren Fehler von $0{,}47^m$ bestimmt werden; dagegen von einem Zwischenpunkte aus, mit *zwei* Messungen auf $a_1 = 6^{km}$ und $a_2 = 6^{km}$, mit einem mittleren Fehler von nur $0{,}21^m$.

Besser noch überblickt man diese eigentümlichen Genauigkeits-Verhältnisse, wenn man zu der vorstehenden Zahlen-Tabelle eine graphische *Schichtentafel* konstruiert.

Eine solche Höhenmessung aus der Mitte, oder wenigstens aus einem Zwischenpunkte, bietet sich von selbst dar, wenn man, als Hauptpunkte, die trigonometrisch nach Coordinaten bestimmten *Kirchtürme* nimmt, welche von Bodenpunkten aus angezielt werden.

Einen solchen Fall hatten wir bei der württembergischen trigonometrischen Höhen-Aufnahme, die bereits im vorigen § 124. S. 439 zum Teil beschrieben wurde.

Höhen-Diagonalen.

Bei jenen württembergischen Aufnahmen begannen wir die Ausgleichung mit der Zusammenfassung von möglichst vielen Höhenmessungen, welche sich auf dieselben zwei Zielpunkte bezogen, und nannten den ausgeglichenen Höhen-Unterschied solcher zweier Hauptpunkte eine *Höhen-Diagonale.*

Wenn zwei Punkte von verschiedenen Standpunkten angezielt werden, so liefert jeder Standpunkt einen Wert $h_1 - h_2 = h$, und das Gewicht einer solchen Bestimmung ist:

$$p = \frac{1}{m^2} \qquad (4)$$

wobei m nach der Gleichung (3) zu bestimmen ist.

Hat man mehrere solcher Bestimmungen, so erfolgt die Ausgleichung durch Mittelbildung mit den Gewichten.

Wir geben im Folgenden ein Beispiel hiefür, welches einer Aufnahme des Verfassers vom Jahr 1867 entnommen ist (Atlasblatt Blaubeuren). Es wurde der Höhen-Unterschied zwischen dem Hauptdreieckspunkt *Heroldstatt* und dem 7 Kilometer davon entfernten Kirchturmknopf von *Justingen* bestimmt durch Messen eines Winkels auf Heroldstatt selbst, und von 14 Winkeln auf 7 anderen Standpunkten.

Standpunkt	Entfernungen		Höhen-Unterschiede		$h_1 - h_2 = h$	Mittlerer Fehler m
	a_1	a_2	h_1	h_2		
	km	km	m	m	m	m
(186) Heroldstatt	0,0	6,9	0,00	− 62,77	+ 62,77	± 0,21
(218) Maisenloch	3,0	10,0	+ 56,43	− 6,09	+ 62,52	± 0,34
(397) Biss	12,0	9,0	+ 76,36	+ 14,06	+ 62,30	± 0,40
(405) Kohlberg	4,7	3,4	+ 60,68	− 2,24	+ 62,92	± 0,15
(406) Mittelsberg	3,8	3,4	+ 57,68	− 4,96	+ 62,64	± 0,12
(408) Schwende	2,6	4,9	+ 56,96	− 5,65	+ 62,61	± 0,14
(410) Wagnerbaum	10,8	5,1	+106,80	+ 44,39	+ 62,41	± 0,37
(412) Langrain	10,4	3,7	+ 96,33	+ 33,77	+ 62,56	± 0,36

Die hier in der letzten Spalte eingesetzten mittleren Fehler $\pm m$ sind nach der Formel (3) berechnet, oder aus der zu der Formel (3) gehörigen Hilfstafel eingesetzt. Nun bekommt man nach dem Grundsatz des arithmetischen Mittels für ungleich gewichtige Messungen (Band I. § 8.) folgende Mittelbildung, wobei man zur Ausrechnung der Werte p sich des Hilfstäfelchens im Anhange von Band I. Seite [7] bedienen kann:

Num.	m	$p = \frac{1}{m^2}$	$h - 62,00 = l$	$p\,l$	$0,68 - l = v$	v^2	$p\,v^2$
1.	± 0,21^m	23	0,77^m	17,7	− 0,09^m	0,0081	0,19
2.	± 0,34	9	0,52	4,7	+ 0,16	0,0256	0,23
3.	± 0,40	6	0,30	1,8	+ 0,38	0,1444	0,87
4.	± 0,15	44	0,92	40,5	− 0,24	0,0576	2,53
5.	± 0,12	69	0,64	44,2	+ 0,04	0,0016	0,41
6.	± 0,14	51	0,61	31,1	+ 0,07	0,0049	0,25
7.	± 0,37	7	0,41	2,9	+ 0,27	0,0729	0,51
8.	± 0,36	8	0,56	4,5	+ 0,12	0,0144	0,12
		217		147,4			5,11

$$x = \frac{147,4}{217} = 0,68 \qquad M = \sqrt{\frac{5,11}{7 \times 217}} = \pm 0,058^m \tag{5}$$

Man hat also den wahrscheinlichsten Wert $x = 0,68$ mit dem mittleren Fehler $\pm 0,058^m$ oder:

$$h = 62,00 + x = 62,68^m \pm 0,06^m \tag{6}$$

So werden wir diesen Höhen-Unterschied in die Netz-Ausgleichung im folgenden § 126. einführen.

Anmerkungen.

Die Fehlerverteilung in der vorstehenden Ausgleichung ist nicht sehr befriedigend, indem von den 8 Werten v nur 2 negativ, alle anderen positiv sind. Indessen zeigt eine andere Prüfung guten Erfolg, nämlich die Berechnung der mittleren Fehler der Einzelbestimmungen *nach* der Ausgleichung.

Der mittlere Fehler einer Bestimmung vom Gewichte $= 1$ ist nach (5):

$$m_1 = \sqrt{\frac{5{,}11}{7}} = \pm 0{,}854.$$

Damit wird berechnet und verglichen:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
$\frac{m_1}{\sqrt{p}} =$	$0{,}18^m$	$0{,}28^m$	$0{,}35^m$	$0{,}13^m$	$0{,}10^m$	$0{,}12^m$	$0{,}32^m$	$0{,}38^m$
(s. o.) $m =$	0,21	0,34	0,40	0,15	0,12	0,14	0,37	0,36

Diese mittleren Fehler *nach* und *vor* der Ausgleichung sind hinreichend einander gleich, und geben Befriedigung in Hinsicht auf die zu Grunde gelegten Annahmen $\Delta\alpha = \pm 5''$ und $\Delta k = \pm 0{,}25 k$.

Wir haben jedoch das Beispiel auch noch mit einer *anderen* Annahme $\Delta\alpha = \pm 10''$ für den mittleren Fehler eines Höhenwinkels, und mit Beibehaltung von $\Delta k = \pm 0{,}25 k$ durchgerechnet; das Resultat blieb aber innerhalb $0{,}01^m$ das frühere, nämlich:

$$h = 62{,}667^m \pm 0{,}061^m$$

In sachlicher Beziehung kann noch bemerkt werden, dass die Höhenwinkel-Messungen mit einem Theodolit von ähnlicher Art, wie etwa Fig. 2. S. 142, mit Nonien-Ablesung von 20″, gemacht sind.

§ 126. Ausgleichung eines Höhen-Netzes nach vermittelnden Beobachtungen.

Wenn man die Höhen-Diagonalen h zwischen mehreren Punkten, nebst ihren mittleren Fehlern in der soeben beschriebenen Weise berechnet hat, so liegt die Aufgabe vor, das durch diese Höhen-Diagonalen gebildete Netz auszugleichen, sofern die Anzahl der Höhen-Unterschiede das unmittelbare Bedürfnis übersteigt. Man kann die Werte h als unmittelbare Beobachtungen mit den Gewichten, welche ihren mittleren Fehlern entsprechen, einführen.

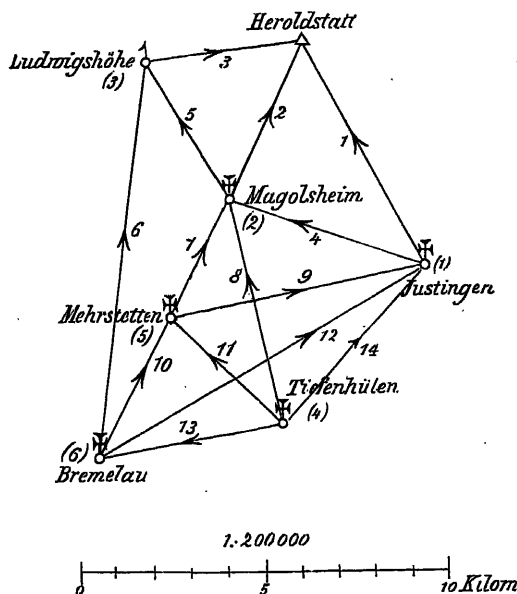
Die Ausgleichungsmethoden für ein solches Netz sind im wesentlichen dieselben, wie bei einem Nivellierungsnetz, worüber die nötigen allgemeinen Auseinandersetzungen schon in § 116. S. 409—410 gemacht sind. Wir behandeln hier ein kleines Netz (Teil einer grösseren Aufnahme des Verfassers von 1867, Atlasblatt Blaubeuren) nach der Methode der vermittelnden Beobachtungen.

Eine Übersicht der Messungen ist in der nachstehenden Fig. 1. S. 445 enthalten, worin die Pfeile die Richtung des Steigens angeben.

Durch Mittelbildungen, ganz entsprechend dem im vorigen § 125. bei (4)—(6) S. 442 und 443 behandelten Beispiele, wurden die in der folgenden Tabelle aufgeführten Höhenwerte h und mittleren Fehler m erhalten:

Num.	N.*)	Diagonale	Höhe h	Mittlerer Fehler m	Gewicht $p = \left(\frac{1}{10\,m}\right)^2$
1.	45	Justingen—Heroldstatt	62,68^m	± 0,06^m	2,8
2.	33	Magolsheim—Heroldstatt	50,05	± 0,06	2,8
3.	26	Ludwigshöhe—Heroldstatt	29,74	± 0,15	0,4
4.	34	Justingen—Magolsheim	12,76	± 0,06	2,8
5.	27	Magolsheim—Ludwigshöhe	19,93	± 0,08	1,5
6.	22	Bremelau—Ludwigshöhe	42,97	± 0,08	1,6
7.	36	Mehrstetten—Magolsheim	12,55	± 0,10	1,0
8.	35	Tiefenhülen—Magolsheim	28,85	± 0,13	0,6
9.	37	Mehrstetten—Justingen	0,08	± 0,05	4,0
10.	23	Bremelau—Mehrstetten	9,96	± 0,15	0,4
11.	38	Tiefenhülen—Mehrstetten	16,15	± 0,10	1,0
12.	24	Bremelau-Justingen	10,41	± 0,08	1,6
13.	25	Tiefenhülen—Bremelau	6,03	± 0,05	4,0
14.	46	Tiefenhülen—Justingen	16,25	± 0,03	11,1

(1)

Fig. 1.
Ausgleichung eines trigonometrischen Höhen-Netzes.
(Württemb. Atlasblatt Blaubeuren.)

*) Siehe „Württembergische Jahrbücher für Statistik und Landeskunde 1870“, S. LII und LIII, woselbst die obigen Werte unter den Ordnungsnummern N. veröffentlicht sind, jedoch nicht wie hier in Metermass, sondern in Württembergischem Fussmass (1 Fuss = 0,2864226^m).

Da das Netz 7 Punkte hat, ist es durch 6 unabhängige Höhen-Unterschiede vollständig bestimmt; man kann solche 6 unabhängige Höhen-Unterschiede verschieden auswählen; in unserem Falle wollen wir alles auf den Hauptpunkt *Heroldstatt* beziehen, indem wir dessen Höhe als unabänderlich gegeben betrachten.

Man kann diese Ausgangshöhe = Null setzen, oder irgend welchen anderen Wert dafür annehmen. Da wir nachher doch alle Höhen über dem Meer, oder über Normal-Null, anzugeben haben, rechnen wir sogleich in dieser Form, und haben nach neuester Mitteilung des statistischen Landes-Amtes, die Höhe von Heroldstatt = 848,62^m über Normal-Null.

Die Höhen der anderen Punkte aus den mitgeteilten Höhen-Unterschieden *näherungs*weise (also ziemlich willkürlich, ohne Ausgleichung) zusammengesetzt, sind:

Punkt	*Höhe über N. N.*		
Heroldstatt . . .	848,62^m	fest gegeben	(2)
(1) Justingen . . .	785,94	mit Verbesserung x_1	
(2) Magolsheim . . .	798,57	„ „ x_2	
(3) Ludwigshöhe . .	818,88	„ „ x_3	
(4) Tiefenhülen . . .	769,72	„ „ x_4	
(5) Mehrstetten . . .	786,02	„ „ x_5	
(6) Bremelau	776,06	„ „ x_6	

Die hier eingeführten Verbesserungen x_1 , x_2 . . . x_6 sollen durch die Ausgleichung bestimmt werden.

Von anderer Art als diese 6 Verbesserungen x_1 , x_2 . . . x_6 sind die 14 Verbesserungen v_1 , v_2 . . . v_{14}, welche an den *beobachteten* Höhen-Unterschieden h der der Tabelle (1) S. 445 angebracht werden müssen.

Wir haben die 14 Werte v in den 6 Werten x auszudrücken, d. h. die 14 Fehler-Gleichungen für die 14 Beobachtungswerte h aufzustellen.

Wir nehmen beispielshalber den letzten Wert $h_{14} = 16{,}25^m$ vor, und vergleichen ihn (nach dem Anblick der Fig. 1. S. 445) mit den genäherten Höhen der beiden zugehörigen Punkte:

$$\begin{array}{lrl}
\text{(1) Justingen} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . & \text{Höhe} = & 785{,}94^m + x_1 \\
\text{(2) Tiefenhülen} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . & „ \quad = & 769{,}72^m + x_4 \\ \hline
& \text{Höhen-Unterschied} & 16{,}22^m + x_1 - x_4 \\
& \text{Beobachtungswert } h_{14} = & 16{,}25^m \\ \hline
& \text{Differenz} & -0{,}03^m + x_1 - x_4 = v_{14}
\end{array} \qquad (3)$$

Dieses ist die letzte Fehlergleichung.

Als weiteres Beispiel wollen wir auch die erste Fehlergleichung ausführlich bilden:

$$\begin{array}{lrl}
\text{Heroldstatt} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . & \text{Höhe} = & 848{,}62^m + 0 \\
\text{Justingen} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . & „ \quad = & 785{,}94^m + x_1 \\ \hline
& \text{Höhen-Unterschied} & 62{,}68^m - x_1 \\
& \text{Beobachtungswert } h_1 = & 62{,}68^m \\ \hline
& \text{Differenz} & 0{,}00^m - x_1 = v_1
\end{array} \qquad (4)$$

Diese Fehlergleichung ist aus zwei Gründen sehr einfach: Erstens kommt nur *eine* Unbekannte x_1 darin vor, weil die fragliche Linie h_1 mit dem Ausgangspunkt

Heroldstatt selbst verbunden ist, und zweitens wurde das Absolutglied = 0,00, weil die betreffende Beobachtung zu dem Näherungswert von Justingen benützt wurde.

Wenn man nun, ebenso wie (3) und (4), auch alle anderen Fehlergleichungen aufstellt, und die Form zu Grunde legt:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots + l_1 \\ v_2 = a_2 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + \ldots + l_2 \end{array}\right\} \quad (5)$$

so bekommt man folgende Tabelle der Coëfficienten:

Num.	p	a x_1	b x_2	c x_3	d x_4	e x_5	f x_6	l
1.	2,8	−1	..	..	..	..	..	0,0^{dm}
2.	2,8	..	−1	..	..	..	..	0,0
3.	0,4	..	..	−1	..	..	..	0,0
4.	2,8	−1	+1	..	..	..	..	−1,3
5.	1,5	..	−1	+1	..	..	..	+3,8
6.	1,6	..	..	+1	..	..	−1	−1,5
7.	1,0	..	+1	..	..	−1	..	0,0
8.	0,6	..	+1	..	−1	..	..	0,0
9.	4,0	+1	..	..	..	−1	..	−1,6
10.	0,4	..	..	..	..	+1	−1	0,0
11.	1,0	..	..	..	−1	+1	..	+1,5
12.	1,6	+1	..	..	..	..	−1	−5,3
13.	4,0	..	..	..	−1	..	+1	+3,1
14.	11,1	+1	..	..	−1	..	..	−0,3

(6)

Es folgt die Bildung der Coëfficienten der Normalgleichungen, z. B.:

$$[paa] = \quad 2{,}8 + 2{,}8 + 4{,}0 + 1{,}6 + 11{,}1 = +22{,}3$$
$$[pab] = -2{,}8 \ldots \text{u. s. w.}$$
$$[pal] = +2{,}8 \times 1{,}3 - 4{,}0 \times 1{,}6 - 1{,}6 \times 5{,}3 - 11{,}1 \times 0{,}3 = -14{,}57$$

Das ganze System der Normalgleichungen ist:

$$\begin{array}{l} +22{,}3\,x_1 - 2{,}8\,x_2 \quad .. \quad -11{,}1\,x_4 - 4{,}0\,x_5 - 1{,}6\,x_6 - 14{,}57^{dm} = 0 \\ \qquad +8{,}7\,x_2 - 1{,}5\,x_3 - 0{,}6\,x_4 - 1{,}0\,x_5 \quad .. \quad - 9{,}34 = 0 \\ \qquad\qquad +3{,}5\,x_3 \quad .. \quad .. \quad -1{,}6\,x_6 + 3{,}30 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad +16{,}7\,x_4 - 1{,}0\,x_5 - 4{,}0\,x_6 - 10{,}57 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +6{,}4\,x_5 - 0{,}4\,x_6 + 7{,}90 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +7{,}6\,x_6 + 23{,}28 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +126{,}87 \end{array}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen giebt:

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 = -0{,}03^{dm} & p_1 = 4{,}81 \\ x_2 = +0{,}43 & p_2 = 4{,}83 \\ x_3 = -2{,}53 & p_3 = 2{,}23 \\ x_4 = -0{,}43 & p_4 = 3{,}77 \\ x_5 = -1{,}52 & p_5 = 2{,}91 \\ x_6 = -3{,}90 & p_6 = 2{,}89 \qquad [pll.b] = 16{,}84 \end{array}\right\} \quad (7)$$

Die hier mitberechneten Gewichte p_1 , p_2 . . . p_6 braucht man zu der Ausgleichung selbst nicht. Die Verbesserungen x_1 ,x_2 . . . x_6 setzt man zu den oben bei (2) S. 446 angenommenen Näherungswerten, und bekommt damit:

	Ausgeglichene Höhen über N. N.	
[0] Heroldstatt	848,620^m Ausgangspunkt	
[1] Justingen	785,937	
[2] Magolsheim . . .	798,613	
[3] Ludwigshöhe . . .	818,627	(8)
[4] Tiefenhülen . . .	769,677	
[5] Mehrstetten . . .	785,868	
[6] Bremelau	775,670	

Damit ist die Ausgleichung vollendet, aber wir wollen noch teils zur Probe, teils zur Genauigkeits-Untersuchung noch einiges hiezu berechnen.

Zuerst sind die einzelnen v auszurechnen, z. B. v_{14}:

[1] Justingen	785,937^m
[4] Tiefenhülen	769,677
	16,260
beobachtet h_{14} =	16,250

$$v_{14} = +0{,}010^m \text{ oder } = +0{,}10^{dm}$$

Dasselbe bekommt man auch aus (3) und (7). Alle v zusammen sind:

$$\left.\begin{array}{lll} v_1 = +0{,}03^{dm} & v_6 = -0{,}13^{dm} & v_{11} = +0{,}41^{dm} \\ v_2 = -0{,}43 & v_7 = +1{,}95 & v_{12} = -1{,}43 \\ v_3 = +2{,}53 & v_8 = +0{,}86 & v_{13} = -0{,}37 \\ v_4 = -0{,}84 & v_9 = -0{,}11 & v_{14} = +0{,}10 \\ v_5 = +0{,}84 & v_{10} = +2{,}38 & \end{array}\right\} \quad (9)$$

Nimmt man hiezu die Gewichte p von der Tabelle (1) S. 445 und rechnet einzeln aus: $p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \ldots$, so erhält man die Summe:

$$[p\,v\,v] = 16{,}78$$

Dieses stimmt hinreichend mit $[p\,l\,l\,.\,6] = 16{,}84$ bei (7) und wir nehmen im Mittel rund $[p\,v\,v] = 16{,}8$; damit wird der mittlere Fehler der Gewichts-Einheit:

$$m = \sqrt{\frac{16{,}8}{14-6}} = \pm 1{,}45^{dm} \qquad (10)$$

Zu Anfang in der Tabelle (1) S. 445 sind die Gewichte $p = \left(\frac{1}{10\,m}\right)^2$ gesetzt, d. h. $p = 1$ gehört zu $10m = 1$ oder $m = 0{,}1^m = 1^{dm}$, während nach der Ausgleichung nun in (10) zu $p = 1$ der mittlere Fehler $m = 1{,}45^{dm}$ gehört. Diese Übereinstimmung ist für solche Fälle genügend.

Mit dem mittleren Gewichtseinheitsfehler nach (10) und mit den unter (7) mitgeteilten Gewichten der ausgeglichenen Höhen kann man nun auch die mittleren Fehler der Höhen nach der Ausgleichung berechnen, z. B. für [1] Justingen:

$$M_1 = \frac{1{,}45^{dm}}{\sqrt{4{,}81}} = \pm 0{,}66^{dm}$$

Führt man diese Berechnung auch für die übrigen Punkte durch, so erhält man folgendes Schluss-Ergebnis:

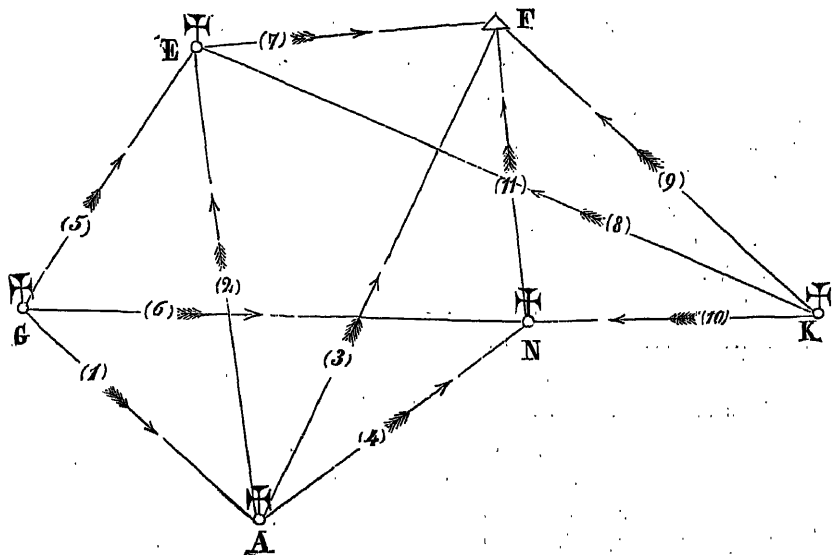
	Heroldstatt	848,62^m	Ausgangspunkt
[1]	Justingen	785,94^m	$\pm$ 0,07^m
[2]	Magolsheim . . .	798,61	$\pm$ 0,07
[3]	Ludwigshöhe . . .	818,63	$\pm$ 0,10
[4]	Tiefenhülen	769,68	$\pm$ 0,07
[5]	Mehrstetten . . .	785,87	$\pm$ 0,08
[6]	Bremelau	775,67	$\pm$ 0,09

(11)

Die mittleren Fehler beziehen sich sämtlich auf den Ausgangspunkt Heroldstatt.

§ 127. Ausgleichung eines Höhen-Netzes nach bedingten Beobachtungen (mit Korrelaten).

Das in nachstehender Fig. 1. gezeichnete Höhen-Netz, welches vom Verfasser im Jahre 1864 aufgenommen wurde, soll als Beispiel der Ausgleichung mit Korrelaten dienen.

Fig. 1.
(Massstab 1 : 125 000.)
Ausgleichung eines trigonometrischen Höhen-Netzes.
(Württemb. Atlasblatt Bopfingen.)

Die Pfeile zeigen die Richtung des Steigens.

Zwischen 6 Hauptpunkten wurden 11 Höhen-Diagonalen durch Ausgleichungen von Messungen aus Zwischenpunkten erhalten (im wesentlichen nach § 125.); die Zusammenstellung dieser 11 Höhen-Diagonalen zeigt folgende Tabelle:

Num.	Diagonale*)	Höhe	Mittlerer Fehler m	$\frac{1}{p} = (10\,m)^2$
1	GA = Grosskuchen—Auernheim	46,54^m	± 0,17^m	2,9
2	AE = Auernheim—Elchingen	8,69	0,13	1,7
3	AF = Auernheim—Freilass	10,65	0,13	1,7
4	AN = Auernheim—Neresheim	9,64	0,08	0,6
5	GE = Grosskuchen—Elchingen	54,74	0,42	17,6
6	GN = Grosskuchen—Neresheim	55,68	0,30	9,0
7	EF = Elchingen—Freilass	2,46	0,08	0,6
8	KE = Kösingen—Elchingen	31,47	0,21	4,4
9	KF = Kösingen—Freilass	33,75	0,34	11,6
10	KN = Kösingen—Neresheim	32,43	0,08	0,6
11	NF = Neresheim—Freilass	1,00	0,13	1,7

(1)

Um die Bedingungsgleichungen aufzustellen, überlegt man zuerst deren Anzahl. Nach dem, was hierüber schon bei den Nivellierungs-Ausgleichungen in § 116. S. 409 bis 410 gesagt worden ist, hat man allgemein:

p Punkte $\quad h$ Höhen-Diagonalen.

$r = h - p + 1$ Bedingungsgleichungen.

In unserem Falle ist $p = 6$, $h = 11$, also $r = 6$.

Wenn man nebenbei überlegt, wie viel Normalgleichungen man bei vermittelnden Beobachtungen erhalten hätte, so findet man $p - 1 = 5$; d. h. in Hinsicht auf die Anzahl der aufzulösenden Normalgleichungen wäre die Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen ein wenig günstiger.

Da wir hier nach bedingten Beobachtungen (mit Korrelaten) ausgleichen wollen, suchen wir die 6 Bedingungsgleichungen durch einzelne Dreiecke, z. B.:

Es *soll* sein: $\quad h_1 + h_4 - h_6 = 0$

Es *ist* aber: $\quad 46{,}54^m + 9{,}64^m - 55{,}68^m = +\,0{,}50^m = w_1$

deswegen werden Verbesserungen v angebracht:

$$(h_1 + v_1) + (h_4 + v_4) - (h_6 + v_6) = 0$$

Dieses mit dem vorigen zusammen giebt:

$$v_1 + v_4 - v_6 + 0{,}50^m = 0.$$

In ähnlicher Weise erhält man die übrigen 5 Gleichungen, und alle 6 zusammen:

$$\left.\begin{array}{llll} a) & v_1 + v_4 - v_6 + 5{,}0^{dm} = 0 & d) & v_2 + v_7 - v_3 + 5{,}0^{dm} = 0 \\ b) & v_1 + v_2 - v_5 + 4{,}9 = 0 & e) & v_{10} + v_{11} - v_9 - 3{,}2 = 0 \\ c) & v_4 + v_{11} - v_3 - 0{,}1 = 0 & f) & v_8 + v_7 - v_9 + 1{,}8 = 0 \end{array}\right\} \quad (2)$$

(Die hier benützten Dreiecke sind nicht in gleichem Sinne durchlaufen; es ist dieses nicht nötig, wäre aber bei einer Neuberechnung zu empfehlen.)

Um die Normalgleichungen vorzubereiten, bilden wir die Tabelle der Coëfficienten und der Gewichte:

---

*) Siehe „Württembergische Jahrbücher für Statistik und Landeskunde 1870“, S. XXXII; die Höhen sind dort in Württemb. Fussen zu 0,2864226^m angegeben.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	w
$\frac{1}{p}$	+2,9	+1,7	+1,7	+0,6	+17,6	+9,0	+0,6	+4,4	+11,6	+0,6	+1,7	dm
a	+1	..	..	+1	..	—1	..	..	..	..	..	+5,0
b	+1	+1	..	..	—1	..	..	..	..	..	..	+4,9
c	..	..	—1	+1	..	..	..	..	..	..	+1	—0,1
d	..	+1	—1	..	..	..	+1	..	..	..	..	+5,0
e	..	..	..	..	..	..	..	..	—1	+1	+1	—3,2
f	..	..	..	..	..	..	+1	+1	—1	..	..	+1,8

(3)

Nun wird z. B.: $\left[\frac{a\,a}{p}\right] = 2{,}9 + 0{,}6 + 9{,}0 = +\,12{,}5$

$$\left[\frac{a\,b}{p}\right] = +\,2{,}9$$

. . . . u. s. w.

Man hat daher folgende 6 Normalgleichungen aufzulösen:

$$\begin{array}{l}
\underline{+\,12{,}5\,k_1} + 2{,}9\,k_2 + 0{,}6\,k_3 \quad .. \quad .. \quad .. \quad +\,5{,}0 = 0 \\
\qquad \underline{+\,22{,}2\,k_2} \quad .. \quad +\,1{,}7\,k_4 \quad .. \quad .. \quad +\,4{,}9 = 0 \\
\qquad\qquad \underline{+\,4{,}0\,k_3} + 1{,}7\,k_4 + 1{,}7\,k_5 \quad .. \quad -\,0{,}1 = 0 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{+\,4{,}0\,k_4} \quad . \quad +\,0{,}6\,k_6 + 5{,}0 = 0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{+\,13{,}9\,k_5} + 11{,}6\,k_6 - 3{,}2 = 0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{+\,16{,}6\,k_6} + 1{,}8 = 0
\end{array}$$

Die Auflösung giebt:

$$\begin{array}{ll}
k_1 = -\,0{,}40 & k_4 = +\,1{,}30 \\
k_2 = -\,0{,}07 & k_5 = +\,0{,}57 \\
k_3 = +\,0{,}38 & k_6 = -\,0{,}47
\end{array}$$

Nunmehr finden sich die Korrektionen v mit Benützung der Tabelle (3), z. B.:

$$v_1 = \frac{1}{p_1}(k_1 + k_2) = 2{,}9\,(-\,0{,}40 - 0{,}07) = -\,1{,}4^{dm}$$

und auf gleiche Weise erhält man auch die übrigen v, nämlich:

$$\begin{array}{lll}
v_1 = -\,1{,}4^{dm} & v_5 = +\,1{,}2^{dm} & v_9 = -\,1{,}2^{dm} \\
v_2 = -\,2{,}3 & v_6 = +\,3{,}6 & v_{10} = +\,0{,}3 \\
v_3 = +\,1{,}6 & v_7 = -\,1{,}1 & v_{11} = +\,1{,}6 \\
v_4 = \,0{,}0 & v_8 = -\,2{,}1 &
\end{array}$$

Diese Korrektionen fügt man den Beobachtungen zu, und erhält damit:

$$\begin{array}{lllll}
h_1 = GA = & 46{,}54^m & -\,0{,}14^m & = & 46{,}40^m \\
h_2 = AE = & 8{,}69 & -\,0{,}23 & = & 8{,}46 \\
h_3 = AF = & 10{,}65 & +\,0{,}16 & = & 10{,}81 \\
h_4 = AN = & 9{,}64 & +\,0{,}00 & = & 9{,}64 \\
h_5 = GE = & 54{,}74 & +\,0{,}12 & = & 54{,}86 \\
h_6 = GN = & 55{,}68 & +\,0{,}36 & = & 56{,}04 \\
h_7 = EF = & 2{,}46 & -\,0{,}11 & = & 2{,}35 \\
h_8 = KE = & 31{,}47 & -\,0{,}21 & = & 31{,}26 \\
h_9 = KF = & 33{,}75 & -\,0{,}12 & = & 33{,}63 \\
h_{10} = KN = & 32{,}43 & +\,0{,}03 & = & 32{,}46 \\
h_{11} = NF = & 1{,}00 & +\,0{,}16 & = & 1{,}16
\end{array}$$

Aus diesen Werten lassen sich die Höhen sämtlicher Punkte ohne Widersprüche auf den verschiedenen Wegen berechnen. Nur teilweise bestehen noch kleine Abweichungen der letzten Stelle, die aber lediglich von der Abrundung der Rechnung auf $0{,}01^m$ herrühren.

Von einem Punkte ist die Höhe über N. N. gegeben; es ist nämlich, nach neuester Mitteilung des statistischen Landes-Amtes:

Freilass Signalstein . . . $651{,}16^m$ über N. N.

und damit werden die übrigen bestimmt, wie folgende Tabelle aller 6 Höhen zeigt:

Punkt	*Höhe über N. N.*
F Freilass	$651{,}16^m$
K Kösingen	617,53
N Neresheim	649,99
A Auernheim	640,35
G Grosskuchen	593,95
E Elchingen	648,81.

Anmerkungen.

Über die Württembergische trigonometrische Höhen-Aufnahme, welcher die zwei Beispiele von § 126. und § 127. entnommen sind, geben die „Württemb. Jahrbücher für Statistik und Landeskunde“, herausgegeben vom statist.-topogr. Bureau 1859—1876, weitere Auskunft. Im Jahrgang 1869, Seite I—XVI, wird ein historischer Überblick über die bis dahin veröffentlichten Messungen, und die Ausgleichung des Blattes Waiblingen gegeben. Das in gegenwärtigem § 127. mitgeteilte Neresheimer Netz vom Jahr 1864 war die erste wissenschaftliche Ausgleichung der Württemb. trigonometrischen Höhen-Aufnahme (vgl. hiezu „die trigonometrische Höhenmessung und die Ausgleichung ihrer Resultate“, von *W. Jordan*, Stuttgart 1866). Die späteren Aufnahmen sind übrigens genauer als die hier mitgeteilten Beispiele, weil zuerst nur kleine Höhenkreise mit 9—11^{cm} Durchmesser zur Verfügung waren, dagegen nachher ein 27^{cm}-Kreis.

Weiteres giebt eine Darstellung von Inspektor *Regelmann*, „Württemb. Jahrbücher für Statistik und Landeskunde“, trigon. Höhen, S. 64, und in dem Werke „Deutsches Vermessungswesen“ von *Jordan-Steppes*, I. Band, S. 260—264.

§ 128. Theorie der Refraktion.

Zur theoretischen Untersuchung der krummen Lichtbahn in unserer Atmosphäre brauchen wir zuerst das allgemeine Brechungs-Gesetz: Bezeichnet man mit μ den Brechungs-Coëfficienten für den Übergang vom leeren Raum in ein lichtbrechendes Mittel, und mit μ' den Brechungs-Coëfficienten für den Übergang vom leeren Raum in ein anderes brechendes Mittel, so gilt für den Übergang eines Strahls von dem einen brechenden Mittel in das andere (nach Fig. 1. S. 453) der Satz:

$$\frac{\sin i}{\sin \beta} = \frac{\mu'}{\mu} \tag{1}$$

Wir betrachten nun nach Fig. 1. S. 453 den Weg eines Lichtstrahls $P'\,P \ldots P_1$ durch verschiedene Schichten der Atmosphäre, welchen verschiedene Brechungs-Coëfficienten μ , μ' , μ'' u. s. w. zukommen.

Die Schichten der Atmosphäre seien kugelförmig, und haben an zwei Stellen die von dem gemeinsamen Mittelpunkt C aus gemessenen Halbmesser r und r', dann besteht die Gleichung:

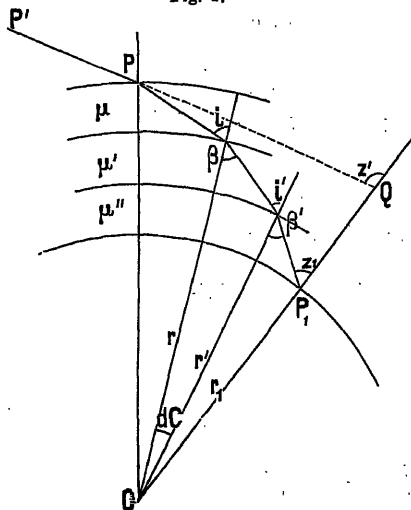
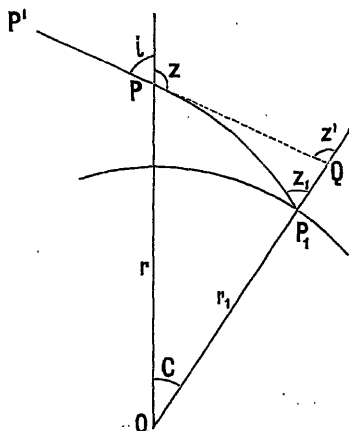
$$\frac{\sin\beta}{\sin i'} = \frac{r'}{r} \tag{2}$$

Die Verbindung der zwei Gleichungen (1) und (2) giebt:

$$r\,\mu \sin i = r'\,\mu' \sin i' \tag{3}$$

Wenn man die in (1) und (2) enthaltenen Gesetze auch weiter anwendet, so bekommt man eine ähnliche Formel wie (3), oder allgemein:

$$r\,\mu \sin i = r'\,\mu' \sin i' = r''\,\mu'' \sin i'' = \ldots = \gamma \tag{4}$$

wo γ eine Konstante ist.

An der Erdoberfläche im Punkt P_1 mit $r = r_1$ wird i gleich der scheinbaren Zenit-Distanz z_1, und indem man den zugehörigen absoluten Brechungs-Coëfficient mit μ_1 bezeichnet, hat man nach (4):

$$r_1\,\mu_1 \sin z_1 = \gamma \tag{5}$$

Die Konvergenz der beiden Erdhalbmesser r und r' sei dC, dann entnimmt man nach Fig. 1. aus einem rechtwinkligen Differential-Dreieck:

$$\operatorname{tang} i' = \frac{r\,dC}{dr} \tag{6}$$

oder, wenn C von dem Halbmesser OP an gezählt wird, entsprechend der vorigen Gleichung (6):

$$\operatorname{tang} i = \frac{r\,dC}{dr} \tag{7}$$

Nachdem die Beziehungen (4), (5) und (7) erkannt sind, ist es nicht mehr nötig, die Lichtkurve in ihren Elementen zu betrachten, wir gehen daher über zu Fig. 2., wobei P einen veränderlichen Punkt der Lichtkurve und PQ deren Tangente in P bedeutet. Diese Tangente hat in der Vertikalen OQ eines Erdpunktes, die Zenit-

Distanz z', welche sich aus dem Einfallswinkel i und dem Erdcentriwinkel C zusammensetzt nach der Gleichung:

$$z' = i + C \tag{8}$$

Um hier die Brechungs-Gesetze anzuwenden, haben wir die oben entwickelte Gleichung (4) S. 453 zu benützen; dieselbe giebt logarithmiert und differentiiert:

$$\frac{dr}{r} + \frac{d\mu}{\mu} + cotg\, i\, d\, i = 0$$

$$d\, i = -\left(\frac{d\, r}{r} + \frac{d\, \mu}{\mu}\right) tang\, i \tag{9}$$

Zieht man noch $d\, C$ nach (7) zu, so erhält man aus (8) und (9):

$$d\, z' = d\, i + d\, C = -\frac{d\, \mu}{\mu} tang\, i \tag{10}$$

tang i kann in r und μ und in den Konstanten r_1, μ_1, z_1 ausgedrückt werden, nämlich nach (4) und (5):

$$tang\, i = \frac{sin\, i}{\sqrt{1 - sin^2 i}} = \frac{\gamma}{\sqrt{r^2\, \mu^2 - \gamma^2}} = \frac{r_1\, \mu_1\, sin\, z_1}{\sqrt{r^2\, \mu^2 - r_1^2\, \mu_1^2\, sin^2 z_1}}$$

Die Einsetzung dieses Wertes in (10) giebt:

$$-d\, z' = \frac{r_1}{r}\, \frac{d\, \mu}{\mu}\, \frac{\mu_1\, sin\, z_1}{\sqrt{\mu^2 - \frac{r_1^2}{r^2}\, \mu_1^2\, sin^2 z_1}} \tag{11}$$

Da r_1 und r nicht erheblich verschieden sind, wird geschrieben:

$$\frac{r_1}{r} = 1 - \frac{r - r_1}{r} \tag{12}$$

und mit einiger anderer Umformung erhält man aus (11):

$$-d\, z' = \left(1 - \frac{r - r_1}{r}\right) \frac{d\, \mu}{\mu}\, \frac{sin\, z_1}{\sqrt{cos^2 z_1 - \left(1 - \frac{\mu^2}{\mu_1^2}\right) + \left(2\, \frac{r - r_1}{r} - \left(\frac{r - r_1}{r}\right)^2\right) sin^2 z_1}} \tag{13}$$

Der Brechungs-Coëfficient μ hängt von der Dichte ϱ der brechenden Luft ab, und zwar nach Massgabe der Gleichung:

$$\mu^2 - 1 = c\, \varrho \tag{14}$$

wo c eine Konstante ist.

$\mu^2 - 1$ heisst die brechende Kraft der Luft (allgemein des brechenden Gases) und $\dfrac{\mu^2 - 1}{\varrho}$ heisst das Brechungs-Vermögen, welches nach (14) für dasselbe Gas konstant ist. (Der Ausdruck „brechende Kraft" rührt von der Emanationstheorie her. Das Gesetz (14) beruht nicht auf einer Theorie, sondern ist nur empirisch gefunden worden, von *Biot* und *Arago*).

(Neuere Versuche hierüber sind mitgeteilt in den Beiblättern zu *Poggendorffs* „Annalen der Physik und Chemie 1877" Nr. 5, Band 1 Stück 5, S. 257—270.)

In (13) kommt das Verhältnis $\mu^2 : \mu_1^2$ vor, welches in den Dichten ϱ und ϱ_1 ausgedrückt werden kann, denn es ist nach (14):

$$\mu^2 = 1 + c\, \varrho \qquad \mu_1^2 = 1 + c\, \varrho_1 \tag{15}$$

woraus:
$$\frac{\mu^2}{\mu_1{}^2} = \frac{1 + c\,\varrho}{1 + c\,\varrho_1} \tag{16}$$

$$1 - \frac{\mu^2}{\mu_1{}^2} = \frac{c\,\varrho_1}{1 + c\,\varrho_1}\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_1}\right) \tag{17}$$

Dieses giebt Veranlassung zur Einführung einer neuen Bezeichnung, nämlich:

$$\frac{c\,\varrho_1}{1 + c\,\varrho_1} = 2\,\alpha_1 \qquad \frac{c\,\varrho}{1 + c\,\varrho} = 2\,\alpha \tag{18}$$

Da c konstant ist, so sind α und α_1 nur Funktionen der Luftdichten ϱ und ϱ_1; derjenige Wert α, welcher einer gewissen als normal angenommenen Luftdichte ϱ entspricht, wird die *Refraktions-Konstante* genannt. Mit Einführung von α_1 nach (18) geht (17) über in:

$$1 - \frac{\mu^2}{\mu_1{}^2} = 2\,\alpha_1\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_1}\right) \tag{19}$$

In der Formel (13) ist auch noch $\frac{d\mu}{\mu}$ in $d\varrho$, ϱ und ϱ_1 auszudrücken, man hat hiezu zuerst nach (14) oder (15):

$$2\,\mu\,d\mu = c\,d\varrho \qquad \text{oder} \qquad \frac{d\mu}{\mu} = \frac{c\,d\varrho}{2\mu^2}$$

und nach (16), (15) und (18) kann man dieses so umformen:

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{d\varrho}{\varrho_1}\,\frac{\alpha_1}{1 - 2\,\alpha_1\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_1}\right)} \tag{20}$$

Wenn man nun (19) und (20) in (13) einsetzt, so erhält man als Ergebnis der bisherigen Entwicklung die Gleichung:

$$-dz' = \frac{\alpha_1}{1 - 2\alpha_1\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_1}\right)}\,\frac{\left(1 - \frac{r - r_1}{r}\right)\sin z_1\,\frac{d\varrho}{\varrho_1}}{\sqrt{\cos^2 z_1 - 2\alpha_1\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_1}\right) + \left(2\frac{r - r_1}{r} - \left(\frac{r - r_1}{r}\right)^2\right)\sin^2 z_1}} \tag{21}$$

Die Bedeutung aller hier vorkommenden Bezeichnungen ergiebt sich aus (18) (14) und Fig. 2. S. 453.

(Dieses ist die vollständige Differentialgleichung der Lichtkurve, welche zuerst von *Laplace* in der „Mécanique céleste Tome IV" S. 246 entwickelt wurde.)

Für die terrestrische Refraktion zum Gebrauch für trigonometrische Höhen-Messung kann man einige Vereinfachungen der Differentialgleichung (21) sofort eintreten lassen; da es sich hier immer nur um verhältnismässig kleine Ausdehnungen handelt, kann man den Faktor $\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_1}\right)$ im Nenner $= 1$ setzen, ebenso $\left(1 - \frac{r - r_1}{r}\right)$ im Zähler $= 1$, und $\left(\frac{r - r_1}{r}\right)^2$ unter der Wurzel vernachlässigen. Im übrigen schreiben wir noch zur Abkürzung:

$$r - r_1 = h \tag{22}$$

und nun hat man statt (21) hinreichend genau:

$$-dz' = \frac{\alpha_1}{1 - 2\,\alpha_1}\,\frac{\sin z_1}{\sqrt{\cos^2 z_1 - 2\,\alpha_1\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_1}\right) + 2\frac{h}{r}\sin^2 z_1}}\,\frac{d\varrho}{\varrho_1} \tag{23}$$

Wir müssen nun die Grösse α_1 näher ins Auge fassen. α_1 ist nach (18) derjenige besondere Wert von α, welcher für die Luftdichte ϱ_1 (entsprechend dem Punkte P_1 in Fig. 2. Seite 453) gilt.

Der allgemeine Wert α ist nach (18) eine Funktion der Luftdichte ϱ und zwar ist sehr genähert α proportional ϱ, weil c sehr klein ist (nämlich $c = 0{,}000589$ nach *Dulong*); wenn man α für irgend welche Luftdichte kennt, so kann man den entsprechenden Wert auch für jede andere Luftdichte berechnen. Die Dichten ϱ und ϱ_1 zweier Luftmengen haben nach dem *Mariotte-Gay-Lussac*schen Gesetz das Verhältnis:

$$\frac{\varrho}{\varrho_1} = \frac{B}{B_1}\,\frac{1+\varepsilon T_1}{1+\varepsilon T} \tag{24}$$

wenn B, B_1 die Barometerstände, T, T_1 die Lufttemperaturen und $\varepsilon = 0{,}003665$ ist.

Als Zahlenwert für α finden wir aus den Angaben von *Bessel* in den „Tabulae regiomontanae" S. LIX—LXII, mit Zuziehung der Bemerkungen im „Berliner astron. Jahrbuch für 1826" S. 16:

$$\alpha_B = 1{,}003282 \times 57{,}538'' = 57{,}7269'' \tag{25}$$

gültig für eine Lufttemperatur 48,75° Fahrenheit = 9,31° Celsius und einen Barometerstand von 751,51^{mm}, welcher sowohl in Bezug auf das Quecksilber als auf den Massstab auf 0° C. reduziert ist. Man hat daher nach (24) für irgend welche andere Lufttemperatur T (in C°) und einen anderen Barometerstand B (in Millimetern auf 0° reduziert) den entsprechenden Wert α:

$$\alpha = \alpha_B \frac{B}{751{,}51}\,\frac{1+0{,}003665\times 9{,}31}{1+0{,}003665\,T}$$

in Sekunden, oder mit Reduktion auf die Normalwerte 760^{mm} und 0°:

$$\alpha = 1{,}0458\;\alpha_B \frac{B}{760}\,\frac{1}{1+0{,}003665\,T}$$

$$\alpha = 60{,}371'' \frac{B}{760}\,\frac{1}{1+0{,}003665\,T} \tag{26}$$

oder in Bogenmass (durch Division mit 206265''):

$$\alpha = 0{,}00029269\,\frac{B}{760}\,\frac{1}{1+0{,}003665\,T} \tag{27}$$

Den *Bessel*schen Wert α_B pflegt man die Refraktions-Konstante schlechthin zu nennen; mit Rücksicht auf (26) und (27) nehmen wir jedoch als Normalwert:

$$\alpha_0 = 60{,}371'' \text{ bzw.} = 0{,}00029269 \tag{28}$$

Dieser Wert α_0 bezieht sich auf den Barometerstand $B = 760^{mm}$ und die Lufttemperatur $T = 0°$.

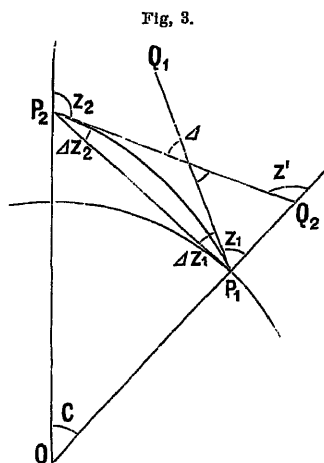
Zur Vorbereitung des ersten Faktors von (23) berechnen wir auch:

$$\frac{\alpha_0}{1-2\,\alpha_0} = 0{,}00029286 \tag{29}$$

In den bisherigen Bezeichnungen und Formeln ist angenommen, der Lichtstrahl PP_1 (Fig. 2. S. 453) komme aus weiter Ferne her, gehe durch einen (veränderlichen) Punkt P und treffe erst im Punkte P_1 einen Punkt der Erdoberfläche; wenn nun P selbst ein Punkt der Erdoberfläche ist, welcher Licht nach P_1 sendet, so ist der Weg dieses Lichtes doch derselbe wie bei dem ersten Fall.

Um diese neuen Verhältnisse auch in den Formeln deutlicher hervortreten zu lassen, nehmen wir nun entsprechend Fig. 3. folgende Bezeichnungen an: In zwei Punkten P_1 und P_2 werden die gegenseitigen Zenit-Distanzen z_1 und z_2 beobachtet, sowie die Lufttemperaturen T_1, T_2 und die auf einheitliches Mass reduzierten Luftdrücke B_1, B_2. Die Luftdichten seien ϱ_1 und ϱ_2, ferner sei h der Höhen-Unterschied beider Punkte und r der Erdhalbmesser mit Einschluss der mittleren Höhe der Punkte. Mit α_0 bezeichnen wir die Refraktions-Konstante, bezogen auf 0° Temperatur und 760^{mm} Barometerstand nach (28) und (29). Den Werten B_1, T_1 und B_2, T_2 entsprechen bzw. α_1 und α_2.

Fig. 3.

Mit Annahme dieser Bezeichnungen wird die Differentialgleichung der Lichtkurve nach (23):

$$-dz' = \frac{\alpha_1}{1-2\alpha_1} \frac{\sin z_1}{\sqrt{\cos^2 z_1 - 2\alpha_1\left(1-\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right) + 2\frac{h}{r}\sin^2 z_1}} \frac{d\varrho_2}{\varrho_1} \tag{30}$$

wobei, wie früher, unter z' verstanden wird die Zenit-Distanz der in P_2 an die Lichtkurve gelegten Tangente $P_2 Q_2$, gemessen in der Vertikalen von P_1.

Der Punkt P_1 wird als fest, und die auf ihn bezüglichen Grössen α_1, ϱ_1, z_1 werden als konstant behandelt.

Zum Zweck der Integration der Gleichung (30) bringen wir zuerst Alles auf die Veränderliche h.

Da $2\alpha_1$ gegen 1 sehr klein ist, hat man hinreichend genau nach (29) und (27) mit $\varepsilon = 0{,}003665$:

$$\frac{\alpha_1}{1-2\alpha_1} = \frac{\alpha_0}{1-2\alpha_0} \frac{B_1}{760} \frac{1}{1+\varepsilon T_1} \tag{31}$$

Das Verhältnis der Luftdichten ist nach (24):

$$\frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \frac{B_2}{B_1} \frac{1+\varepsilon T_1}{1+\varepsilon T_2} = \frac{B_2}{B_1}(1+\varepsilon(T_1-T_2)) \tag{32}$$

Die Beziehung zwischen der Höhe h und den meteorologischen Grössen wird durch die Barometerformel geliefert:

$$h = K(\log B_1 - \log B_2)\left(1+\varepsilon\frac{T_1+T_2}{2}\right) \tag{33}$$

wobei K bedeuten soll die barometrische Konstante mit Einschluss der Korrektionsglieder zweiter Ordnung, nämlich:

$$K = 18400\left(1+0{,}377\frac{e}{B}\right)(1+0{,}00265\cos 2\varphi)\left(1+2\frac{H}{r}\right)^{*)} \tag{34}$$

wobei e der mittlere Dunstdruck, B der mittlere Luftdruck, φ die mittlere geographische Breite, H die mittlere Meereshöhe und r der Erdhalbmesser ist. Von ganz besonderer Wichtigkeit ist noch die Abnahme der Lufttemperatur mit der Höhe. Wenn

---

*) Die Entwicklung hiefür wird in § 145. gegeben werden.

h der Höhen-Unterschied der beiden Punkte ist, in welchen die Lufttemperaturen T_1 und T_2 stattfinden, so wird eine Funktion bestehen:

$$T_1 - T_2 = n\,h + h^2 \ldots \tag{35}$$

wobei in erster Näherung gesetzt werden kann:

$$n = \frac{T_1 - T_2}{h} \tag{36}$$

Die Gleichung (33) kann man in eine Reihe entwickeln:

$$h = M\,K\left(\frac{B_1 - B_2}{B_1} - \frac{1}{2}\left(\frac{B_1 - B_2}{B_1}\right)^2 \ldots\right)\left(1 + \varepsilon\,\frac{T_1 + T_2}{2}\right) \tag{37}$$

im letzten Faktor dieser Gleichung kann man nach (35) und (36) schreiben:

$$\frac{T_1 + T_2}{2} = T_1 - \frac{n\,h}{2} + h^2 \ldots$$

es wird deswegen die Gleichung (37) auf Glieder von der Ordnung h einschliesslich genau aufgelöst durch die Gleichung:

$$\frac{B_1 - B_2}{B_1} = 1 - \frac{B_2}{B_1} = \frac{1 - \varepsilon\,T_1}{M\,K}\,h + h^2 \ldots \tag{38}$$

Damit, nebst (35) erhält man aus (32):

$$\frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \left(1 - \frac{1 - \varepsilon\,T_1}{M\,K}\,h + \ldots\right)(1 + n\,\varepsilon\,h + \ldots) = 1 - \left(\frac{1 - \varepsilon\,T_1}{M\,K} - n\,\varepsilon\right)h + h^2 \ldots \tag{39}$$

also, weil ϱ_1 konstant ist, giebt die Differentiierung nach ϱ_2 in erster Näherung:

$$\frac{d\,\varrho_2}{\varrho_1} = \left(-\left(\frac{1 - \varepsilon\,T_1}{K\,M} - n\,\varepsilon\right) + 2\,h \ldots\ldots\right)d\,h \tag{40}$$

Führt man die Zwischenentwicklungen (31) (39) (40) in (30) ein, so erhält man:

$$d\,z' = \frac{\alpha_0}{1 - 2\,\alpha_0}\,\frac{B_1}{760}\,\frac{1}{1 + \varepsilon\,T_1}\,\frac{\left(\frac{1 - \varepsilon\,T_1}{M\,K} - n\,\varepsilon\right) + h \ldots}{\sqrt{\cos^2 z_1 + h \ldots}}\,\sin z_1\,d\,h \tag{41}$$

dabei sind mit $+h\ldots$ Glieder angedeutet, welche nachher vernachlässigt werden, so dass fürs folgende $\sqrt{\cos^2 z_1 + h \ldots} = \cos z_1$ zu setzen ist.

Der Höhen-Unterschied h kann in erster Näherung gesetzt werden nach Fig. 4. S. 459:

$$h = a \operatorname{cotg} z_1$$

wo a die Entfernung beider Punkte P_1 und P_2 ist. Man hat also nun:

$$d\,h = d\,a \operatorname{cotg} z_1 \qquad \text{oder} \qquad d\,h \operatorname{tang} z_1 = d\,a$$

Damit giebt die Gleichung (41):

$$d\,z' = \frac{\alpha_0}{1 - 2\,\alpha_0}\,\frac{B_1}{760}\,\frac{1}{1 + \varepsilon\,T_1}\left(\frac{1 - \varepsilon\,T_1}{M\,K} - n\,\varepsilon\right)d\,a$$

Für die Integration weiss man, dass $z' = z_1$ wird mit $a = 0$, daher wird:

$$z' - z_1 = \left\{\frac{\alpha_0}{1 - 2\,\alpha_0}\,\frac{B_1}{760}\,\frac{1}{1 + \varepsilon\,T_1}\left(\frac{1 - \varepsilon\,T_1}{M\,K} - n\,\varepsilon\right)\right\}a \tag{42}$$

$z' - z_1$ ist die gesamte Refraktion der Lichtkurve zwischen P_1 und P_2, es ist nach Fig. 3. S. 457, $z' - z_1$ gleich der Summe der Winkel $\varDelta z_1$ und $\varDelta z_2$, welche die Lichtkurve in den Punkten P_1 und P_2 mit der Sehne $P_1 P_2$ macht, oder gleich dem

Winkel, unter welchem die in P_1 und P_2 gezogenen Tangenten der Lichtkurve sich schneiden. Wir wollen diesen Winkel mit Δ bezeichnen, und haben in Fig. 3. und in Fig. 4. diesen Wert Δ eingeschrieben.

Fig. 4.

In Fig. 4. haben wir zugleich die Tangente $P_1 Q_1$ zu der Axe eines rechtwinkligen Systems ξ, η gemacht, so dass nun ist:

$$\Delta = z' - z_1 = \frac{d\,\eta}{d\,\xi}$$

Da aber die auf $P_1 Q_1$ gemessenen schiefen Entfernungen sehr wohl den horizontalen Entfernungen a gleich gesetzt werden können, hat man auch

$$\Delta = z' - z_1' = \frac{d\,\eta}{d\,a} = \left\{\cdots\right\} a$$

dabei ist $\left\{\cdots\right\} a$ eine Abkürzung für (42).

Weiter ist: $$\frac{d^2\,\eta}{d\,a^2} = \left\{\cdots\right\}$$

Der zweite Differentialquotient einer Kurvengleichung kann aber näherungsweise gleich der Reciproken des Krümmungshalbmessers R gesetzt werden, also:

$$\frac{1}{R} = \left\{\cdots\right\} \tag{42a}$$

Dieses giebt eine Anknüpfung an die frühere rohe Theorie von § 120. Wir haben dort in der Gleichung (5) S. 427 unter Refraktions-Coëfficient k verstanden das Verhältnis des Erdhalbmessers r zum Halbmesser der Lichtbahn r', welchen wir nun R nach (42a) nennen wollen. Und da nun die Lichtbahn nicht mehr im ganzen als kreisförmig gelten soll, verstehen wir nun unter dem Refraktions-Coëfficienten k für irgend welchen Punkt der Lichtbahn, das Verhältnis des Erdhalbmessers r zum Krümmungshalbmesser R der Lichtbahn in dem betrachteten Punkt. Es ist also nun k veränderlich, und nach (42a):

$$k = \frac{r}{R} = \left\{\cdots\right\} r \tag{43}$$

oder mit Wiedereinführung des Klammerwertes von (42):

$$k_1 = \frac{\alpha_0}{1 - 2\,\alpha_0}\,\frac{B_1}{760}\,\frac{1}{1 + \varepsilon\,T_1}\left(\frac{1 - \varepsilon\,T_1}{M\,K} - n\,\varepsilon\right) r \tag{44}$$

Nun denken wir uns die Gleichung der Lichtkurve nach Potenzen von ξ entwickelt:

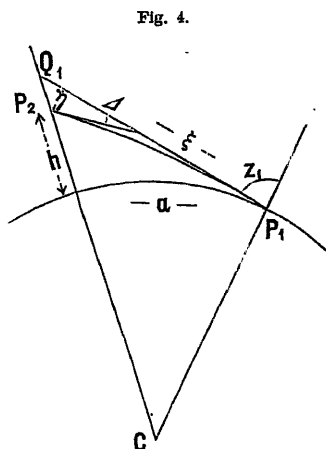
$$\eta = P\,\xi^2 + Q\,\xi^3 + \cdots \tag{45}$$

wo P und Q gewisse Coëfficienten sind.

Wie schon bei (42a) kann man den zweiten Differentialquotienten als reciproken Wert des Krümmungshalbmessers R nehmen, d. h.:

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2\,\eta}{d\,\xi^2} = 2\,P + 6\,Q\,\xi \tag{45a}$$

Indem man $R = R_1$ für den Punkt P_1 mit $\xi = 0$ einführt, und $R = R_2$ für den Punkt P_2 mit $\xi = a$, erhält man aus (45a) zwei Gleichungen:

$$\frac{1}{R_1} = 2\,P \quad , \quad \frac{1}{R_2} = 2\,P + 6\,Q\,a \tag{45b}$$

Diese zwei Gleichungen bestimmen die vorläufig unbestimmt gebliebenen Coëfficienten P und Q in (45), man findet durch Auflösung der zwei Gleichungen (45 b):

$$P = \frac{1}{2\,R_1} \qquad Q = \frac{R_1 - R_2}{6\,a\,R_1\,R_2} \tag{46}$$

Setzt man diese Coëfficienten P und Q von (46) in (45) ein, und nimmt man zugleich $\xi = a$, so erhält man:

$$\eta = \frac{a^2}{2\,R'} \tag{47}$$

wobei R' folgende Bedeutung hat:

$$R' = \frac{3\,R_1\,R_2}{2\,R_2 + R_1} \qquad \text{oder} \qquad \frac{1}{R'} = \frac{2\,\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}{3} \tag{48}$$

Nun sollen, den drei Krümmungshalbmessern R_1, R_2 und R' entsprechend, drei besondere Refraktions-Coëfficienten eingeführt werden:

$$k_1 = \frac{r}{R_1} \qquad k_2 = \frac{r}{R_2} \qquad k' = \frac{r}{R'}$$

damit wird nach (48):

$$k' = \frac{2\,k_1 + k_2}{3} \tag{49}$$

und

$$\varDelta z_1 = \frac{\eta}{a} = \frac{a}{2\,R'} = \frac{1}{2}\,k'\,\frac{a}{r} = \frac{1}{2}\,k'\,C \tag{50}$$

Zusammenfassung der Resultate (vgl. Fig. 4. S. 459).

Wenn auf zwei Punkten, P_1 und P_2, die gegenseitigen Zenit-Distanzen z_1 und z_2, sowie die Lufttemperaturen T_1 und T_2 (in C°) und die Barometerstände B_1 und B_2 (in Millimetern auf 0° und sonst auf ein einheitliches Mass reduziert) beobachtet sind, so berechnet man nach (44):

$$k_1 = \frac{\alpha_0}{1 - 2\,\alpha_0}\,\frac{B_1}{760}\,\frac{1}{1 + \varepsilon\,T_1}\left(\frac{1 - \varepsilon\,T_1}{MK} - n_1\,\varepsilon\right) r \tag{51}$$

$$k_2 = \frac{\alpha_0}{1 - 2\,\alpha_0}\,\frac{B_2}{760}\,\frac{1}{1 + \varepsilon\,T_2}\left(\frac{1 - \varepsilon\,T_2}{MK} - n_2\,\varepsilon\right) r \tag{52}$$

wobei, nach (29), $\frac{\alpha_0}{1 - 2\,\alpha_0} = 0{,}00029286$, ferner K die barometrische Konstante mi Einschluss der Korrektionsglieder zweiter Ordnung nach (34), $M = 0{,}43429$ die logarithmische Modul, $\varepsilon = 0{,}003665$ der Ausdehnungs-Coëfficient der Luft, und r der Erdkrümmungs-Halbmesser für die mittlere Höhe der Beobachtungspunkte ist. n_1 und n_2 sind nach (35) die Temperatur-Änderungen für 1^m Höhe in der Nähe der Punkte P_1 und P_2 (im Mittel ungefähr $n = 0{,}005$).

Nachdem k_1 und k_2 bestimmt sind, berechnet man:

$$k' = \frac{2\,k_1 + k_2}{3}\,, \qquad k'' = \frac{2\,k_2 + k_1}{3} \tag{53}$$

$$\varDelta z_1 = {}^1/_2\,k'\,C \qquad \varDelta z_2 = {}^1/_2\,k''\,C \tag{54}$$

Den Höhen-Unterschied selbst kann man nun zweifach berechnen, nämlich:

$$H_2 - H_1 = a\,cotg\,(z_1 + \varDelta z_1) + \frac{a^2}{2\,r} \tag{55}$$

$$H_1 - H_2 = a\,cotg\,(z_2 + \varDelta z_2) + \frac{a^2}{2\,r} \tag{56}$$

oder mit Einführung von k' und k'':

$$H_2 - H_1 = a \, cotg \, z_1 + \frac{1-k'}{2r} a^2 \tag{57}$$

$$H_1 - H_2 = a \, cotg \, z_2 + \frac{1-k''}{2r} a^2 \tag{58}$$

Weitere Glieder kann man entbehren, wenn man unter a die Horizontal-Entfernung, reduziert auf den Horizont der Mittelhöhe $\frac{H_1 + H_2}{2}$, versteht (vgl. (16) § 121. S. 432).

Die vorstehenden Formeln setzen zunächst die meteorologischen Beobachtungen B_1, B_2, T_1, T_2 und die Kenntnis der Differentialquotienten n_1 und n_2 des Gesetzes der Temperatur-Abnahme voraus; jedoch kann man jedenfalls mittelst des vorläufig berechneten Höhen-Unterschiedes $H_2 - H_1$ nach der Barometerformel, B_2 aus B_1 hinreichend genau ableiten, oder umgekehrt B_1 aus B_2. Wenn das Gesetz der Temperatur-Änderung in einer abgekürzten Reihe gegeben ist:

$$T = T_1 + Ah + Bh^2 + Ch^3, \tag{59}$$

so hat man zuerst allgemein:

$$n = \frac{dT}{dh} = A + 2Bh + 3Ch^3 \tag{60}$$

und wenn man $T = T_1$ und $h = H_2 - H_1$ einander entsprechend annimmt, so wird

mit $h = 0$: $\qquad n_1 = A \qquad (61)$

mit $h = H_2 - H_1$: $\qquad n_2 = A + 2B(H_2 - H_1) + 3C(H_2 - H_1)^2 \qquad (62)$

Ob man in jedem Falle das Temperaturgesetz (59) kennt, das ist eine Frage, welche unsere Theorie zunächst nicht berührt. Die Theorie hatte nur die Aufgabe, den inneren Zusammenhang zwischen der Refraktion und den meteorologischen Elementen zu ermitteln, und zwar haben wir überall zunächst nur erste Näherungen berücksichtigt.

§ 129. Vergleichung der Refraktions-Theorie mit Beobachtungen.

Zuerst empfiehlt es sich, eine Übersichts-Tabelle für die theoretischen Werte k zu berechnen.

Wenn man zu diesem Zweck in (51) und (52) § 128. S. 460 unbestimmte Werte B, T, n einführt, das Konstante möglichst zusammenfasst und ein wenig umformt, so erhält man:

$$k = \frac{0,00029286}{MK} r \left(\frac{B}{760} \frac{1}{1+\varepsilon T}\right) (1 - \varepsilon T - \varepsilon n MK) \tag{1}$$

Wir setzen $k = 18464$, was später in § 146. näher begründet werden wird, den Erdhalbmesser rund $r = 6\,370\,000^m$, und erhalten damit aus (1):

$$k = 0,23264 \left(\frac{B}{760} \frac{1}{1+\varepsilon T}\right) (1 - \varepsilon T - 0,29389\, n) \tag{2}$$

Zur Berechnung einer Übersichts-Tafel wollen wir auch dieses nochmals zerfällen, und schreiben:

$$\frac{B}{760} \frac{1}{1+\varepsilon T} = \varrho = \text{Luftdichte} \tag{3}$$

$$k_0 = 0,23264 (1 - \varepsilon T - 0,29389\, n) \tag{4}$$

Damit wird: $\qquad k = k_0 \, \varrho \qquad (5)$

Hiernach sind die zwei folgenden Tafeln berechnet:

Tafel der Werte $k_0 = 0{,}23264\,(1 - \varepsilon T - 0{,}29389\,n)$

Abnahme der Luft-Temperatur für 1ᵐ Höhen-Zunahme	Luft-Temperatur T					
	— 10°	0°	+ 10°	+ 20°	+ 30°	+ 40°
$n = -0{,}005$	0,2754	0,2668	0,2583	0,2498	0,2412	0,2327
$n = 0{,}000$	0,2412	0,2326	0,2241	0,2156	0,2070	0,1985
$n = +0{,}005$	0,2070	0,1985	0,1899	0,1814	0,1729	0,1643
$n = +0{,}010$	0,1728	0,1643	0,1557	0,1472	0,1387	0,1302
$n = +0{,}015$	0,1386	0,1301	0,1216	0,1130	0,1045	0,0960
$n = +0{,}020$	0,1044	0,0959	0,0874	0,0788	0,0703	0,0618

Tafel der Luftdichte $\varrho = \dfrac{B}{760}\,\dfrac{1}{1 + 0{,}003665\,T}$

Luftdruck B	Luft-Temperatur T					
	— 10°	0°	+ 10°	+ 20°	+ 30°	+ 40°
600ᵐᵐ	0,8194	0,7895	0,7616	0,7356	0,7113	0,6885
650ᵐᵐ	0,8876	0,8553	0,8250	0,7969	0,7705	0,7459
700ᵐᵐ	0,9559	0,9210	0,8885	0,8581	0,8298	0,8033
730ᵐᵐ	0,9969	0,9605	0,9266	0,8949	0,8654	0,8377
760ᵐᵐ	1,0378	1,0000	0,9646	0,9317	0,9010	0,8722

Für mittlere Verhältnisse in Deutschland ist etwa $B = 730^{mm}$ und $T = +10°$, also die Luftdichte nach der zweiten Tafel $\varrho = 0{,}9266$, und nimmt man eine Lufttemperatur-Abnahme $n = 0{,}01$, d. h. 1° auf 100ᵐ Höhe, so giebt die erste Tafel für $n = 0{,}01$ und $T = +10°$ den Wert $k_0 = 1557$; man hat also zusammen:

$$k = 0{,}9266 \times 0{,}1557 = 0{,}144$$

Dieses stimmt nahezu mit dem Mittelwert der in Deutschland wirklich beobachteten Werte k, den wir bei § 120. S. 429 $k = 0{,}13$ angegeben haben.

Indessen die hier angenommene Lufttemperatur-Abnahme $n = 0{,}01$ oder 1° auf 100ᵐ Höhe stimmt *nicht* mit der in Deutschland meteorologisch beobachteten Temperatur-Abnahme, denn diese hat nach einer Abhandlung von *Hann* (LXI. Band der Sitzungsberichte der k. Akademie der Wissenschaften, II. Abtlg., Jan.-Heft, Jahrgang 1870, Wien) folgende Mittelwerte:

Abnahme der Luft-Temperatur für einen Höhen-Unterschied von 100ᵐ:

Monat	Westalpen	Nord-schweiz	Schwäbische Alb	Erz-gebirge	Harz	Mittel
Januar	0,45°	0,28°	0,21°	0,37°	0,33°	0,33°
Juli	0,67°	0,64°	0,57°	0,68°	0,71°	0,65°
Jahresmittel	0,58°	0,51°	0,44°	0,59°	0,57°	0,54°

Einige weitere Litteratur-Nachweise enthält die „Zeitschr. für Verm. 1877“, Ergänzungsheft S. (59)—(63).

Eine Verarbeitung der badischen und württembergischen meteorologischen Wärme-Beobachtungen von 40 Stationen in Hinsicht auf die Wärme-Änderung haben wir in der österreichischen „Zeitschr. f. Meteorologie 1880", S. 162—167, veröffentlicht. Die Höhen H der 40 Stationen sind zwischen 114^m und 1012^m über dem Meer, im Mittel 400^m, die geographischen Breiten φ sind zwischen 47° 41′ und 49° 46′. Die 10jährigen Jahresmittel t von 1869—1878 wurden von uns durch folgende Interpolations-Formel zusammengefasst:

$$t = 11{,}31° - 0{,}943\,\frac{H}{100} + 0{,}0307\left(\frac{H}{100}\right)^2 + 0{,}88\,(\varphi - 49°) \qquad (6)$$

Der mittlere übrigbleibende Fehler wurde $= \pm 0{,}61°$ und die mittleren Fehler der Coëfficienten wurden bzw.:

$$11{,}31 \pm 0{,}39 \quad , \quad 0{,}943 \pm 0{,}150 \quad , \quad 0{,}0307 \pm 0{,}0173 \quad , \quad 0{,}88 \pm 0{,}88.$$

Hiernach ist folgende Tabelle berechnet:

Mittlere Jahres-Temperatur in Südwest-Deutschland (1869—1887)

Höhe H	$\varphi = 47°$	$\varphi = 48°$	$\varphi = 49°$	$\varphi = 50°$	Δt für 100^m
0^m	13,1°	12,2°	11,3°	10,4°	(— 0,9°)
100	12,2	11,3	10,4	9,5	(— 0,9)
200	11,3	10,4	9,5	8,7	— 0,8
300	10,5	9,6	8,8	7,9	— 0,7
400	9,8	8,9	8,0	7,1	— 0,7°
500	9,1°	8,2°	7,4°	6,5°	— 0,6
600	8,5	7,6	6,8	5,9	— 0,5
700	8,0	7,1	6,2	5,3	— 0,5
800	7,5	6,6	5,7	4,8	(— 0,4)
900	7,1	6,2	5,3	4,4	(— 0,4)
1000	6,7	5,8	5,0	4,1	

Die Wärme-Abnahme für 100^m ist im Mittel etwa = 0,7°. Dass die Wärme-Abnahme unten erheblich stärker ist (0,9°) als oben (0,4), ist teils aus der eigentümlichen Lage der Stationen zu erklären, teils auch nur als Rechenform anzusehen, indem die Gleichung (6) zwar im ganzen die 40 Beobachtungen gut darstellt, aber nur interpolatorisch zwischen engen Grenzen Gültigkeit hat.

Wenn der thatsächlich beobachtete Mittelwert der Refraktion $k = 0{,}13$ eine stärkere Temperatur-Abnahme, etwa $n = 0{,}01$, verlangt als $n = 0{,}006$ oder 0,007, was etwa als Sommer-Mittel meteorologisch gefunden wurde, so wird sich das dadurch erklären, dass die hier benützten meteorologischen Beobachtungen an der Erdoberfläche, unter dem Einflusse der strahlenden Wärme des Erdbodens gemacht sind, während für die Lichtbahn die Wärme-Abnahme in *freier* Luft massgebend ist.

Die starken Refraktionen, über 0,2, welche man oft morgens und abends beobachtet, lassen sich nur durch *Zunahme* der Luft-Temperatur nach oben erklären (entsprechend *negativem* n in unseren Formeln).

Hiernach sind die zwei folgenden Tafeln berechnet:

Tafel der Werte $k_0 = 0{,}23264\,(1 - \varepsilon T - 0{,}29389\,n)$

Abnahme der Luft-Temperatur für 1ᵐ Höhen-Zunahme	Luft-Temperatur T					
	— 10°	0°	+ 10°	+ 20°	+ 30°	+ 40°
$n = -0{,}005$	0,2754	0,2668	0,2583	0,2498	0,2412	0,2327
$n = 0{,}000$	0,2412	0,2326	0,2241	0,2156	0,2070	0,1985
$n = +0{,}005$	0,2070	0,1985	0,1899	0,1814	0,1729	0,1643
$n = +0{,}010$	0,1728	0,1643	0,1557	0,1472	0,1387	0,1302
$n = +0{,}015$	0,1386	0,1301	0,1216	0,1130	0,1045	0,0960
$n = +0{,}020$	0,1044	0,0959	0,0874	0,0788	0,0703	0,0618

Tafel der Luftdichte $\varrho = \frac{B}{760}\,\frac{1}{1 + 0{,}003665\,T}$.

Luftdruck B	Luft-Temperatur T					
	— 10°	0°	+ 10°	+ 20°	+ 30°	+ 40°
600ᵐᵐ	0,8194	0,7895	0,7616	0,7356	0,7113	0,6885
650ᵐᵐ	0,8876	0,8553	0,8250	0,7969	0,7705	0,7459
700ᵐᵐ	0,9559	0,9210	0,8885	0,8581	0,8298	0,8033
730ᵐᵐ	0,9969	0,9605	0,9266	0,8949	0,8654	0,8377
760ᵐᵐ	1,0378	1,0000	0,9646	0,9317	0,9010	0,8722

Für mittlere Verhältnisse in Deutschland ist etwa $B = 730^{mm}$ und $T = +10°$, also die Luftdichte nach der zweiten Tafel $\varrho = 0{,}9266$, und nimmt man eine Lufttemperatur-Abnahme $n = 0{,}01$, d. h. 1° auf 100ᵐ Höhe, so giebt die erste Tafel für $n = 0{,}01$ und $T = +10°$ den Wert $k_0 = 1557$; man hat also zusammen:

$$k = 0{,}9266 \times 0{,}1557 = 0{,}144$$

Dieses stimmt nahezu mit dem Mittelwert der in Deutschland wirklich beobachteten Werte k, den wir bei § 120. S. 429 $k = 0{,}13$ angegeben haben.

Indessen die hier angenommene Lufttemperatur-Abnahme $n = 0{,}01$ oder 1° auf 100ᵐ Höhe stimmt *nicht* mit der in Deutschland meteorologisch beobachteten Temperatur-Abnahme, denn diese hat nach einer Abhandlung von *Hann* (LXI. Band der Sitzungsberichte der k. Akademie der Wissenschaften, II. Abtlg., Jan.-Heft, Jahrgang 1870, Wien) folgende Mittelwerte:

Abnahme der Luft-Temperatur für einen Höhen-Unterschied von 100ᵐ:

Monat	Westalpen	Nord-schweiz	Schwäbische Alb	Erz-gebirge	Harz	Mittel
Januar	0,45°	0,28°	0,21°	0,37°	0,33°	0,33°
Juli	0,67°	0,64°	0,57°	0,68°	0,71°	0,65°
Jahresmittel	0,58°	0,51°	0,44°	0,59°	0,57°	0,54°

Einige weitere Litteratur-Nachweise enthält die „Zeitschr. für Verm. 1877“, Ergänzungsheft S. (59)—(63).

§ 130. Täglich periodische Änderung der Refraktion.

Man hat schon frühe gefunden, dass die Refraktion einen ziemlich regelmässigen Tagesverlauf hat, dass sie morgens und abends bedeutend grösser ist als mittags.

General *Baeyer* hat diese Erfahrung bei seinem „Nivellement zwischen Swinemünde und Berlin“ gemacht, und er schloss daraus, dass der Refraktions-Coëfficient dem halben Tagebogen *proportional* sei, nämlich (S. 117 des „Nivellements von Swinemünde nach Berlin“):

$$k = 0{,}2132\, t$$

wo t die in Teilen des halben Tagebogens ausgedrückte Zeit ist. Hiernach wäre bei Sonnen-Aufgang und -Untergang $k = 0{,}2132$ und im wahren Mittag $k = 0$, d. h. im wahren Mittag wäre eine *Unstetigkeit* in der Änderung von k. Jedenfalls hat dieses Gesetz nur Geltung für diejenigen Tageszeiten, welche das Material dazu geliefert haben, nämlich für b zwischen 0,34 und 0,85. Da der Wert $k = 0$ und die Unstetigkeit, welche für den wahren Mittag aus der obigen Formel folgt, jedenfalls ganz unzulässig ist, kann man den Versuch machen, die Beobachtungen des Nivellements zwischen Swinemünde und Berlin (S. 115) in anderer Weise empirisch zu verwerten. Auch ist hiezu eine Ausscheidung von Vormittags- und Nachmittagszeiten nötig, welche von *Baeyer* zusammengenommen sind, denn keine der meteorologischen Grössen, welche die Refraktion beeinflussen, hat einen in Bezug auf den wahren (astronomischen) Mittag symmetrischen Verlauf. Durch graphische Behandlung der genannten Beobachtungen fand ich folgende Mittelwerte, wo t die Zeit in Teilen des halben Tagebogens bedeutet (Vormittags t negativ, Nachmittags t positiv gezählt):

Nivellement Swinemünde—Berlin:

	Vormittag									Nachmittag	
$t =$	−1,0	−0,8	−0,6	−0,4	−0,2	0,0	+0,2	+0,4	+0,6	+0,8	+1,0
$k =$	0,20	0,16	0,13	0,11	0,09	0,08	0,08	0,10	0,13	0,16	0,21

In dem Werke „Grossh. Mecklenburgische Landes-Vermessung“ von *Paschen* ist auch eine wertvolle Untersuchung über den Tagesverlauf der Refraktion enthalten (S. 241), von welcher wir einen Auszug in der „Zeitschr. f. Verm. 1883“, S. 362 gegeben haben, nämlich:

Mecklenburg:

$t =$	−1,0	−0,8	−0,6	−0,4	−0,2	0,0	+0,2	+0,4	+0,6	+0,8	+1,0
$k =$	0,18	0,15	0,13	0,11	0,10	0,10	0,10	0,11	0,13	0,15	0,17

Major *Hartl* im österreichischen Generalstabe hat solche Vergleichungen weiter ausgedehnt in einer längeren schätzenswerten Abhandlung: „Beiträge zum Studium der terrestrischen Strahlenbrechung“, Separatabdruck aus den „Mitteilungen des k. k. militär-geographischen Institutes“ III. Band 1883. Es wurden sechs Beobachtungsreihen behandelt, nämlich: 1) Gradmessung in Ostpreussen, 2) Nivellement Swinemünde—Berlin, 3) Küsten-Vermessung, 4) Preussische Landes-Triangulation, 5) Mecklenburgische Landes-Vermessung, 6) Ostseeprovinzen Russlands. Die Ausgleichung gab, ohne Unterscheidung von Vormittag und Nachmittag, folgendes:

Mittelwerte von *Hartl:*

	Mittag								Morgen oder Abend.		
$t =$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$k =$	0,10	0,10	0,11	0,11	0,12	0,13	0,13	0,15	0,16	0,17	0,19

Vergleichung der Theorie mit Zenitdistanz-Beobachtungen.

Wir haben die Formeln (51)—(54) § 128. S. 460 mit der längeren Beobachtungsreihe Kupferkuhle—Brocken verglichen, welche General *Baeyer* in dem Werke „Über die Strahlenbrechung in der Atmosphäre, Petersburg 1860" mitgeteilt hat.

Diese Vergleichsberechnung haben wir mit der Theorie selbst mitgeteilt in den „Astronomischen Nachrichten, 88. Band, 1876", S. 99—108 (abgedruckt in der vorigen Auflage 1877 dieses Werkes, S. 568—572).

Inzwischen hat auch Major *Hartl* unsere Formeln mit der Erfahrung verglichen, und zwar mit amerikanischen Messungen, nach dem „United States Coast Survey Report for 1876" mit 600^m Höhe.

Hartl hat dieses mitgeteilt in dem XVI. Band, April-Heft 1881, der „Meteorologischen Zeitschrift" (Separatabdruck S. 9, Tafel IV.).

Von den beiden Beobachtungsreihen der korrespondierenden Stationen *Bodega Head* und *Ross Mountain*, welche dort mitgeteilt sind, führen wir die erste hier vollständig vor, und geben von der zweiten wenigstens die Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung:

Stunde		*Refraktion Bodega Head* beobachtet:	berechnet:	Differenz:	*Ross Mountain* Differenz:
7^h	morgens	1′ 21,1″	1′ 13,7″	— 7,4″	— 13,6″
8	„	1 15,9	1 8,2	— 7,7	— 11,8
9	„	1 3,8	1 9,8	+ 6,0	— 1,3
10	„	1 2,8	1 7,6	+ 4,8	— 2,3
11	„	1 7,6	1 10,1	+ 2,5	+ 0,7
12	mittags	1 7,9	1 13,0	+ 5,1	+ 1,8
1	„	1 10,8	1 14,7	+ 3,9	+ 2,5
2	„	1 9,9	1 14,6	+ 4,7	— 1,8
3	„	1 11,5	1 16,2	+ 4,7	+ 1,6
4	„	1 12,1	1 14,2	+ 2,1	+ 2,3
5	abends	1 20,8	1 10,1	— 10,7	— 5,8
			Durchschnitt	± 5,4″	± 4,1″

Major *Hartl* bemerkt hiezu:

„Es muss als ein besonderer Vorzug der Refraktionsformel von Prof. *Jordan* angesehen werden, dass in derselben für die Temperatur-Abnahme mit der Höhe keine bestimmte Annahme gemacht, sondern dafür ein Coëfficient n eingeführt wird, für welchen der Rechner einen Zahlenwert oder auch komplizierteren Ausdruck einführen kann, welcher für die obwaltenden Umstände am geeignetsten erscheint."

Über die Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung, welche im vorstehenden im Durchschnitt $\pm 5{,}4''$ und $\pm 4{,}1''$ betragen, bemerkt Major *Hartl*: „Durch Differentiieren der Formel nach n fand ich, dass eine Änderung der Temperatur-Abnahme in der ganzen Luftsäule (von circa 600^m Höhe) um $+1°$ eine Refraktions-Änderung von $-3{,}8''$ hervorbringe, so dass es also nur geringer Korrektionen der beobachteten Lufttemperatur bedarf, um Beobachtung und Rechnung in Übereinstimmung zu bringen."

§ 130. Täglich periodische Änderung der Refraktion.

Man hat schon frühe gefunden, dass die Refraktion einen ziemlich regelmässigen Tagesverlauf hat, dass sie morgens und abends bedeutend grösser ist als mittags.

General *Baeyer* hat diese Erfahrung bei seinem „Nivellement zwischen Swinemünde und Berlin“ gemacht, und er schloss daraus, dass der Refraktions-Coëfficient dem halben Tagebogen *proportional* sei, nämlich (S. 117 des „Nivellements von Swinemünde nach Berlin“):

$$k = 0{,}2132\,t$$

wo t die in Teilen des halben Tagebogens ausgedrückte Zeit ist. Hiernach wäre bei Sonnen-Aufgang und -Untergang $k = 0{,}2132$ und im wahren Mittag $k = 0$, d. h. im wahren Mittag wäre eine *Unstetigkeit* in der Änderung von k. Jedenfalls hat dieses Gesetz nur Geltung für diejenigen Tageszeiten, welche das Material dazu geliefert haben, nämlich für b zwischen 0,34 und 0,85. Da der Wert $k = 0$ und die Unstetigkeit, welche für den wahren Mittag aus der obigen Formel folgt, jedenfalls ganz unzulässig ist, kann man den Versuch machen, die Beobachtungen des Nivellements zwischen Swinemünde und Berlin (S. 115) in anderer Weise empirisch zu verwerten. Auch ist hiezu eine Ausscheidung von Vormittags- und Nachmittagszeiten nötig, welche von *Baeyer* zusammengenommen sind, denn keine der meteorologischen Grössen, welche die Refraktion beeinflussen, hat einen in Bezug auf den wahren (astronomischen) Mittag symmetrischen Verlauf. Durch graphische Behandlung der genannten Beobachtungen fand ich folgende Mittelwerte, wo t die Zeit in Teilen des halben Tagebogens bedeutet (Vormittags t negativ, Nachmittags t positiv gezählt):

Nivellement Swinemünde—Berlin:

	Vormittag						Nachmittag				
$t =$	—1,0	—0,8	—0,6	—0,4	—0,2	0,0	+0,2	+0,4	+0,6	+0,8	+1,0
$k =$	0,20	0,16	0,13	0,11	0,09	0,08	0,08	0,10	0,13	0,16	0,21

In dem Werke „Grossh. Mecklenburgische Landes-Vermessung“ von *Paschen* ist auch eine wertvolle Untersuchung über den Tagesverlauf der Refraktion enthalten (S. 241), von welcher wir einen Auszug in der „Zeitschr. f. Verm. 1883“, S. 362 gegeben haben, nämlich:

Mecklenburg:

$t =$	—1,0	—0,8	—0,6	—0,4	—0,2	0,0	+0,2	+0,4	+0,6	+0,8	+1,0
$k =$	0,18	0,15	0,13	0,11	0,10	0,10	0,10	0,11	0,13	0,15	0,17

Major *Hartl* im österreichischen Generalstabe hat solche Vergleichungen weiter ausgedehnt in einer längeren schätzenswerten Abhandlung: „Beiträge zum Studium der terrestrischen Strahlenbrechung“, Separatabdruck aus den „Mitteilungen des k. k. militär-geographischen Institutes“ III. Band 1883. Es wurden sechs Beobachtungsreihen behandelt, nämlich: 1) Gradmessung in Ostpreussen, 2) Nivellement Swinemünde—Berlin, 3) Küsten-Vermessung, 4) Preussische Landes-Triangulation, 5) Mecklenburgische Landes-Vermessung, 6) Ostseeprovinzen Russlands. Die Ausgleichung gab, ohne Unterscheidung von Vormittag und Nachmittag, folgendes:

Mittelwerte von *Hartl:*

	Mittag								Morgen oder Abend.		
$t =$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$k =$	0,10	0,10	0,11	0,11	0,12	0,13	0,13	0,15	0,16	0,17	0,19

Um hievon einen Gebrauch zu machen, muss man noch eine übersichtliche Tabelle der Tagebögen oder der Aufgänge und Untergänge der Sonne haben, wie sie z. B. in des Verfassers „Grundzüge der astronomischen Zeit- und Ortsbestimmung, Berlin 1885," Anhang Seite [14] für die Breiten von Berlin und von Karlsruhe enthalten ist.

Um die Anwendung zu veranschaulichen, wollen wir folgendes annehmen: Man habe in Süddeutschland, am 15. Juli Nachmittags $5\frac{1}{2}$ Uhr, eine trigonometrische Beobachtung gemacht, welche Refraktion k ist zu nehmen?

Am 15. Juli geht in der Breite 49° von Karlsruhe, die Sonne auf um $4^h\ 13^m$ und unter um $7^h\ 58^m$. Dieses giebt:

Aufgang	*Beobachtung*	*Untergang*
$4^h\ 13^m$	$12^h + 5^h\ 30^m$	$12^h + 7^h\ 58^m$
$= 4{,}22^h$	$17{,}50^h$	$19{,}97^h$

$$b = \frac{19{,}97 - 4{,}22}{2} = 7{,}88^h \qquad \text{Mittag} = \frac{19{,}97 + 4{,}22}{2} = 12{,}10^h$$

(Die Abweichung des Mittags von $12{,}00^h$ rührt von der Zeitgleichung her.)

Nun ist die Beobachtungszeit $17{,}50^h$ um $5{,}50^h$ vom Mittag entfernt, und da der halbe Tagbogen $b = 7{,}88^h$ ist, hat man $t = \frac{5{,}50}{7{,}88} = 0{,}70$ in Teilen von b.

Geht man mit $t = 0{,}70$ in die obenstehende Tabelle von *Hartl* ein, so findet man $k = 0{,}15$.

Es kann keinem Zweifel unterliegen, dass auf diesem Wege eine Verfeinerung der gewöhnlichen Höhen-Berechnung mit *konstant* angenommenem Refraktions-Coëfficienten $k = 0{,}13$ erreicht werden könnte.

Einige durchlaufende Tagesreihen der Refraktion hat in letzter Zeit *Bauernfeind* beobachtet (s. S. 468).

§ 131. Litteratur über Refraktion.

1751. *Tobias Mayer*. De refractionibus objectorum terrestrium etc. Göttingen 1751.

Aus dem französischen Werk „la méridienne verifiée" P. II. p. X. werden 4 gegenseitige Zenit-Distanzmessungen mitgeteilt:

Erd-Centriwinkel ω =	35′ 36″	28′ 15,5″	12′ 52″	8′ 58″
Refraktion $r + \varrho$ =	4′ 57″	3′ 20,5″	1′ 22″	0′ 43″
$\frac{1}{8}\omega$ . . . . =	4′ 27″	3′ 32″	1′ 36,5″	1′ 7″

Hiernach ist der Refraktions-Coëfficient nahezu $k = \frac{1}{8}$.

1807. *Delambre*. Base du système métrique décimale u. s. w. Tome II 1807. S. 771—776.

Mittel aus 189 Beobachtungen, $\frac{1}{2}k = 0{,}08388$, oder $k = 0{,}16776$. Maximum $k = 0{,}5954$ Nr. 85, Minimum $k = -0{,}0070$, Nr. 12. S. 775—776 giebt Unterscheidungen für Sommer 0,15862, Winter 0,19486 u. s. w

1805. *Laplace*. Traité de mécanique céleste par *M. Laplace*, tome IV. Paris an XIII = 1805, Livre X. Chap. I. Des refractions astronomiques. Equation différentielle du mouvement de la lumière (3) S. 246.

1826. *Gauss*. Berliner astronomisches Jahrbuch für 1826, S. 91. Refraktions-Bestimmungen von der Hannoverschen Gradmessung.

Gauss giebt hier die 28 Refraktions-Bestimmungen der Hannoverschen Gradmessung, welche wir bereits in § 120. S. 429 mitgeteilt haben. Die Entfernungen haben zwischen 46′ 7″ und 2′ 42″ Centriwinkel (85^{km} und 5^{km}), das Mittel aus allen Bestimmungen mit Rücksicht auf die Längen der Linien ist 0,1306.

Von diesen 28 Bestimmungen sind 11 grösser und 17 kleiner, als der von *Gauss* angegebene Mittelwert 0,1306; dagegen 19 grösser und 9 kleiner, als das einfache arithmetische Mittel 0,1203. Die durchschnittliche Abweichung von dem arithmetischen Mittel 0,1203 ist $\pm$ 0,0354, und die durchschnittliche Abweichung von dem Mittelwert 0,1306 ist $\pm$ 0,0350.

Maximum $k = 0{,}2078$, Minimum $k = -0{,}1141$.

1831. *Struve.* Beschreibung der unter Allerhöchstem Kaiserlichem Schutze von der Universität zu Dorpat veranstalteten Breitengrad-Messung in den Ostsee-Provinzen Russlands, ausgeführt und bearbeitet in den Jahren 1821—1831 von *F. G. W. Struve*, Direktor der Dorpater Sternwarte. Dorpat 1831, S. 187, und „Astr. Nachr. 7. Band 1829", S. 394. Bei einer Entfernung von 1000 Toisen fand sich ein von der Refraktion herrührender wahrscheinlicher Fehler von $\pm$ 5,124″ für eine Zenit-Distanz. Indem *Struve* die Annahme macht, dass dieser Fehler proportional der Quadratwurzel der Entfernung ist, setzt er: $w = 0{,}05124'' \sqrt{D}$, wenn w der wahrscheinliche Fehler einer Zenit-Distanz, so weit er von der Refraktion herrührt, und D die Entfernung in Toisen ist.

Für Metermass rechnet man hieraus: $m = 1{,}721'' \sqrt{D}$, wenn m der mittlere Fehler einer Zenit-Distanz und D die Entfernung in Kilometern ist. Wenn $D = 5$, 10, 50 Kilometer beträgt, so wird das Verhältnis von m zu der Refraktion an dem einen Endpunkte der betrachteten Entfernung bzw. $=$ 0,36, 0,26 und 0,12. Hiebei waren die Tageszeiten ausgewählt.

1837. *Fuss, Sawitsch* und *Sabler.* Ermittlung des Höhen-Unterschiedes zwischen dem schwarzen und kaspischen Meer. S. 227—248 und S. 251.

Einfaches Mittel aus 292 Beobachtungen 0,1108 mit durchschnittlicher Abweichung vom Mittel, $\pm$ 0,1652; 83 Beobachtungen mit etwa 1800^m entfernten Zielpunkten $k = 0{,}1752$ mit dem wahrscheinlichen Fehler 0,0038, ferner 61 Beobachtungen mit doppelt so weit entfernten Zielpunkten $k = 0{,}1768 \pm 0{,}0026$. Maximum $= 1{,}506$, Minimum $= -0{,}940$.

Eine empirische Formel für den Refraktions-Coëfficienten wurde von *Struve* bestimmt, derselbe fasste die bei der Ermittlung des Höhen-Unterschiedes zwischen dem schwarzen und kaspischen Meer (S. CVI und CVII) gewonnenen Resultate zusammen in der Formel:

$$k = 0{,}1448 \left(1 + \frac{1{,}79}{A}\right) \frac{B}{736{,}6}\, 1{,}012^{20-T}$$

Es bedeutet hierin: A die mittlere Höhe der Gesichtslinie über dem Boden; B den auf 0^0 reduzierten Barometerstand am Beobachtungsort in Millimetern; T die Lufttemperatur am Beobachtungsort in C^0.

1838. *Bessel.* Gradmessung in Ostpreussen, u. s. w.

Auf S. 196 werden folgende 9 Bestimmungen des Refraktions-Coëfficienten k mitgeteilt, welche bei Entfernungen über 14000 Toisen ($=$ 27 Kilometer) erhalten wurden:

1) 0,1437	4) 0,1406	7) 0,1313
2) 0,1397	5) 0,1264 (Min.)	8) 0,1456
3) 0,1538 (Max.)	6) 0,1298	9) 0,1276

Das einfache Mittel dieser 9 Werte ist $k = 0{,}1376$ und das von *Bessel* mit Rücksicht auf die verschiedenen Entfernungen berechnete Mittel ist $k = 0{,}1370$. Die durchschnittliche Abweichung von dem einen oder anderen Mittel ist $= \pm$ 0,0079. Diese geringe Abweichung ist dadurch zu erklären, dass die angegebenen 9 Werte selbst Mittel aus längeren Reihen von Beobachtungen sind, und dass nur bei gutem normalem Wetter beobachtet wurde.

1840. *Baeyer.* Nivellement zwischen Swinemünde und Berlin, auf dienstliche Veranlassung ausgeführt von *J. J. Baeyer*, Major im Generalstabe, mit einer Übersichtskarte. Berlin 1840.

Auf S. 115 dieses Werkes werden 60 einzelne Refraktions-Bestimmungen vom 4. Aug. bis 20. Septbr. 1835 mitgeteilt; deren einfaches arithmetisches Mittel ist $k = 0{,}1412$. Von diesen 60 Einzelwerten k sind 36 kleiner und 24 grösser als das arithmetische Mittel 0,1412. Die durchschnittliche Abweichung einer Einzelbestimmung vom arithmetischen Mittel ist $\pm$ 0,0258 oder etwa $\pm \frac{1}{5} k$. Das Maximum ist $= 0{,}2668$, das Minimum $= 0{,}0424$. Die Beobachtungszeiten sind ungefähr auf 7^h—10^h vormittags und 2^h—5^h nachmittags beschränkt.

Baeyer fand, dass die Refraktion morgens und abends grösser als mittags ist, und schloss daraus auf Proportionalität zwischen der Refraktion und der Zeit in Teilen des halben Tagebogens, wie wir bereits in § 130. S. 465 mit einer graphischen Neu-Ausgleichung angegeben haben. Wir haben für diese 60 Werte k auch die Verteilung nach dem Fehlerwahrscheinlich-

keitsgesetz (Band I. § 95.) untersucht, und folgendes gefunden, mit den Grenzen Null und $n$facher wahrscheinlicher Fehler, wobei der wahrscheinliche Fehler $r = 0,0220$ ist:

Grenzen 0 und nr	$n =$	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	∞
" " " "	$nr =$	0,011	0,022	0,033	0,044	0,055	0,066	0,077	0,088	∞
Theorie:		15,8	30,0	41,3	49,4	54,5	57,4	58,9	59,6	60,0
Erfahrung:		23	35	43	48	54	56	57	57	60.

1849. *Baeyer.* Die Küstenvermessung und ihre Verbindung mit der Berliner Grundlinie u. s. w. von *J. J. Baeyer*, Oberst. Berlin 1849.

S. 488. 6 Bestimmungen über See mit dem einfachen Mittelwert $k = 0,1949$.

S. 489—490. 16 Bestimmungen in den Küstendreiecken, einfaches Mittel $k = 0,1368$, mit Rücksicht auf die Entfernungen nach *Baeyer*, $k = 0,1362$.

S. 490. Binnenland 19 Bestimmungen, einfaches Mittel $= 0,1230$, Mittel mit Rücksicht auf die Entfernungen nach *Baeyer*, $k = 0,1239$.

S. 560—564. Zusammenstellung aller Bestimmungen, nach der Tageszeit geordnet.

S. 564. 28 Beobachtungen des Meereshorizontes geben im einfachen Mittel $k = 0,1515$.

1860. *Baeyer.* Mémoires de l'académie impériale des sciences de St. Pétersbourg, VIIe série. Tome III, Nr.5. Über die Strahlenbrechung in der Atmosphäre, von *J. J. Baeyer*, kgl. Preuss. Generallieutenant, korrespondierendem Mitgliede der Akademie. Der Akademie vorgelegt am 1. Juni 1860. St. Petersburg, 1860. Leipzig.

S. 46 gibt als Beobachtungen eine korrespondierende Tagesreihe mit Zenit-Distanzen, Barometer, Lufttemperatur und Psychrometer zwischen den Stationen *Kupferkuhle* und *Brocken* im Harz, Entfernung 47843^m, Höhen-Unterschied $= 971^m$.

1861. *Bruhns.* Die astronomische Strahlenbrechung in ihrer historischen Entwicklung dargestellt von Dr. *C. Bruhns*, eine gekrönte Preisschrift. Leipzig 1861. S. 86—88 Entwicklung der Differentialgleichung für die Refraktion.

1864 *Bauernfeind.* Die atmosphärische Strahlenbrechung auf Grund einer neuen Aufstellung über die physikalische Konstitution der Atmosphäre, von Prof. Dr. *C. M. Bauernfeind*. Astronomische Nachrichten, 62. Band, Nr. 1478—1480, S. 209—252.

1866. *Bauernfeind.* Die atmosphärische Strahlenbrechung u. s. w. Fortsetzung. Astr. Nachrichten 67. Band, Nr. 1587—1590, S. 33—88.

Bauernfeind legt die Annahme zu Grunde:

$$\frac{\vartheta'}{\vartheta} = \left(\frac{p'}{p}\right)^{1/6} = \left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^{1/5} = \frac{h'}{h}$$

wobei bedeutet: ϑ und ϑ' die absoluten Lufttemperaturen,
p und p' die Luftdrücke,
ϱ und ϱ' die Luftdichten,
h und h' die Atmosphärenhöhen.

(vgl. hiezu *Helmert*, Physikalische Theorieen der höheren Geodäsie II. Band § 15. kritische Bemerkungen.)

1876. *Jordan.* Ein Beitrag zur Theorie der terrestrischen Refraktion. Astronomische Nachrichten, 88. Band Nr. 2095, S. 99—108, Mai 1876.

(Im wesentlichen der Inhalt unseres vorstehenden § 128.)

1880. *v. Bauernfeind.* Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestrischen Refraktion, von *Carl Max v. Bauernfeind.* Erste Mitteilung, enthaltend die Feststellung von Thatsachen. Separatabdruck aus den Abhandlungen der K. Bayer. Akademie der Wissenschaften. II. Kl., XIII. Bd., III. Abt. München 1880.

1881. *Hartl.* Über den Zusammenhang zwischen der terrestrischen Strahlenbrechung und den meteorologischen Elementen. Von *Heinrich Hartl*, k. k. Hauptmann im militär-geographischen Institute. Separatabdruck aus dem XVI. Bd., April-Heft 1881, der meteorologischen Zeitschrift.

1882. *Paschen.* Grossherzoglich Mecklenburgische Landes-Vermessung. I. Teil. Die trigonometrische Vermessung, ausgeführt durch die Grossh. Mecklenb. Landes-Vermessungs-Kommission, unter der wissenschaftlichen Leitung von *F. Paschen* u. s. w. Schwerin 1882.

S. 201—242 trigonometrische Höhen-Bestimmungen erster Ordnung.

1883. *Hartl.* Beiträge zum Studium der terrestrischen Strahlenbrechung, von *Heinrich Hartl*, k. k. Major des Armeestandes, Leiter der geodätischen Gradmessungs-Arbeiten des k. k. militär-geographischen Instituts. (Separatabdruck aus den „Mitteilungen des k. k. militär-geograph. Institutes", III. Band 1883.)

1883. *v. Bauernfeind.* Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestrischen Refraktion, von *Karl Max v. Bauernfeind*. Zweite Mitteilung, enthaltend weitere Thatsachen und ihre Erklärung. Mit zwei Steindruck-Tafeln. Aus den Abhandlungen der K. Bayer. Akademie der Wissenschaften. II. Kl., XV. Bd., I. Abtlg. München 1883. (Mehrere durchlaufende Tagesreihen.)

1884. *Dietze.* Trigonometer der Landes-Aufnahme, hat in der Zeitschr. f. Verm. 1884, S. 245—259 eine Mitteilung gebracht über Refraktions-Bestimmungen bei Triangulierungen niederer Ordnung, wobei er den Refraktions-Coëfficienten k als Funktion der Entfernung s darstellte und mit der Entfernung etwas wachsend fand. Wir haben aus den *Dietze*schen Tabellen folgenden Auszug gebildet für zwei Entfernungen $s = 10000^m$ und $s = 15849^m$ (entsprechend $\log s = 4{,}000$ und $\log s = 4{,}200$):

	I. Ebene		II. Hügelland		III. Gebirgsland	
	$s = 10000^m$	$s = 15849^m$	$s = 10000^m$	$s = 15849^m$	$s = 10000^m$	$s = 15849^m$
	$k =$	$k =$	$k =$	$k =$	$k =$	$k =$
Brandenburg	0,090	0,147	0,100	0,127	0,119	0,121
Oberschlesien	0,101	0,204	0,107	0,133	0,111	0,147
Elsass-Lothringen	0,011	0,113	0,100	0,117	0,127	0,139

Mittel aus diesen 18 Werten: $k = 0{,}134$.

1884. *Hartl.* Über mittlere Refraktions-Coëfficienten, von *Heinrich Hartl*, k. k. Major des Armeestandes, Leiter der geodätischen Gradmessungs-Arbeiten des k. k. militär-geograph. Institutes. (Separatabdruck aus den „Mitteilungen des k. k. militär-geograph. Institutes". IV. Band, 1884.

1884. *Helmert.* Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie. II. Teil: Die physikalischen Theorien.

8. Kapitel. Die trigonometrische Höhenmessung. Theoretische Formel für den Refraktions-Coëfficienten (12) S. 577. § 14. S. 584—587 *Bauernfeinds* Refraktions-Theorie; § 15. S. 587 bis S. 590: kritische Bemerkungen hiezu. § 16. S. 590—592: „Refraktions-Theorie von *Jordan*", mit der Schlussbemerkung S. 592: „Die Formeln haben vor den *Bauernfeind*schen allerdings den Vorzug, die wirkliche Temperatur-Abnahme mit der Höhe zu berücksichtigen: so gut als dies eben möglich ist, wenn nur an den Endpunkten*) Beobachtungen über dieselbe vorliegen. Umgekehrt gestatten sie auch aus Refraktions-Beobachtungen einen mehr oder weniger sicheren Rückschluss auf die Temperatur-Verhältnisse."

Kapitel XII.

Barometrische Höhenmessung.

§ 132. Grundzüge der Theorie.

Die barometrische Höhenmessung beruht auf der Bestimmung des Luftdrucks in verschiedenen Schichten der Atmosphäre.

*) Man kann auch *andere* meteorologische Beobachtungen als an den *Endpunkten* benützen, um eine Funktion (59) oder (60) § 128. S. 461 für die Lufttemperatur zu bestimmen, und damit die Refraktionsformeln (51)—(54) § 128. S. 460 anzuwenden.

Ehe wir die Instrumente kennen lernen, welche zur Messung des Luftdrucks dienen, und ehe wir die vollständige Theorie der Höhenberechnung vornehmen, schicken wir hier die *Grundzüge* dieser Theorie voraus, um dadurch einen ersten Überblick über die Gesamtaufgabe zu gewinnen, welche uns nachher beschäftigen wird.

I. Das Mariotte'sche Gesetz.

Das Volumen eines Gases ändert sich bei konstanter Temperatur umgekehrt proportional dem Druck, und die Dichte des Gases ändert sich hiernach proportional dem Druck; man hat also in Zeichen:

	Druck	*Volumen*	*Dichte*
Anfangszustand	p_0	v_0	Δ_0
Endzustand	p	v	Δ

$$\frac{p}{p_0} = \frac{v}{v_0} = \frac{\Delta}{\Delta_0} \tag{1}$$

Die Drücke p_0 und p sind dabei auf eine beliebige Flächeneinheit bezogen.

II. Das Gay-Lussac'sche Gesetz.

Die Erwärmung eines Gases bei konstantem Druck hat eine Volumänderung zur Folge, welche der Temperaturänderung proportional ist.

	Volumen	*Temperatur*
Anfangszustand	v_0	0
Endzustand	v	$0 + t$

$$v = v_0 (1 + \varepsilon t) \tag{2}$$

Der Coëfficient ε dieser Gleichung hat den Wert:

$$\varepsilon = 1{,}003665 \text{ *)} \tag{3}$$

Derselbe Coëfficient gilt nahezu für alle permanenten Gase, und kann näherungsweise auch für Kohlensäure und Wasserdampf genommen werden.

Die Reciproke von ε ist:

$$\frac{1}{\varepsilon} = 272{,}85 \text{ oder rund } = 273 \tag{4}$$

Dem entsprechend schreibt man das *Gay-Lussac*sche Gesetz, statt in der Form (2) häufig in der anderen Form:

$$\frac{v}{v_0} = \frac{273^\circ + t}{273^\circ} \tag{5}$$

Indem man nun $273^\circ + t$ die absolute Temperatur nennt (-273° absoluter Nullpunkt), kann man das *Gay-Lussac*sche Gesetz auch so aussprechen: die Volumina derselben Gasmenge verhalten sich, bei unverändertem Druck, wie ihre absoluten Temperaturen.

III. Das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz.

Die Verbindung der beiden soeben erwähnten Gesetze giebt folgendes:

---

*) Bestimmung von *Regnault* (Comptes rendus, 20. Band, 1845, S. 988) zwei Versuche: 0,003667 und 0,003663, im Mittel 0,003665.

Ein Gas-Volumen v_0 stehe unter dem Druck p_0 und habe die Temperatur $0°$; nachdem der Druck den Wert p und die Temperatur den Wert t angenommen hat, wird das Volumen:

$$v = v_0 \frac{p_0}{p}(1 + \varepsilon t) \tag{6}$$

Wenn Δ_0 die Dichte für den Anfangszustand, und Δ die Dichte für den Endzustand bedeutet, so hat man:

$$\frac{v}{v_0} = \frac{\Delta_0}{\Delta} = \frac{p_0}{p}(1 + \varepsilon t) \tag{7}$$

oder

$$\Delta = \Delta_0 \frac{p}{p_0} \frac{1}{1 + \varepsilon t} \tag{8}$$

Barometrische Höhenmessung.

Nach Andeutung von Fig. 1. betrachten wir einen vertikalen Luft-Cylinder, von beliebigem Querschnitt, weshalb der Querschnitt $=1$ gesetzt werden soll.

An irgend einer Stelle in der Höhe H über der Meeresfläche AB, sei der Luftdruck $=p$, und in der Höhe $H + dH$ sei der Luftdruck $= p - dp$. Man kann die Druck-Abnahme dp angeben, welche der Höhen-Zunahme dH entspricht, wenn man die Dichte Δ der Luft an der betreffenden Stelle und die Schwerebeschleunigung g kennt. Die Druckänderung dp ist nämlich gleich dem Gewicht des kleinen Luft-Cylinders von der Höhe dH.

Fig. 1.

Da der Querschnitt $= 1$ angenommen wurde, ist das Volumen des fraglichen kleinen Luft-Cylinders $= 1 \times dH = dH$, die Masse $= \Delta\, dH$, und das Gewicht $= \Delta g\, dH$, wir haben also nun:

$$dp = -\Delta g\, dH \tag{9}$$

Die hier vorkommende Luftdichte Δ ist durch das *Mariotte-Gay-Lussac*sche Gesetz bestimmt, und setzt man demnach Δ aus (8) in (9), so erhält man:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\Delta_0}{p_0} g \frac{1}{1 + \varepsilon t} dH \tag{10}$$

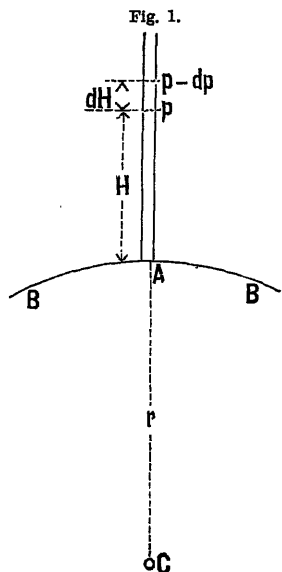
Indem man Δ_0, p_0, g und t als konstant behandelt, kann man sofort integrieren (indem lp den natürlichen Logarithmus von p bezeichnet):

$$l p = -\left(\frac{\Delta_0}{p_0} \frac{g}{1 + \varepsilon t}\right) H + Const. \tag{11}$$

Die Integrations-Konstante soll dadurch bestimmt werden, dass man zwei Drücke p und P mit entsprechenden Höhen H und H' annimmt; dann hat man zu (11) noch eine zweite Gleichung:

$$l P = -\left(\frac{\Delta_0}{p_0} \frac{g}{1 + \varepsilon t}\right) H' = Const. \tag{12}$$

Die Verbindung der beiden Gleichungen (11) und (12) giebt:

$$l P - l p = \left(\frac{\Delta_0}{p_0} \frac{g}{1 + \varepsilon t}\right)(H - H') \tag{13}$$

$H - H'$ ist die Differenz der beiden absoluten Höhen, wir setzen deshalb $H - H' = h$; zugleich gehen wir von den natürlichen Logarithmen zu den briggischen Logarithmen (log) über, nämlich:

$$l\,P = \frac{1}{M} \log P \quad , \quad lp = \frac{1}{M} \log p \quad , \quad \text{wo } M = 0{,}434295$$

$$\text{oder } l\,P - lp = \frac{1}{M} (\log P - \log p) \quad \text{oder} \quad = \frac{1}{M} \log \frac{P}{p}$$

Damit wird (13) in diese Form gebracht:

$$h = \frac{1}{M} \frac{p_0}{\Delta_0\, g} (1 + \varepsilon\, t) \log \frac{P}{p} \tag{14}$$

Was nun p_0 , Δ_0 , g betrifft, so genügt es uns hier, zunächst zu wissen, dass diese Werte als konstant in unsere Entwicklung eingegangen sind, und wir fassen deswegen zusammen:

$$\frac{1}{M} \frac{p_0}{\Delta_0\, g} = K = 18464 \tag{15}$$

damit wird (14):

$$h = K \log \left(\frac{P}{p}\right) (1 + \varepsilon\, t) \tag{16}$$

Dieses ist im wesentlichen die barometrische Höhen-Formel, und zwar ist $K = 18464$ ein Wert, der für Mittel-Europa gilt. Die Lufttemperatur t, welche bei der Integration in (11) als konstant behandelt wurde, wird in der Formel (16) einfach dadurch berücksichtigt, dass man das Mittel der oben und unten gemachten Lufttemperatur-Messungen als den Wert t nimmt.

Die Formel (16) genügt uns zunächst, um einzusehen, dass die *Messungen* für solche Höhenbestimmungen zunächst sich auf die Luftdrücke P und p und auf die Lufttemperatur zu erstrecken haben, woran sich noch Weiteres anreihen wird. Die Theorie werden wir später in § 145. weiter fortsetzen, und wir werden uns dann zuerst mit der Zusammensetzung von K nach (16) weiter zu beschäftigen haben.

Indessen für die gewöhnlichen praktischen Zwecke wird auch die spätere feinere Theorie keine andere Formel als die vorstehende (16) bieten, welche in Verbindung mit unseren Hilfstafeln zur gewöhnlichen praktischen Höhenmessung ausreicht.

§ 133. Das Quecksilber-Barometer.

Das wichtigste Instrument zur Bestimmung des Luftdrucks ist das von *Torricelli* (1643) erfundene Quecksilber-Barometer.

Man kann die verschiedenen Arten solcher Barometer in zweifacher Weise einteilen:

1) Einteilung nach der Anordnung des Quecksilber-Behälters:

Gefässbarometer und Heberbarometer.

2) Einteilung nach der Art des Gebrauchs:

Standbarometer und Reisebarometer.

Wir beschränken uns hier auf ausführliche Beschreibung eines Gefässbarometers als Standbarometer und eines Heberbarometers als Reisebarometer.

I. Gefässbarometer als Standbarometer. Fig. 1.

Die oben geschlossene Barometerröhre *AA* taucht unten in ein Gefäss *B* ein, so dass das in dem letzteren enthaltene Quecksilber mit dem Quecksilber der Röhre selbst in ununterbrochenem Zusammenhange bleibt. Um die Wirkungsweise verständlich zu machen, geben wir zuerst in Kürze an, wie das Instrument verfertigt wird:

Die Röhre wird in umgekehrter Lage mit Quecksilber gefüllt (wobei Auskochen zur Austreibung der fest am Glase haftenden Luft nötig ist), und dann vollständig verschlossen umgekehrt, worauf Öffnung des Verschlusses erst stattfindet, nachdem die Röhrenöffnung unter den Flüssigkeitsspiegel im Gefäss *B* gebracht worden ist; das Quecksilber sinkt sodann in der Röhre so weit, dass die verbleibende Säule dem äusseren Luftdruck das Gleichgewicht hält. Im oberen Teil der Röhre entsteht ein leerer Raum. (*Torricelli*sche Leere.)

Wenn die Röhre sich in diesem Zustande befindet, hat man darauf auszugehen, den Höhenunterschied zwischen dem höchsten Punkt des Quecksilbers oben in der Röhre und dem Quecksilberspiegel im Gefäss zu messen. Hiezu dient ein Massstab *MS*, welcher mit einer Spitze *S* unten auf der Quecksilberoberfläche aufsteht, und oben eine Teilung trägt. Ob die Spitze *S* genau in der Quecksilberoberfläche endigt, kann man darnach beurteilen, dass das im Quecksilber unten zu sehende Spiegelbild der Spitze unmittelbar an die Spitze selbst sich anschliesst. Man kann den ganzen Massstab *MS* mit Hilfe einer Richte-Vorrichtung *C* wenig heben und senken, um die richtige Lage der Spitze zu erzielen.

Oben ist, längs des Massstabs, mittelst Zahnstange und Getriebe *D* verschiebbar, die Ablesevorrichtung *N* angebracht, bestehend aus einem Ring, der die Glasröhre umschliesst, und einem Nonius, dessen Nullpunkt in der Höhe der Ringunterkante liegt. Man zielt längs der diesseitigen und jenseitigen Unterkante des Rings, und verschiebt dabei den Ring mittelst des Getriebes *D* so, dass die Ziellinie die Quecksilberoberfläche berührt; dann liest man am Nonius den Barometerstand ab. Eine Lupe ist dazu nicht unbedingt nötig, weil man auch ohne eine Lupe 0,1 Millimeter richtig erhält.

Zur Ermittlung der Quecksilbertemperatur ist ein Thermometer *T* in möglichst inniger Verbindung mit der Quecksilberröhre angebracht. Unsere Zeichnung zeigt jedoch noch ein zweites Thermometer *T'*, welches zunächst zur Kontrole des ersten dient, welches aber auch noch einen besonderen Zweck erfüllt. Das Thermometer *T'* hat links

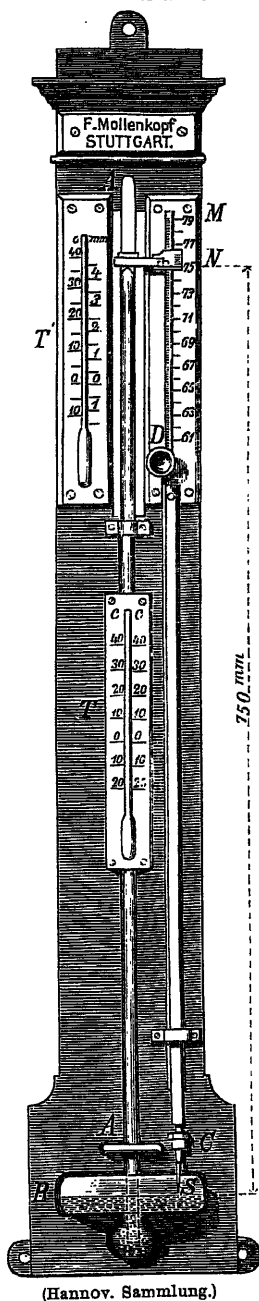
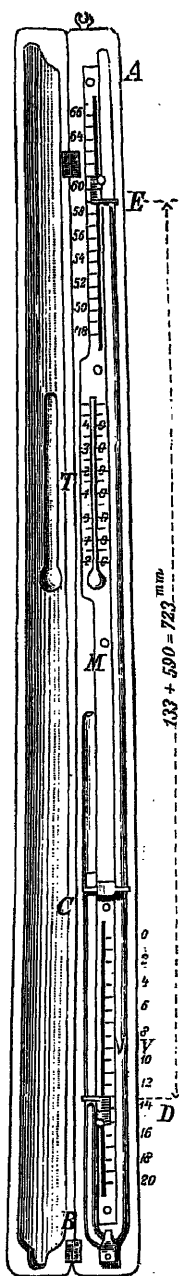
Fig. 1.
Standbarometer mit Gefäss.

(Hannov. Sammlung.)

Fig. 2.
Heberbarometer als Reise-Barometer.

Fig. 2a.
Verschluss $K K_2$ und *Bunten*sche Spitze D.

(Hannov. Sammlung.)

eine gewöhnliche Skale (C°), und ausserdem rechts eine nach Millimetern bezifferte Skale, welche unmittelbar die Reduktion des Barometerstandes auf 0°, entsprechend einem gewissen mittleren Barometerstand, näherungsweise, jedoch für die meisten Zwecke hinreichend genau, abzulesen gestattet (vgl. S. 477).

Wenn der Quecksilberstand in der Röhre steigt oder fällt, so fällt oder steigt auch der Quecksilberspiegel unten im Gefäss, allerdings nicht in gleichem Mass, weil das Gefäss viel grösseren Querschnitt hat, als die Röhre, indessen ist doch die Höhenänderung des Quecksilberstandes im Gefäss nicht unbedingt zu vernachlässigen. Da es nicht bequem wäre, bei jeder Beobachtung die Spitze S neu einzustellen, um den Höhenunterschied beider Quecksilberspiegel immer unmittelbar abzulesen, stellt man die Spitze entsprechend einem normalen Barometerstand B_n, und bringt für andere Stände B eine Gefässkorrektion in Rechnung, entsprechend der Gleichung:

$$\text{Gefässkorrektion} = +(B - B_n)\left(\frac{d}{D}\right)^2 \qquad (1)$$

wo d der innere Durchmesser der Röhre und D der innere Durchmesser des Gefässes ist. Häufig hat man $\frac{d}{D} = \frac{1}{10}$, also die Gefässkorrektion $= \frac{B - B_n}{100}$, wonach auch zu beurteilen, ob und mit welchem Schaden man etwa diese Korrektion vernachlässigen kann.

Die Prüfung und eventuell Berichtigung des Instruments erstreckt sich auf den leeren Raum oben in der Röhre und auf den Massstab.

Ob der obere Röhrenraum luftleer ist, untersucht man durch Neigen des Instruments, bis das Quecksilber mit scharfem Klang an das Glas anschlägt, und ohne Luftblase die Röhre füllt. Bei einem Standbarometer kann man diese Untersuchung nicht jederzeit anstellen, am besten bei der Aufstellung selbst

Die Untersuchung des Massstabes kann in selbständiger Weise nur dadurch geschehen, dass man denselben herausnimmt, und auf einen Comparator bringt. Indessen wird es oft genügen, die Ablesungen an dem Barometer mit den Ablesungen an einem *anderen* guten Instrument zu vergleichen, zumal da solche Barometervergleichung für andere Zwecke ohnehin nötig ist.

II. Heberbarometer als Reisebarometer. Fig. 2.

Eine heberartig umgebogene Glasröhre $A\,B\,C$ ist in umgekehrter Lage (A unten) mit Queck-

silber gefüllt worden; wendet man nun die Röhre um, so sinkt das Quecksilber bei *A* herunter nach *E*, und steigt in dem kurzen Schenkel bis zu dem Punkte *D*. Das Quecksilber wird sich in beiden Schenkeln in solche Höhe stellen, dass die Säule *D E* dem äusseren Luftdruck das Gleichgewicht hält.

Die Röhre ist an einem hölzernen Schafte befestigt, der ausserdem einen Massstab *M* trägt. Dieser Massstab ist nur in der Mitte mit dem Schafte vollkommen befestigt, und kann sich an den Enden frei ausdehnen. Die Enden des Massstabes sind mit Teilungen versehen, deren gemeinsamer Nullpunkt sich auf der unteren Teilung (etwas unterhalb *C*) befindet, so dass die Entfernung *E D* sich als Summe der beiden Ablesungen ergiebt. Die Einstellung erfolgt durch Ringe, welche die Röhre umfassen; und das Ablesen geschieht mittelst Nonien, welche mit den Ringen fest verbunden, längs den Teilungen von freier Hand verschoben werden. Ein Thermometer *T* liefert die Temperatur des Quecksilbers und des Massstabes.

Der Verschluss der Röhre bei *C* und bei *B* wird durch einfache Korkstöpsel erzielt, welche an einem Fischbeinstab gemeinsam befestigt sind. Dieser Korkverschluss hat die nötige Elastizität, so dass noch Ausdehnung des Quecksilbers möglich ist, wenn nach der Verschliessung sich das Quecksilber erwärmt.

In Fig. 2a. S 474 ist der Korkstöpsel-Verschluss K K_2 und weitere Einzelheiten besonders gezeichnet (nach *Schreiber*, Handbuch der barometrischen Höhenmessungen, Weimar 1877, S. 64, Verschluss von *Greiner* und *Bunten*sche Spitze *D*).

Beim Niederdrücken des Verschlussstabes *F* drücken die Korkstöpsel *K* oben und K_2 bei *A* unten sich fest.

Die eigentümliche Anordnung der zwei Spitzen bei *C* und bei *D* (Fig 2a.) hat den Zweck, das Eindringen von Luft auf dem Wege vom kurzen, offenen Schenkel in den langen geschlossenen Schenkel zu verhindern, denn Luftblasen, welche etwa nach *B* gelangen, werden sich dort in der Ausbuchtung sammeln, und erst wenn *B* mit Luft gefüllt ist, nach *C* dringen. Ähnlich verhält es sich mit der Ausbuchtung bei *E* und der in *E* hineinragenden sogenannten *Bunten*schen Spitze *D*.

Vor dem Ablesen des Barometerstandes klopft man ein wenig an dem Instrument, um die Reibung des Quecksilbers am Glase überwinden zu helfen.

Die beiden einfachen Instrumente, welche wir im vorstehenden beschrieben haben, genügen im allgemeinen als Stand- und Reise-Instrumente. Das Standbarometer Fig. 1. S. 473 hat die Form, wie sie auf den deutschen meteorologischen Stationen im Gebrauche ist. Das Heberbarometer Fig. 2. S. 474 haben wir im Winter 1873—74 auf der *Rohlfs*schen Expedition in die libysche Wüste mitgeführt und dabei ganz zweckentsprechend gefunden.

Will man ein feineres Instrument als *Reise*barometer wählen, so ist immer zu bedenken, dass die Barometergenauigkeit auf Reisen nicht wohl mehr gesteigert werden kann, als dass man $0{,}1^{mm}$ noch bestimmen kann, und namentlich, dass einseitige *optische* Verfeinerung wenig Wert hat.

§ 134. Temperatur-Korrektion des Quecksilber-Barometers.

Zuerst handelt es sich um die Reduktion der Quecksilber-Barometerstände auf die Normaltemperatur 0°.

Wenn eine Quecksilbermenge samt der umhüllenden Glasröhre erwärmt wird, so dehnt sich die Glasröhre unter Beibehaltung ihrer geometrischen Form aus, das

Quecksilber dehnt sich mehr aus, und muss daher in der Röhre steigen. Wir bezeichnen den Coëfficienten für die kubische Ausdehnung des Quecksilbers in Glasröhren mit q, so dass eine Quecksilbersäule, welche in einer Glasröhre bei 0° die Höhe B hat, bei $t°$ in derselben Glasröhre die Höhe $B\,(1+q\,t)$ hat.

Dieser Wert q wird allgemein nach *Regnault* für $C°$ so angenommen:

$$q = \frac{1}{5550} = 0{,}00018018 \tag{1}$$

Die *Regnault*schen Versuche von 1847 haben vor kurzem eine Neubearbeitung erfahren, welche veröffentlicht ist in dem Werke: „Travaux et mémoires du bureau international des poids et mesures" II. Band, Paris 1883. Einen Bericht hierüber haben wir in der „Zeitschr. f. Verm. 1884" S. 488—495 gegeben, und haben hieraus:

$t =$	$(1+q\,t) =$	$q =$	
10°	1,0018179	0,00018179	
20°	1,0036361	0,00018181	(2)
30°	1,0054549	0,00018183	

dabei befand sich das Quecksilber in *eisernen* Röhren. Eisen und Glas haben nahezu gleiche Ausdehnung; da wir die genaue Reduktion hiefür nicht kennen, lassen wir die Werte (2) unbenützt, und nehmen für unsere Zwecke den *abgerundeten* Wert (1), nämlich:

$$B = B_0\,(1+q\,t) \qquad \text{wo} \quad q = 0{,}000180 \tag{3}$$

Umgekehrt berechnet man hieraus:

$$B_0 = \frac{B}{1+q\,t} = B\,(1 - q\,t + q^2\,t^2) \tag{4}$$

Für genauere Berechnungen muss man wohl hiernach verfahren, indessen die Hilfstafeln für den täglichen Gebrauch gründen sich meist auf die abgekürzte Formel nach (4):

$$B_0 = B\,(1 - q\,t) \qquad \text{oder} \qquad B_0 - B = -B\,q\,t \tag{5}$$

$$\text{Quecksilber-Reduktion} \quad B_0 - B = -0{,}000180\,B\,t \tag{6}$$

Nach dieser Formel kann die Reduktion berechnet werden, wenn die Ausdehnung des Massstabes selbst zu vernachlässigen ist; dieses geschieht z. B. oft bei hölzernen Massstäben.

Um die Ausdehnung des Massstabes selbst zu berücksichtigen, hat man zu bedenken, dass das Mass B an einem Stabe mit dem Ausdehnungs-Coëfficienten m abgelesen, selbst eine Reduktion zu erfahren hat, welche entsprechend (5) den Betrag hat:

$$-B\,m\,t \tag{7}$$

Die Gesamtreduktion ist die *Differenz* der Ausdehnungen des Quecksilbers und des Messings, d. h. man hat nun aus (5) und (7) zusammen:

$$\text{Reduktion} \quad B_0 - B = -(q - m)\,B\,t \tag{8}$$

Die Ausdehnungs-Coëfficienten für verschiedene hier in Betracht kommende Stoffe sind:

für Messing*)	$m =$ 0,000 018		
„ Glas	0,000 011		
„ Silber	0,000 020		(9)
„ Eisen	0,000 012		
„ Holz	0,000 004		

*) In dem „Repertorium für Meteorologie", III. Band, Petersburg 1874, Über die Bestimmung des Luftdrucks, S. 7—8 sagt dessen Herausgeber *H. Wild* über die

Am häufigsten hat man die Messingskala, also mit $m = 0{,}000\,018$ nach (8):

$$\text{Reduktion für Quecksilber und Messing: } B_0 - B = -0{,}000\,162\,B\,t \qquad (9)$$

Für die beiden Fälle (6) und (9) haben wir Hilfstafeln im Anhange Seite [14] und Seite [15] berechnet.

Besondere Reduktions-Hilfsmittel für einzelne Orte.

Für einen und denselben Ort, wo der Barometerstand höchstens 20^{mm} von seinem Mittelwert abweicht, ist die Temperaturkorrektion fast nur von der Temperatur abhängig, und wenn man einzelne Unsicherheiten bis zu $0{,}1^{mm}$ nicht zu scheuen braucht, kann man für einen und denselben Ort eine abgekürzte Tafel benützen, welche dem *mittleren* Barometerstand entspricht.

Man kann aber in diesem Falle die Reduktion noch einfacher dadurch bestimmen, dass man das Thermometer selbst mit einer besonderen Skale versieht, welche unmittelbar die Reduktion abzulesen gestattet. Eine solche Skale hat das obere Thermometer T' in Fig. 1. § 133. S. 473; diese besondere Skale ist für den mittleren Barometerstand 750^{mm} bestimmt, sie zeigt deswegen z. B. $3{,}6^{mm}$ an derselben Stelle des Thermometers, wo die gewöhnliche Skale $+30°$ zeigt.

Genaue Reduktionsformel.

Die bisherigen Entwicklungen waren nur angenähert richtig, wie schon bei (4) angegeben wurde. Obgleich die genäherte Formel (8) und die entsprechenden Hilfstafeln in den meisten Fällen genügend genau sind, ist es doch von Wert, auch die genaue Reduktion zu betrachten; zudem wollen wir noch den Fall berücksichtigen, dass der Massstab eine etwas *andere* Temperatur t' habe als das Quecksilber, dessen Temperatur t sei. Endlich sei noch der Fall mitbehandelt, dass der Massstab eine andere *Normal*-Temperatur τ habe als das Quecksilber. Die Normal-Temperatur des Massstabes ist nämlich beim Metermass $\tau = 0°\,C$, dagegen beim alten Pariser Mass $\tau = 13°\,R$, und beim englischen Mass $\tau = 62°\,F$.

Nehmen wir bei der Normaltemperatur τ eine Massstablänge M_0 und bei der Temperatur t' eine Länge M, und es sei der Ausdehnungs-Coëfficient des Massstabes $= m$, dann besteht die Gleichung:

$$M = M_0\,(1 + m\,(t' - \tau)) \qquad (10)$$

Für das Quecksilber gilt eine ähnliche Gleichung:

$$Q = Q_0\,(1 + q\,t) \qquad (11)$$

Ausdehnung des Messings, dass häufig noch der von *Lavoisier* und *Laplace* bestimmte Ausdehnungscoëfficient 0,000 018 782 angewendet wird, dass aber dieser Coëfficient sich auf Temperaturänderungen zwischen 0° und 100° bezieht, während bei barometrischen Messungen nur Temperaturen bis zu 40° vorkommen, und für diese niederen Temperaturen ist die Ausdehnung eine andere, nämlich für eine mittlere Temperatur von 20°:

nach *Ibanez* und *Saavedra*	0,000 0189 84
„ *Wild*	0,000 0180 87
„ *Borda*	0,000 0178 30
„ *Sims*	0,000 0176 94
„ *Wild*	0,000 0174 40
Mittel	0,000 0180 07

In dem Werke „Travaux et mémoires du bureau international des poids et mesures, Tome I. Paris 1881“, Seite D. 21 wird eine Massstab-Ausdehnung 0,000 01859 und die Quecksilber-Ausdehnung 0,000 18153 benützt.

Quecksilber dehnt sich mehr aus, und muss daher in der Röhre steigen. Wir bezeichnen den Coëfficienten für die kubische Ausdehnung des Quecksilbers in Glasröhren mit q, so dass eine Quecksilbersäule, welche in einer Glasröhre bei 0° die Höhe B hat, bei $t°$ in derselben Glasröhre die Höhe $B\,(1+q\,t)$ hat.

Dieser Wert q wird allgemein nach *Regnault* für $C°$ so angenommen:

$$q = \frac{1}{5550} = 0{,}00018018 \qquad (1)$$

Die *Regnault*schen Versuche von 1847 haben vor kurzem eine Neubearbeitung erfahren, welche veröffentlicht ist in dem Werke: „Travaux et mémoires du bureau international des poids et mesures“ II. Band, Paris 1883. Einen Bericht hierüber haben wir in der „Zeitschr. f. Verm. 1884“ S. 488—495 gegeben, und haben hieraus:

$t =$	$(1+q\,t) =$	$q =$	
10°	1,0018179	0,00018179	
20°	1,0036361	0,00018181	(2)
30°	1,0054549	0,00018183	

dabei befand sich das Quecksilber in *eisernen* Röhren. Eisen und Glas haben nahezu gleiche Ausdehnung; da wir die genaue Reduktion hiefür nicht kennen, lassen wir die Werte (2) unbenützt, und nehmen für unsere Zwecke den *abgerundeten* Wert (1), nämlich:

$$B = B_0\,(1+q\,t) \qquad \text{wo} \quad q = 0{,}000180 \qquad (3)$$

Umgekehrt berechnet man hieraus:

$$B_0 = \frac{B}{1+q\,t} = B\,(1 - q\,t + q^2\,t^2) \qquad (4)$$

Für genauere Berechnungen muss man wohl hiernach verfahren, indessen die Hilfstafeln für den täglichen Gebrauch gründen sich meist auf die abgekürzte Formel nach (4):

$$B_0 = B\,(1 - q\,t) \qquad \text{oder} \qquad B_0 - B = -B\,q\,t \qquad (5)$$

$$\text{Quecksilber-Reduktion} \quad B_0 - B = -\,0{,}000180\,B\,t \qquad (6)$$

Nach dieser Formel kann die Reduktion berechnet werden, wenn die Ausdehnung des Massstabes selbst zu vernachlässigen ist; dieses geschieht z. B. oft bei hölzernen Massstäben.

Um die Ausdehnung des Massstabes selbst zu berücksichtigen, hat man zu bedenken, dass das Mass B an einem Stabe mit dem Ausdehnungs-Coëfficienten m abgelesen, selbst eine Reduktion zu erfahren hat, welche entsprechend (5) den Betrag hat:

$$-\,B\,m\,t \qquad (7)$$

Die Gesamtreduktion ist die *Differenz* der Ausdehnungen des Quecksilbers und des Messings, d. h. man hat nun aus (5) und (7) zusammen:

$$\text{Reduktion} \quad B_0 - B = -\,(q - m)\,B\,t \qquad (8)$$

Die Ausdehnungs-Coëfficienten für verschiedene hier in Betracht kommende Stoffe sind:

für Messing*) $m =$	0,000 018	
„ Glas	0,000 011	
„ Silber	0,000 020	(9)
„ Eisen	0,000 012	
„ Holz	0,000 004	

*) In dem „Repertorium für Meteorologie“, III. Band, Petersburg 1874, Über die Bestimmung des Luftdrucks, S. 7—8 sagt dessen Herausgeber *H. Wild* über die

Zum Gebrauch mit dem *Rechenschieber* ist Quotientenform bequemer; z. B.:

$$-0{,}000\,162\,Bt = -\frac{B}{617}\,10\,t$$

Man macht dann bei 617 des Lineals eine Strichmarke, und schiebt damit die Reduktionen bequemer und genauer ab, als man sie aus einer Hilfstafel entnehmen kann.

Zur gegenseitigen Verwandlung von Barometer-Werten, welche bereits auf ihre eigene Normaltemperatur reduziert sind, dienen folgende Zahlen:

			log
1 Millimeter	=	0,443296 Pariser Linien	9.646 6938
1 Millimeter	=	0,036941 Pariser Zoll	8.567 5126
1 Millimeter	=	0,039370 Englische Zoll	8.595 1702
1 Pariser Linie	=	2,255829 Millimeter	0.353 3062
1 Pariser Linie	=	0,088813 Englische Zoll	8.948 4764
1 Pariser Zoll	=	27,069948 Millimeter	1.432 4874
1 Pariser Zoll	=	1,065756 Englische Zoll	0.027 6576
1 Engl. Zoll	=	25,399772 Millimeter	1.404 8298
1 Engl. Zoll	=	11,259617 Pariser Linien	1.051 5236
1 Engl. Zoll	=	0,938301 Pariser Zoll	9.972 3424

Eine Tafel zur Verwandlung von Pariser Zollen und Linien in Millimeter, welche den soeben angegebenen Zahlen entspricht, ist im Anhang auf Seite [13] gegeben. (Ausführliche Reduktionstafeln für metrisches, Pariser und englisches Mass und für die verschiedenen sonstigen Barometer-Reduktionen giebt *Jelineks* „Anleitung zur Anstellung meteorologischer Beobachtungen und Sammlung von Hilfstafeln". Zweite Auflage, neu herausgegeben und umgearbeitet von *Hann*. Wien, 1884.)

Berücksichtigung der Gefäss-Korrektion.

Man kann die Gefäss-Korrektion, welche wir schon in § 133. S. 474 kennen gelernt haben, in die Temperatur-Korrektions-Tabelle mit hineinziehen. Es ist nach (1) S. 474:

$$\text{Gefäss-Korrektion} = +\left(\frac{d}{D}\right)^2 (B - B_n) \tag{16}$$

wobei d und D die inneren Durchmesser der Röhre und des Gefässes sind, B die jeweilige Ablesung und B_n der normale (mittlere) Barometerstand, für welchen die Skale gestimmt ist. Wenn z. B. $\left(\frac{d}{D}\right)^2 = \frac{1}{100}$ ist, und $B_n = 750^{mm}$, so hat man für 760^{mm} die Korrektion $+0{,}1^{mm}$ und für 740^{mm} die Korrektion $-0{,}1^{mm}$ u. s. w.

Indem man diese Gefäss-Korrektion mit der Temperatur-Korrektion zusammennimmt, hat man:

$$-0{,}000162\,Bt + 0{,}01\,(B - 750)$$

wobei Messingskale vorausgesetzt ist.

Eine hiefür berechnete Tafel ist im Anhang Seite [16] gegeben. Dieselbe ist zunächst für das Instrument Fig. 1. § 133. S. 473 und für eine Meereshöhe von rund 100^m bestimmt, und kann daher an sehr vielen Orten gebraucht werden. Jedenfalls kann man für gegebene andere Umstände mit Leichtigkeit eine solche besondere Tafel berechnen.

§ 135. Capillar-Depression.

In Folge der gegenseitigen Anziehung des Glases und des Quecksilbers ist die Oberfläche des letzteren nicht eben, sondern gewölbt, und es steht der Scheitel der sich bildenden *Kuppe* stets tiefer als die Oberfläche, welche das Quecksilber zeigen würde, wenn jene Anziehung nicht wirksam wäre.

Die Capillar-Depression δ ist der Betrag, um welchen die Kuppe tiefer steht, als die Quecksilber-Oberfläche in einer Röhre ohne Depression stehen würde (vgl. Fig. 1.).

Fig. 1.
Capillar-Depression.

Die Capillar-Depression δ ist abhängig von dem inneren Röhrendurchmesser D und von der Kuppenhöhe k (Fig. 1.).

Wir haben hiefür im Anhange S. [17] eine Tafel zusammengestellt (nach *Schleiermacher* und *Delcros*, *Poggendorff*s Annalen der Physik, 60. Band, 1843, S. 377, wo jedoch irrtümlich Durchmesser statt Halbmesser steht), aus welcher man z. B. entnimmt, dass für den inneren Durchmesser 10^{mm} und die Kuppenhöhe $k = 1{,}3^{mm}$, die Depression $= 0{,}38^{mm}$ ist. Wahrscheinlich hat auch die Beschaffenheit und die Temperatur u. s. w. des Glases Einfluss auf die Capillarität. —

Bei Gefässbarometern ist die Depression zu dem an der Kuppe abgelesenen Stande zu addieren.

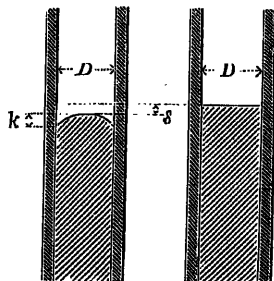
Bei Heberbarometern kommt nur die Differenz der beiden Depressionen in Betracht, und zwar ist gewöhnlich die Depression im untern Schenkel die grössere, also die Differenz der Depressionen von der Messung abzuziehen.

Die Kuppenhöhe ist nicht nur bei verschiedenen Instrumenten, sondern auch bei demselben Instrument veränderlich, z. B. bei dem Heberbarometer Fig. 2. § 133. S. 474 mit innerem Röhrendurchmesser von 6^{mm} fand ich auf der libyschen Expedition an verschiedenen Tagen zwischen November 1873 und Mai 1874 nach und nach folgende Kuppenhöhen:

oben	0,83	0,83	0,88	1,00	0,83	0,90	0,82	0,83	0,94	0,89	0,95	$0{,}94^{mm}$
unten	1,11	1,26	1,17	1,22	1,37	1,64	1,58	1,40	1,53	1,65	1,55	$1{,}63^{mm}$

Da diese Zahlen die Mittel aus je mehreren Ablesungen sind, so scheint bewiesen, dass sich die Kuppenhöhe im unteren Schenkel um etwa $0{,}5^{mm}$ vergrössert hat; der innere Röhrendurchmesser war 6^{mm}, folglich entsprechen nach der Tafel im Anhange Seite [17] den Kuppenhöhen $1{,}1^{mm}$ und $1{,}6^{mm}$ die Depressionen $1{,}14^{mm}$ und $1{,}41^{mm}$, und den Kuppenhöhen-Differenzen entspricht eine Depressions-Differenz von $0{,}27^{mm}$.

Im Lauf *eines* Tages kann man an einem Reisebarometer bei verschiedenen Temperaturen, und bei verschiedenen Barometerständen u. s. w., verschiedene Kuppenhöhen beobachten, und muss dann, nach den vorhandenen Tafeln, auch verschiedene Capillaritäten in Rechnung bringen. Dieses deutet übrigens darauf hin, dass Quecksilber-Barometerbestimmungen ohne feste Aufstellung überhaupt nicht sehr genau sein können.

Wenn im Laufe der Jahre die Kuppe im unteren Schenkel grösser wird, so hat das eine leicht angebbare Ursache; das Quecksilber erfährt nämlich im unteren Schenkel,

wo es mit der Luft in Berührung kommt, eine geringe Oxydation; auch kommen hier Unreinigkeiten hinzu und deswegen haftet das Quecksilber ungleich an der Röhrenwand. Auch wird das Glas hier getrübt, so dass nach 1—2jährigem Gebrauch kein sicheres Einstellen auf den Rand mehr möglich ist. Wenn man keinen scharfen Rand mehr beobachtet, so wird man auch nicht berechtigt sein, aus der (ungenügend gemessenen) Kuppenhöhe nach den Tafelwerten eine Capillaritäts-Korrektion anzubringen.

Bestimmung des inneren Durchmessers der Glasröhre.

Bei fertigen Instrumenten kann der *innere* Durchmesser der Glasröhre, den man jedenfalls zur Capillaritäts-Bestimmung braucht, nicht unmittelbar gemessen werden, weil die Quecksilberfüllung, von aussen gesehen, durch Strahlenbrechung der Glaswand zu gross erscheint, so dass bei dünnwandigen Röhren überhaupt kein innerer Durchmesser zu sehen ist, sondern die ganze Hülle mit Quecksilber ausgefüllt zu sein scheint.

Nach einer Mitteilung in der „Zeitschrift für Instrumentenkunde 1886", S. 106 (nach *Lépinay*, Journal de phys. II, 4, S. 35) kann man die scheinbare Vergrösserung des inneren Durchmessers oder Halbmessers einer Barometer-Röhre durch Lichtbrechung theoretisch verfolgen, wie in Fig. 2. angegeben ist. Der äussere Röhren-Halbmesser sei $= R$ und der innere Halbmesser $= r$. Im Abstande a vom Mittelpunkt sieht man beide Halbmesser scheinbar $= R'$ und r' (in Winkelmass). Wenn μ der Brechungs-Coëfficient des Glases ist, so hat man, nach Andeutung von Fig. 2., folgende Gleichungen:

Fig. 2.

$$r = R \sin \alpha$$

$$\sin \beta = \mu \sin \alpha$$

$$\frac{R}{\sin r'} \sin \beta = a = \frac{R}{\sin R'}$$

Hieraus folgt:

$$r = \frac{R}{\mu} \frac{\sin r'}{\sin R'} \qquad (1)$$

Wenn der Abstand a einigermassen gross ist, also die Winkel r' und R' klein sind, so kann man auch schreiben, zugleich mit $\mu = 1{,}5$:

$$r = \frac{R}{\mu} \frac{r'}{R'} = \frac{2}{3} R \frac{r'}{R'} \qquad (2)$$

und dabei können r' und R' selbst auch *linear*, geradezu an einem quergehaltenen Millimeter-Massstab abgelesen sein.

Diese ganze Betrachtung gilt nur, wenn r' kleiner als R' ist, d. h. wenn man einen inneren Durchmesser überhaupt noch sieht; bei dünnwandigen Röhren ist dieses nicht mehr der Fall, die Röhre scheint dann ganz bis an die äusserste Hülle aus Quecksilber zu bestehen.

Wir betrachten den Grenzfall mit $r' = R'$, dann wird nach (2):

$$r = \frac{2}{3} R \text{ (Grenzfall)} \qquad (3)$$

und wenn der Quecksilberrand sich von der Röhre nicht mehr abhebt, so ist also nach (3):

$$r > \frac{2}{3} R \qquad (4)$$

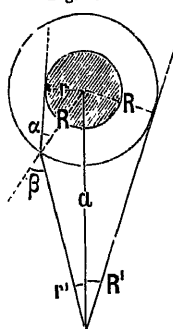
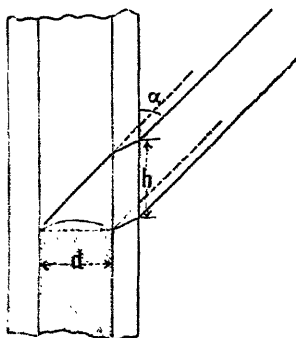
d. h. in diesem Falle ist die innere Dicke mindestens gleich zwei Dritteln der äusseren Dicke, oder die Wandstärke höchstens gleich einem Drittel des äusseren Halbmessers.

Zur Messung empfiehlt in diesem Falle der citierte Artikel von *Lépinay*, man soll um die mit Quecksilber gefüllte Röhre eine zweite Glasröhre bringen, und den Zwischenraum mit Wasser füllen.

Fig. 3.

Statt dessen scheint uns ein einfacheres, durch Fig. 3. erläutertes Verfahren anwendbar zu sein, welches darin besteht, dass man die Kuppe *schief von oben her* betrachtet, und ein entsprechendes Mass h in der Vertikalen misst. Ist der Winkel, den die Sehrichtung mit der Vertikalen macht, $= \alpha$, so hat man:

$$d = h \tan \alpha \qquad (5)$$

Um den Winkel α konstant zu erhalten und zu bestimmen, kann man eine ganz einfache Zielvorrichtung anbringen, und das Mass h haben wir einfach an der Schiebevorrichtung mit Nonius abgelesen, den man zum gewöhnlichen Einstellen und Ablesen ohnehin braucht.

Als Beispiel einer solchen Bestimmung geben wir von einem Hannover'schen Barometer 10 Ablesungen unter $\alpha = 45°$:

	mm	mm	mm
	764,9	758,4	6,5
	764,9	758,1	6,8
	765,1	758,3	6,8
	765,1	758,4	6,7
	764,8	758,3	6,5
Mittel	764,96	758,30	6,66 = d

§ 136. Schwere-Korrektion.

Der in der bisher beschriebenen Weise reduzierte Quecksilber-Barometerstand ist noch nicht ein absolutes Mass des Luftdrucks, weil die Schwerkraft, also das Gewicht der Quecksilbersäule, veränderlich ist.

Der Druck der Quecksilbersäule, welcher dem Luftdruck das Gleichgewicht hält, ist nämlich das Produkt aus der Masse des Quecksilbers (Masse = Volumen × Dichte) in die Beschleunigung der Schwere. Diese Schwerenbeschleunigung, gewöhnlich mit g bezeichnet, ist mit der Höhe über dem Meere und mit der geographischen Breite veränderlich.

In Hinsicht auf die *Höhe* haben wir das einfache Gesetz, dass ausserhalb der festen Erde die Schweren sich umgekehrt proportional den Quadraten der Entfernungen vom Erdmittelpunkte verhalten. Wenn daher g_0 die Schwerenbeschleunigung in der Höhe Null (im Meeresspiegel), und g die Schwerenbeschleunigung in der Höhe H bedeutet, und der Erdhalbmesser bis zum Meere $= r$ ist, so besteht die Gleichung:

$$\frac{g}{g_0} = \frac{(r+0)^2}{(r+H)^2} = \frac{r^2}{(r+H)^2} \qquad (1)$$

oder entwickelt, hinreichend genau:

$$\frac{g}{g_0} = \frac{1}{\left(1 + \frac{H}{r}\right)^2} = 1 - \frac{2H}{r} + \ldots$$

$$g = g_0 \left(1 - \frac{2H}{r}\right) \tag{2}$$

Was die Änderung von g mit der *Breite* φ betrifft, so besteht eine Gleichung von der Form:

$$g_0 = g_0{}^\circ (1 + \gamma \sin^2 \varphi) \tag{3}$$

wo $g_0{}^\circ$ die Schwere im Äquator, unter der Breite $\varphi = 0$, und in der Höhe $H = 0$ bedeutet, und γ ein von der Abplattung der Erde abhängiger Coëfficient ist. Man benützt die Beziehung (3) häufig auch in anderer Form; man hat nämlich mit $\varphi = 45°$, $\sin^2 \varphi = \frac{1}{2}$, also:

$$g_0{}^{45} = g_0{}^\circ \left(1 + \frac{\gamma}{2}\right) \tag{4}$$

und indem man noch $\sin^2 \varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi$ einführt, erhält man aus (3) und (4) zusammen:

$$g_0 = g_0{}^{45} \left(1 - \frac{\frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}} \cos 2\varphi\right) = g_0{}^{45} (1 - \beta \cos 2\varphi) \tag{5}$$

wobei nun $g_0{}^{45}$ die Schwerenbeschleunigung in der Höhe $H = 0$, unter der Breite 45° ist, und β ein neu eingeführter Coëfficient ist.

Was nun die Zahlenwerte für $g_0{}^\circ$, γ , β u. s. w. betrifft, so waren dieselben nach verschiedenen Berechnern sehr schwankend. In dem Werke „Travaux et mémoires du bureau international des poids et mesures“ I. 1881, S. A. 5—8, sind die wichtigsten Angaben hiefür zusammengestellt und es wird schliesslich (16) $\beta = 0{,}00259$ angenommen. In jüngster Zeit hat *Helmert* in dem Werke „Die mathematischen und physikalischen Theorieen der höheren Geodäsie“, II. Teil, Leipzig 1884, S. 215—241 eine Reduktion und Ausgleichung von 122 Pendelbeobachtungen durchgeführt, deren Resultat ist (S. 241):

$$g_0 = 9{,}7800\,(1 + 0{,}005310 \cos 2\varphi) \tag{6}$$

Es ist also mit unseren vorhergehenden Bezeichnungen:

$$g_0{}^\circ = 9{,}7800 \quad , \quad \gamma = 0{,}005310 \tag{6a}$$

und die Ausrechnung nach (5) giebt:

$$g_0 = g_0{}^{45} (1 - \beta \cos 2\varphi) \tag{7}$$

wo $$g_0{}^{45} = 9{,}80596 \quad \text{und} \quad \beta = 0{,}002648 \tag{8}$$

oder abgerundet, nach *Helmert* S. 609:

$$\beta = 0{,}00265 \tag{9}$$

Hiernach werden wir für unsere Zwecke den Wert $g_0{}^{45}$ nach (8) und β nach (9) künftig anwenden.

Fasst man nun die Änderungen für Höhe und für Breite zusammen, so hat man aus (1) und (4):

$$g = g_0{}^{45} (1 - \beta \cos 2\varphi) \left(1 - \frac{2H}{r}\right) \text{ oder } = g_0{}^{45} \left(1 - \beta \cos 2\varphi - \frac{2H}{r}\right) \tag{10}$$

Nun denken wir, es sei an einem Punkt mit der Schwere g ein Barometerstand B beobachtet, und wir fragen, wenn an einem Punkte in Meereshöhe ($H = 0$) unter der Breite 45°, derselbe Luftdruck stattfindet, wie an dem ersten Punkte, welche Barometerhöhe würde an dem zweiten Punkte beobachtet worden sein?

Die Antwort ist: Es würde eine andere Höhe $B_0{}^{45}$ beobachtet werden, welche zu der ersten B in der Beziehung steht:

$$B g = B_0{}^{45}\, g_0{}^{45}$$

also:

$$B_0{}^{45} = B \frac{g}{g_0{}^{45}} = B \left(1 - \beta \cos 2\varphi - \frac{2H}{r}\right) \tag{11}$$

oder es besteht die Reduktion:

$$B_0{}^{45} - B = - B \beta \cos 2\varphi - \frac{2BH}{r} \tag{12}$$

Zur Übersicht berechnen wir nach dem ersten Gliede dieser Gleichung folgendes Hilfstäfelchen:

Schwere-Korrektion des Quecksilber-Barometers für geographische Breite φ

$B_0{}^{45} - B_0 = \varDelta B_1 = -\beta B \cos 2\varphi$, $\beta = 0{,}00265$, für $B = 760^{mm}$

φ	$\varDelta B_1$	φ	$\varDelta B_1$	φ	$\varDelta B_1$	φ	$\varDelta B_1$
0°	$-2{,}01^{mm}$	40°	$-0{,}35^{mm}$	45°	$+0{,}00^{mm}$	50°	$+0{,}35^{mm}$
10	$-1{,}89$	41	$-0{,}28$	46	$+0{,}07$	55	$+0{,}69$
20	$-1{,}54$	42	$-0{,}21$	47	$+0{,}14$	60	$+1{,}01$
30	$-1{,}01$	43	$-0{,}14$	48	$+0{,}21$	70	$+1{,}54$
35	$-1{,}69$	44	$-0{,}07$	49	$+0{,}28$	80	$+1{,}89$
40	$-0{,}35$	45	$-0{,}00$	50	$+0{,}35$	90	$+2{,}01$

(13)

Wie man sieht, ist diese Reduktion nicht unerheblich; allerdings kommen bei den meisten Anwendungen auf barometrische Höhenmessungen nur die *Differenzen* der Reduktionen für verschiedene Breiten in Betracht, d. h. in Mittel-Europa etwa $0{,}07^{mm}$ für 1° Breiten-Unterschied.

Beispielshalber geben wir die Reduktionen unserer in der libyschen Wüste gemachten Quecksilber-Barometermessungen auf die Breite von Kairo, wo regelmässige korrespondierende Messungen gemacht wurden:

Ort	Breite φ	Reduktion auf Kairo	Ort	Breite φ	Reduktion auf Kairo
Kairo	30° 4′	$0{,}00^{mm}$	Dachel . . .	25° 42′	$-0{,}26^{mm}$
Siut	27 11	$-0{,}18$	Chargeh . .	25 26	$-0{,}27$
Marag . . .	27 23	$-0{,}16$	Esneh	25 18	$-0{,}28$
Farafrah . .	27 3	$-0{,}18$	Kairo	30 4	$0{,}00$

Das zweite Glied der Gleichung (12) giebt die Reduktion für die Höhe, und verlangt zur Ausrechnung die Kenntnis der Höhe H über dem Meere, wenigstens genähert. Bei irgend welcher Anwendung wird diese Höhe H wohl leicht zu erlangen sein: um jedoch eine Tafel von der Form (13) zur allgemeinen Übersicht zu berechnen, muss man die Höhe H aus dem Barometerstand B selbst ableiten. Es mag hiezu die

Näherungsfunktion genügen, welche wir in Band I. § 14. in Gleichung (12) S. 39 gefunden haben, etwa in ganz runden Zahlen:

$$B = 760 - 0{,}087\,H \quad \text{oder} \quad H = 11{,}5\,(760 - B) \tag{14}$$

Setzt man dieses in das zweite Glied von (12), so erhält man:

$$B_0 - B = \varDelta B_2 = -\frac{2\,B\,H}{r} = -\frac{23{,}0}{r}\,B\,(760 - B) \tag{15}$$

Hiernach ist folgendes zur Übersicht berechnet:

Schwere-Korrektion des Quecksilber-Barometers für die Höhe H über dem Meer.

$$\varDelta B_2 = -\frac{2\,B\,H}{r} = -\frac{23{,}0}{r}\,B\,(760 - B)\ ,\quad r = 6\,370\,000^m\ ,\quad log\,\frac{23{,}0}{r} = 4{,}5576 - 10.$$

B	H	$\varDelta B_2$	B	H	$\varDelta B_2$	B	H	$\varDelta B_2$
mm	m	mm	mm	m	mm	m	mm	mm
760	0	— 0,00	690	805	— 0,17	620	1610	— 0,31
750	115	— 0,03	680	920	— 0,20	610	1725	— 0,33
740	230	— 0,05	670	1035	— 0,22	600	1840	— 0,35
730	345	— 0,08	660	1150	— 0,24	590	1955	— 0,36
720	460	— 0,10	650	1265	— 0,26	580	2070	— 0,38
710	575	— 0,13	640	1380	— 0,28	570	2185	— 0,39
700	690	— 0,15	630	1495	— 0,30	560	2300	— 0,40

(16)

Die im bisherigen behandelte Schwere-Korrektion des Quecksilber-Barometers ist anzubringen vor der Benützung der Quecksilber-Barometer-Angaben zur barometrischen Höhenbestimmung, ferner vor der Vergleichung derselben mit den Angaben von Federbarometern oder Kochthermometern. In manchen Fällen kommt bei Vergleichungen nur ein Teil der Gesamt-Reduktion in Betracht; z. B. wenn man zwei korrespondierende Stationen in sehr nahe gleicher Breite, aber in ungleichen Höhen hat, so kann man die Breiten-Reduktion (13) als konstant fortlassen. Solches ist in jedem einzelnen Falle besonders zu überlegen.

Anmerkungen.

I. Die in der angegebenen Weise reduzierten Quecksilber-Barometerstände, welche wir mit $B_0{}^{45}$ bezeichnet haben, gelten allgemein als *Normalwerte,* und sind als solche auch von dem internationalen Mass- und Gewichts-Amte angenommen worden. In dem Werke „Travaux et mémoires du bureau international des poids et mesures, I. 1881“, Seite A. 46, ist hierüber gesagt: „les hauteurs barométriques sont supposées reduites à la température zéro et á la densité 13,59593 du mercure, à 45° de latitude et au niveau de la mer“. Es ist aber zu beachten, dass das internationale Mass- und Gewichts-Amt einen anderen Coëfficienten 0,00259 anwendet, als die neue, beste Bestimmung von *Helmert,* 0,00265, welche wir unseren Berechnungen und Tafeln zu Grunde legen (s. o. bei (6), (8) und (9), S. 483.)

II. Versteht man unter B und B' zwei Barometerstände unter gleicher Breite, aber in verschiedenen Höhen, und B_0 und B_0' die auf die Höhe $H = 0$ reduzierten Werte, so ist:

$$\frac{B_0}{B_0'} = \frac{B}{B'}\frac{(r+H)^2}{(r+H')^2} = \frac{B}{B'}\left(1+2\frac{H-H'}{r}\right) = \frac{B}{B'}\left(1+2\frac{h}{r}\right)$$

$$\log\frac{B_0}{B_0'} = \log\frac{B}{B'} + \log\left(1+\frac{2h}{r}\right) \quad \text{oder} \quad = \log\frac{B}{B'} + \frac{2Mh}{r} \qquad (17)$$

Diese letzte Reduktion wurde früher gewöhnlich in die barometrischen Höhenformeln aufgenommen (Formeln von *Laplace*, *Bauernfeind* u. s. w.); wenn man jedoch nicht nur Quecksilber-Barometer, sondern auch Feder-Barometer im Sinne hat, für welch letztere das Schlussglied in (17) nicht gilt, so darf man jenes Glied nicht in die Barometerformel aufnehmen. Ausserdem ist die mit der Aufnahme jenes Gliedes gewöhnlich verbundene Annahme, dass die geographischen Breiten beider Punkte gleich seien, auch nicht immer genügend erfüllt.

Wir werden daher in unserer nachher (in § 145.) zu entwickelnden vollständigen Barometerformel die Schwere-Korrektion für das Quecksilber *nicht* aufnehmen.

§ 137. Luftdrucksberechnung. Genauigkeit.

Wenn man die im bisherigen beschriebenen einzelnen Reduktionen (§ 134.—§ 136.) an den Ablesungen von Quecksilberbarometern anbringt, so erhält man richtige Masse des Luftdrucks, welche in der zu Anfang entwickelten Formel (16) § 132. S 472 als P und p eingesetzt werden können, um zur barometrischen Höhenberechnung zu dienen.

Da in jener Formel die Ausdrücke P und p nur in dem *Quotienten* $\frac{P}{p}$ vorkommen, so ist auch ersichtlich, dass die Masseinheit für P und p willkürlich ist; es kommt nur darauf an, dass P und p in *gleicher* Masseinheit ausgedrückt sind.

Wir nehmen einige Zahlenbeispiele:

Gefäss-Barometer Fig. 1. § 133. S. 473.

Der Massstab ist von Messing, innerer Röhrendurchmesser = 10^{mm}.

Querschnittsverhältnis der Röhre und des Gefässes = 1 : 100, Normalstand = 750^{mm}.

	Beobachtung			
	Thermometer	Kuppe	Rand	Kuppenhöhe
	17,5°	$B = 744{,}9^{mm}$	$743{,}6^{mm}$	$1{,}3^{mm}$
Temperaturkorrektion, Gefässkorrektion } (Anhang Seite [16])		— 2,16		
Capillarkorrektion (Anhang Seite [17])		+ 0,38		
Reduzierter Barometerstand		$B_0 = 743{,}12^{mm}$		

Die Höhe des Beobachtungspunktes über dem Meer sei $H = 100^m$ und die geographische Breite sei $\varphi = 49°$, und damit berechnet man die Schwere-Korrektion:

$$\left.\begin{aligned} -0{,}00265\, B \cos 2\varphi &= +0{,}267 \\ -\frac{2BH}{r} &= -0{,}023 \end{aligned}\right\} + 0{,}24$$

Diese Korrektion $+ 0{,}24^{mm}$, welche man genähert auch aus der Hilfstafel Seite [19] entnehmen kann, wird zu dem obigen $B_0 = 743{,}12$ hinzugefügt und giebt:

$$(B_0)_0^{45} = 743{,}36^{mm}.$$

Ob es nötig ist, die Schwere-Korrektion anzubringen, das hängt von den Umständen ab. Wenn es sich um Vergleichungen zweier Instrumente handelt, bei welchen die Schwere-Korrektion *gleich* ist, braucht man dieselbe nicht zu berechnen.

Wir nehmen als zweites Beispiel eine Beobachtung mit dem Heberbarometer Fig. 2. § 133. S. 474 *ohne* Berechnung der Schwere-Korrektion:

Der Massstab ist von Messing, der innere Röhrendurchmesser ist 6^{mm}.

	Beobachtung				
	Thermometer	Kuppe	Rand	Kuppenhöhen	Capillardepressionen
Oberer Schenkel	17,5°	$616{,}3^{mm}$	$615{,}3^{mm}$	$1{,}0^{mm}$	$1{,}07^{mm}$
Unterer Schenkel		127,4	129,1	1,7	1,44
		743,7			0,37

Temperaturkorrektion — 2,11 (— 0,000 162 Bt nach Seite [15])
Capillarkorrektion — (1,44—1,07) = — 0,37 (nach Seite [17])

Reduzierter Barometerstand $B_0 = 741{,}22^{mm}$

Bei diesem Instrument liegt der Nullpunkt der Teilung *zwischen* der oberen und der unteren Quecksilberoberfläche, es werden daher die beiden Ablesungen *addiert*; bei anderen Heberbarometern liegt der Nullpunkt *unter* beiden Ablesungsstellen, und dann wird der Barometerstand durch *Subtraktion* beider Ablesungen gebildet.

Vergleichung zweier Barometer.

Die Vergleichung von Barometern kommt sehr oft vor, dieselbe ist immer nötig, wenn zwei Instrumente als korrespondierend zu Höhenmessungen gebraucht werden sollen.

Man hat hiebei alle diejenigen Korrektionen anzubringen, welche nicht beiden Instrumenten gemeinsam sind. Da die Instrumente zur Vergleichung an demselben Orte befindlich sein müssen, so ist jedenfalls die geographische Breite und die Meereshöhe, also die Schwerkorrektion gemeinsam.

Folgendes ist ein Beispiel einer solchen Vergleichung:

Kairo, Meteorologische Station Abbasieh 5. Dezember 1873.

Zeit	*Reisebarometer.*	*Stationsbarometer.*
$9^h\ 45^m$	$762{,}90^{mm}$	
		$763{,}69^{mm}$
	762,44	
		763,39
	762,59	
		763,39
	762,55	
		762,99
	762,23	
		763,22
$10^h\ 30^m$	762,50	
Mittel	762,54	763,34 Differenz = $0{,}80^{mm}$.

Man hat im Mittel das Resultat:

Stationsbarometer — Reisebarometer = + $0{,}80^{mm}$.

Die Capillaritätskorrektion bringt man bei kürzeren Beobachtungsreihen an demselben Orte gewöhnlich nicht einzeln für jede Ablesung in Rechnung, sondern man berechnet sie aus dem Mittel der Kuppenhöhen, und bringt sie als konstant in Rechnung.

Einfluss einer kleinen Luftblase im oberen Schenkel des Barometers.

Eine kleine Luftblase von 1—2^{mm} Durchmesser, welche sich im oberen Teil der
ıre beim Neigen des Instrumentes zeigt, hat einen hinreichend konstanten Einfluss,
dass derselbe gemeinsam mit anderen Fehlern bei der Vergleichung in Rechnung
racht wird. Die Luft einer grösseren Blase hat bei verschiedenen Temperaturen
on merklich verschiedene Spannungen, und der Einfluss einer solchen Blase muss
wegen durch Vergleichung mit einem Normalbarometer bei verschiedenen Tempe-
uren bestimmt werden. Man kann den Einfluss einer Blase auf theoretischem Wege
timmen („*Poggendorffs* Annalen" 88. Bd. S. 273—278, *Schreiber*, „Handbuch der
ometr. Höhenmessung" S. 82—84), doch ist die unmittelbare Vergleichung mit
em anderen Barometer bei verschiedenen Temperaturen das sicherste Mittel zur
mination des Fehlers, wenn man gezwungen ist, mit einem solchen Instrument zu
ssen.

Genauigkeit.

Der mittlere Fehler einer Einstellung und Ablesung des Quecksilber-Barometers
ın leicht auf $\pm 0{,}1^{mm}$ heruntergebracht werden, auch bei Einstellung von freier
nd und Ablesung mit blosem Auge.

Anders verhält es sich aber mit dem mittleren Fehler der Bestimmung des
rometerstandes selbst. Fortgesetzte Vergleichungen von Quecksilber-Barometern zeigen
dersprüche, welche sich durch die Ungenauigkeiten des Einstellens und Ablesens
ein nicht erklären lassen.

Zur Genauigkeits-Bestimmung haben wir zwei Instrumente Fig. 1. u. Fig. 2. § 133.
hrere Wochen lang täglich gewöhnlich zweimal miteinander verglichen; der mittlere
hler einer Vergleichung fand sich $= \pm 0{,}33^{mm}$, also der mittlere Fehler der Messung
s Luftdruckes an einem Instrument $= 0{,}33 : \sqrt{2} = \pm 0{,}24^{mm}$, oder, da bei jeder Ver-
eichung 3 Einstellungen und Ablesungen in Betracht kommen (2 am Heberbarometer
d 1 am Gefässbarometer), so ist der mittlere Fehler einer Einstellung und Ablesung
$0{,}33 : \sqrt{3} = \pm 0{,}19^{mm}$.

In „*Carls* Repertorium" Band IX Heft 4 (Separatabdruck S. 39—40) giebt
hreiber einige Genauigkeitsresultate, betreffend die Vergleichung von Quecksilber-
rometern. Das *Poller*sche Barometer verglichen mit dem Leipziger Stationsbarometer
b den mittleren Fehler einer Vergleichung $= \pm 0{,}52^{mm}$, und den mittleren Fehler
ıer Luftdrucksbestimmung mit einem Barometer $= 0{,}52 : \sqrt{2} = \pm 0{,}37^{mm}$. Ferner
*einer*sches Heberbarometer verglichen mit einem Normalbarometer, giebt den mitt-
en Fehler einer Vergleichung $= \pm 0{,}19^{mm}$ an. *Schreiber* zitiert hier aus der „Viertel-
ırsschrift der Züricher naturforschenden Gesellschaft 1871", Heft 4, dass *Wolf* für
Vergleichung eines Heberbarometers mit einem Normalbarometer den mittleren
hler $= \pm 0{,}19^{mm}$, und dass *Bruhns* den mittleren Fehler einer Ablesung am Heber-
ometer von *Greiner* in Berlin $= \pm 0{,}10^{mm}$ fand. *Wild* giebt im „Repertorium für
teorologie" III. Band (1874) S. 80 als Gesamtresultat einer Untersuchung der Ge-
ıigkeit von Quecksilberbarometern zweiter Klasse (wozu z. B. die Instrumente Fig. 1.
l Fig. 2. § 133. zu rechnen sind), folgendes an:

1) Selbst bei den geringeren dieser Barometer übersteigt der durchschnittliche
ıler einer Ablesung nicht $\pm 0{,}2^{mm}$ ($= \pm 0{,}25^{mm}$ mittlerer Fehler) und bei den
seren bleibt er unter $\pm 0{,}1^{mm}$ ($= + 0{,}12^{mm}$ mittlerer Fehler).

2) Innerhalb 5 Jahren verändert sich die absolute Korrektion eines Barometers
nicht mehr als $0{,}2^{mm}$.

3) Die absoluten Korrektionen verschiedener Barometer und selbst besserer sogenannter Normalinstrumente betragen oft nahezu 1^{mm}.

Eine vergleichende Zusammenstellung der gegenseitigen Differenzen der Normalbarometer der europäischen Hauptstationen gab *Jelinek* in der „Zeitschr. d. österr. Gesellsch. für Met. 1873“ S. 345.

Aus all diesen Genauigkeitsangaben geht hervor, dass der mittlere Fehler einer Bestimmung des Luftdrucks mit einem Instrument, dessen Röhre $6-10^{mm}$ Durchmesser hat, zu 0,1 bis $0{,}2^{mm}$ zu veranschlagen ist, und dass dieser Fehler durch mechanische und optische Hilfsmittel nicht erheblich verringert werden kann.

§ 138. Feder-Barometer.

So lange man kein anderes Mittel zur Luftdrucksbestimmung hatte, als das für den Feldgebrauch unbequeme Quecksilber-Barometer, blieb die barometrische Höhenmessung auf einen mässigen Kreis der Anwendung von Seiten der Geographen beschränkt.

Im Jahr 1847 wurde ein erstes Instrument von dem Engländer *Vidi* konstruiert, welches den Luftdruck nicht durch die Schwere einer Quecksilbersäule, sondern durch die *Feder*kraft einer metallenen luftleeren Büchse mass.

Seitdem solche Instrumente allgemein verbreitet sind, ist die barometrische Höhenmessung ungemein erleichtert worden, und hat sich damit in weitesten Kreisen der Techniker und der Geographen eingebürgert.

Der Hauptteil jedes Feder-Barometers ist eine aus federndem Metall konstruierte nahezu luftleer gepumpte und luftdicht verschlossene Büchse, welche bei zunehmendem äusserem Luftdruck zusammengedrückt und bei abnehmendem Luftdruck auseinandergezogen wird, welche also in ihren, wenn auch kleinen Dimensions-Änderungen ein Mass des Luftdrucks abgiebt.

Die Höhenänderung der Büchse beträgt (nach *Koppe*, „Die Aneroid-Barometer“, Zürich 1877, S. 2) etwa $0{,}5^{mm}$ für eine Luftdrucks-Änderung von 100^{mm}; um also einen Luftdruck auf $0{,}1^{mm}$ genau zu bestimmen, muss man die Büchsen-Änderung auf $0{,}0005^{mm}$ genau messen.

Luftleer oder wenigstens nahezu luftleer muss die Büchse deswegen sein, weil sonst die innere Luft durch *Temperatur*-Änderung bedeutende Druckänderungen erzeugen würde, neben denen die eigentlichen Luftdrucks-Anderungen nicht mehr richtig dargestellt, und unter Umständen ganz verdunkelt würden.

Da die Büchse luftleer ist, muss sie den ganzen bedeutenden äusseren Atmosphärendruck aushalten, welcher eine schwache dünnwandige Büchse nach dem Auspumpen sofort zusammendrücken würde. Deswegen haben die Feder-Barometer als wesentlichen Konstruktionsteil eine *starke Feder*, welche, dem äusseren Luftdruck das Gleichgewicht haltend, jene Gefahr des Zusammendrückens wieder aufhebt.

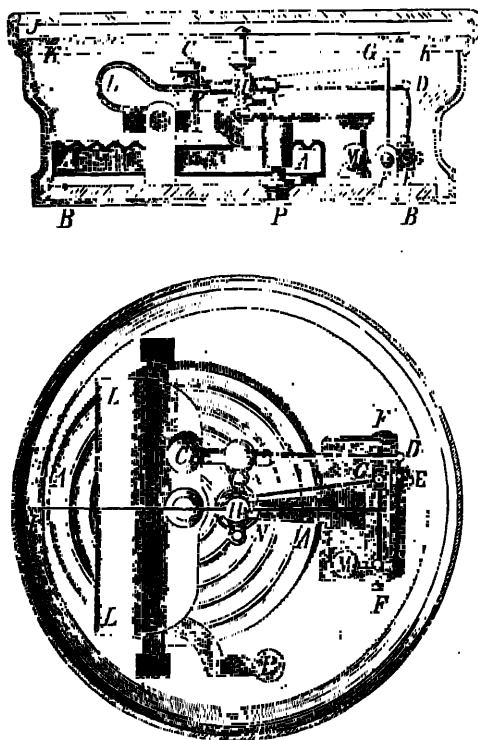
Nach dieser allgemeinen Einleitung können wir zur Beschreibung einzelner Konstruktionen übergehen.

I. Feder-Barometer nach Vidi, von Naudet oder Bohne.

Die am meisten gebräuchlichste Konstruktion von Feder-Barometern ist noch immer im wesentlichen die ursprünglich *Vidi*sche, welche in nachstehender Fig. 1. S. 490 dargestellt ist. Zunächst entspricht diese Figur allerdings einem Pariser In-

strument von *Naudet*, kann aber ebenso auch, in der Hauptsache, die neueren deutschen (kompensierten) Instrumente von *Bohne* in Berlin veranschaulichen.

Der Hauptteil ist die elastische, luftleer gemachte und luftdicht verschlossene Büchse A von wellenförmigem Querschnitt, deren Wirkung schon in der vorhergehenden Einleitung beschrieben ist, und L ist die starke, dem äusseren Luftdruck das Gleichgewicht haltende Spannfeder.

Fig. 1.
($^1/_2$ natürliche Grösse.)
Feder-Barometer nach *Vidi*, von *Naudet* und *Bohne*.

Die untere Wand der Büchse A ist mit dem Boden B der Gesamtumhüllung verbunden, es wird daher die obere Wand der Büchse A und die damit verbundene Säule C bei Veränderungen des äusseren Luftdruckes eine schwache auf- und niedergehende Bewegung machen, welche durch Hebelübersetzung auf dem Wege $DEFG$ vergrössert werden muss. Die Vergrösserung der Bewegung wird in der Hebelübersetzung mit dem Drehpunkt F hauptsächlich bewirkt durch die Kleinheit des Armes EF im Vergleich mit FG; diese Vergrösserung genügt aber noch nicht, weshalb um eine vertikale Trommel H, von sehr geringem Durchmesser, eine Kette GH von G aus gespannt ist, so dass eine kleine Bewegung von G bereits eine erhebliche Drehung der Axe H hervorbringt. Dabei sorgt eine Spiralfeder N dafür, dass die Kette GH immer gespannt bleibt. Endlich steckt auf der Axe H ein Zeiger J, dessen Drehungen auf einem geteilten Zifferblatt K (im Grundriss weggelassen) gemessen werden.

Hiemit ist der Apparat im wesentlichen erklärt, es sind aber noch einige Hilfsvorrichtungen zu beachten: Zur Verhinderung eines toten Ganges dient zuerst die schon erwähnte Spiralfeder N, dann die Hauptfeder L, wodurch die Säule C nebst dem Hebelsarm CD immer in die Höhe gedrückt wird, mag der Luftdruck zunehmen oder abnehmen. Gegen toten Gang wirkt auch das Kugelgewicht M, jedoch nur dann, wenn das Instrument horizontal (Zifferblatt oben) gehalten wird, weshalb diese Stellung stets bei der Beobachtung zu bewahren ist.

Zur Berichtigung des Instrumentes sind zwei Vorrichtungen vorhanden: Bei E sind kleine Richte-Schrauben angebracht, durch welche der Hebelsarm EF verändert,

also das Mass der Hebel-Übersetzungsvergrösserung ein wenig geregelt werden kann. Bei P kann mittelst einer Schraube die Pressung der Spannfeder L gegen die Säule C verändert werden, und es ergiebt sich daraus eine Verstellung des Zeigers J auf der Skale K, unabhängig von dem äusseren Luftdruck.

Zur Bestimmung der inneren Temperatur des Instruments ist ein Thermometer mit dem Zifferblatt verbunden, welches jedoch, ebenso wie das Zifferblatt selbst, in unserer Zeichnung nicht dargestellt ist.

Das Feder-Barometer von *Bohne* in Berlin (Prinzenstrasse 90) hat, äusserlich betrachtet, völlig die im vorstehenden beschriebene Anordnung, es hat aber eine besondere Vorrichtung zur Kompensierung des *Temperatur-Einflusses*, worüber nach dem „Bericht über die wissenschaftlichen Instrumente auf der Berliner Gewerbe-Ausstellung im Jahr 1879, herausgegeben von *Löwenherz*, Berlin 1880, S. 122", folgendes bekannt ist:

Bohne hat sich besonders bemüht, den Einfluss der Temperatur auf den Stand des Instrumentes innerhalb bestimmter Grenzen zu kompensieren.

Mit der durch die Erwärmung der Dose wachsenden Oberfläche derselben tritt eine grössere Belastung durch die auf dieselbe wirkende Luftsäule ein. Die Dose wird dabei mehr zusammengepresst, und der Zeiger zeigt einen höheren Stand.

Andererseits wird die in der Büchse noch in geringer Menge enthaltene Luft durch die Temperatur-Erhöhung ausgedehnt und wirkt der Erhöhung des Barometerstandes entgegen.

Diese beiden Wirkungen der Wärme können, richtig abgestuft, bereits eine Kompensation des Temperatur-Einflusses erzeugen.

Bohne hat jedoch eine mehr zugängliche Kompensations-Vorrichtung angeordnet, indem er den mit der Plattenfeder L auf- und niedergehenden Hebelsarm HD aus *zwei verschiedenen Metallteilen* zusammensetzt, von denen der stärker sich ausdehnende der untere ist.

Mit dem Steigen der Temperatur wird dieser Hebelsarm sich nach oben krümmen, also dem Steigen des Barometers entgegenwirken.

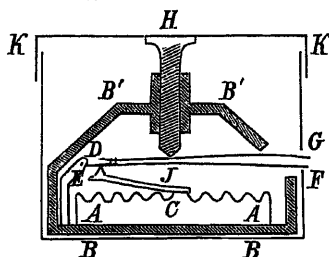
Wie weit es gelungen ist, dadurch die Temperatur-Einflüsse aufzuheben, werden wir am Schlusse von § 140. an dem Beispiele unseres Instruments zeigen.

II. Fühlfeder-Barometer von Goldschmid.

Einen neuen Grundgedanken der Feder-Barometermessung hat Mechaniker *Goldschmid* in Zürich gefunden und seit 1857 in fortgesetzt verbesserten Gestaltungen zur Ausführung gebracht (Nachfolger *Hottinger* in Zürich).

Ein im Jahr 1872 bezogenes Instrument der *Goldschmid*schen „Konstruktion Nr. 1" wurde zum Zweck der Untersuchung seiner inneren Einrichtung geöffnet, wobei sich die in Fig. 2. dargestellte Anordnung der Teile fand, deren Wirkungsweise sich leicht erklären lässt.

Fig. 2.
(1/2 natürliche Grösse.)

A ist die federnde Büchse; dieselbe ist unten mit dem starken Gehäuse BB' verbunden, weshalb bei einer Luftdrucks-Änderung der obere Teil C der Büchse Bewegung zeigt. Mit dem Oberteil C der Büchse ist ein Arm CD fest

verbunden, der nach oben in eine Schneide D endigt, und damit gegen einen Hebel EF drückt. Dieser Hebel EF hat einen festen Drehpunkt in E, und da der Abstand ED vom Drehpunkt E bis zum Angriff D des Arms CD sehr klein ist im Verhältnis zu den Abständen DJ und DF, so sind die Bewegungen in J und F verhältnismässig gross gegen die Bewegung in C und D.

Die Bewegung bei J wird gemessen durch eine Mikrometerschraube HJ; da es aber nicht möglich sein würde, den Berührungspunkt der Schraube und des Hebels EF durch das blosse Gefühl der Hand genau zu ermitteln, so ist auf den Hebel EF noch ein Federchen DG aufgeschraubt, welches mit dem Namen Fühlfeder bezeichnet wurde, und welches das Mass, wie weit die Mikrometerschraube gedreht werden muss, durch das Zusammentreffen der zwei Zeiger F und G, welche auf die Enden des Hebels und der Fühlfeder gezogen sind, genau angiebt. (Die Verbindung der Fühlfeder DG mit dem Hebel EF ist nicht bei D selbst, sondern etwas rechts davon, die Verbindungsstelle ist in Fig. 2. S. 491 durch zwei kurze senkrechte Striche angedeutet.)

Die ganzen Umdrehungen der Schraube HJ werden an einem festen Höhenmassstab FG, und die Teile der Umdrehungen durch die Trommelteilung KK gemessen.

Weiteres über die *Goldschmid*schen Instrumente geben zwei Schriften von *Koppe*: „Die Aneroid-Barometer von *Jakob Goldschmid*, Zürich 1877“ und „Über die verbesserten *Goldschmid*schen Aneroide von *Hottinger & Comp.*, Separatabdruck aus der Zeitschrift „Eisenbahn“ Nr. 16 u. 17. Band XVI. 1883.“ Wir entnehmen daraus noch folgendes:

Bei den *Goldschmid*schen Instrumenten hatten die Büchsen keine besonderen Spannfedern, sondern das Blech wurde so stark genommen, dass die beiden vor dem Auspumpen der Luft etwas nach aussen gewölbten Büchsenwände nach dem Auspumpen flach und parallel gespannt erschienen. Die Bewegung der Büchsenmitte bei Änderung des Luftdrucks wurde entweder auf ein Hebelsystem übertragen, oder mit der Mikrometerschraube unmittelbar gemessen, oder endlich durch Zusammenkuppeln von fünf oder sechs Büchsen, wie bei den *Weilenmann*schen und selbstregistrierenden Instrumenten, entsprechend vergrössert. Die zusammengekuppelten Büchsen haben beim Tragen zum Feldgebrauch den Erwartungen nicht entsprochen.

III. Das mikroskopische Feder-Barometer von Reitz-Deutschbein. Fig. 3. S. 493.

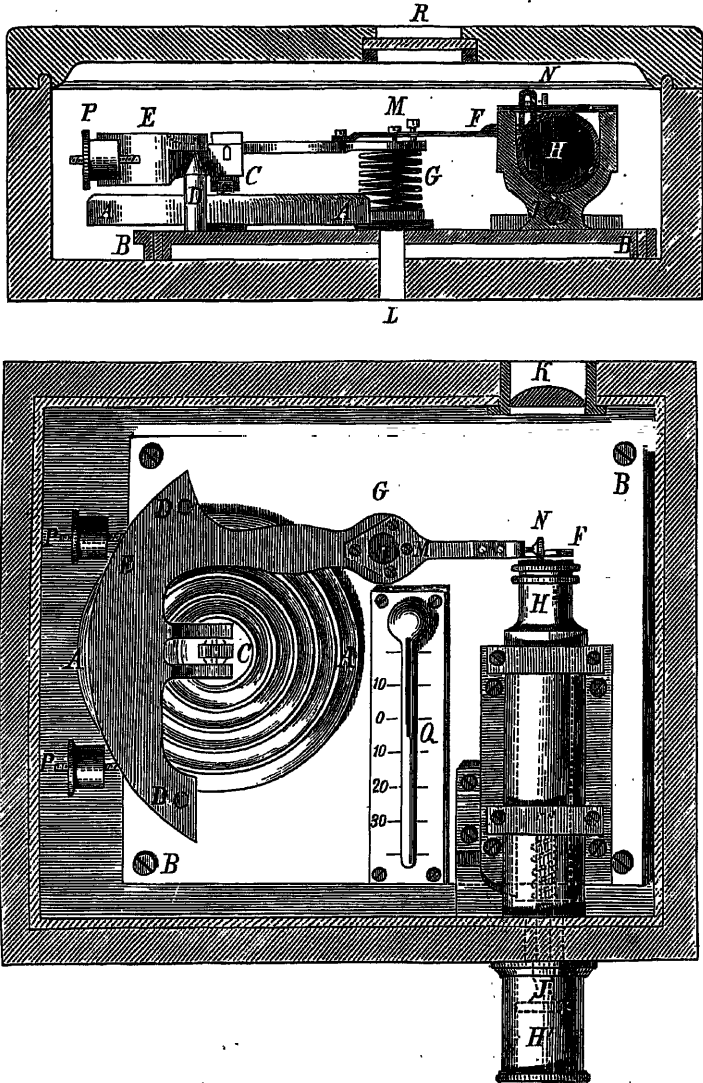
Die Büchse AA hat dieselbe Konstruktion wie bei dem *Naudet*-Instrument. Die untere Büchsenwand ist mit der Grundplatte B verbunden, es muss daher die obere Büchsenwand und das damit verbundene Gelenk C beim Eintritt einer Luftdrucks-Änderung eine auf- oder niedergehende Bewegung machen. Die Bewegung von C wird vergrössert durch einen Hebel EF, dessen Drehaxe gebildet wird durch die Spitzen zweier Säulen D, welche auf der Fundamentplatte B befestigt sind.

Auf den Hebel EF wirkt ausser der federnden Büchse A, welche bei C angreift, noch die Spiralfeder G, welche denselben Zweck erfüllt, wie die Feder L bei *Naudet*. Gegenüber der Feder G wirken zwei Gewichte P, P, verschiebbar zur Spannungs-Regulierung.

Der Hebel EF trägt bei F eine feine Teilung auf Glas (welche photographisch auf das Glas übertragen ist). Diese Teilung F wird mittelst eines Mikroskops HH abgelesen, das in der Richtung seiner Axe verschoben werden kann mittelst einer unterhalb angebrachten Schraube J, so dass die vor dem Objektiv angebrachte Teilung

F deutlich gesehen wird; dieselbe gewährt dann ungefähr denselben Anblick wie eine Nivellier-Latte in etwa 50^m Entfernung beim Anblick durch das Fernrohr eines Nivellier-Instrumentes.

Die für mikroskopische Beobachtung nötige Beleuchtung wird durch eine Sammellinse K geliefert.

Fig. 3.
($^1/_2$ natürliche Grösse.)
Mikroskop-Feder-Barometer von *Reitz-Deutschbein.*

(Hannov. Sammlung.)

Die Spiralfeder G ist von unten zugänglich durch die Öffnung L des Kastenbodens und der Grundplatte B; man kann bei L einen Schraubenschlüssel einstecken und damit die Spannung der Spiralfeder G regulieren. Die Stellung von F gegen das Mikroskop kann nach zwei Richtungen reguliert werden, durch die Schrauben M und N. Ein inneres Thermometer Q wird durch die Öffnung R abgelesen. Die Teilung ist bei unserem Instrumente willkürlich. Wir fanden folgende Beziehungen:

F	Q_0	*Diff.*	F	Q_0	*Diff.*
1200	744,90^{mm}		1600	753,80^{mm}	
		2,22^{mm}			2,23^{mm}
1300	747,12		1700	756,03	
		2,23			2,22
1400	749,35		1800	758,25	
		2,22			2,23
1500	751,57		1900	760,48	
		2,23			2,22
1600	753,80		2000	762,70	

Eine erste Mitteilung über das *Reitz*sche Instrument haben wir in der „Zeitschr. f. Verm. 1873“, S. 363—378 gebracht; eine neuere Mitteilung hierüber, von *Hammer*, siehe „Zeitschr. f. Verm. 1887“, S. 20—25.

Anmerkungen.

Das erste Feder-Barometer wurde im Jahr 1847 von *Vidi* der Pariser Akademie vorgelegt; es bestand im wesentlichen, wie heute noch, aus einer luftleer gemachten Büchse von wellenförmigem Querschnitt. Das Instrument wurde von dem Erfinder „baromètre anéroide“ genannt. (Comptes rendues hebdomadaires des séances de l'académie des sciences XXIV. (1847) S. 975. *Poggendorffs* Annalen der Physik, 73. Band (1848) S. 620. Aneroid ist abgeleitet aus *α privativum* und νηρός = *nass* oder *flüssig*, das Wort bedeutet also ein Barometer, das keine Flüssigkeit (Quecksilber) enthält.)

Bald darauf konstruierte *Bourdon* ein Feder-Barometer, dessen Gefäss die Gestalt einer Mondsichel hat, wobei die Veränderungen des Abstandes der Spitzen durch Hebelübersetzung gemessen werden. *Bourdon* nannte dieses Instrument ein „*Metall-Barometer*“ (entsprechend seinem *Metall-Manometer*).

Goldschmids Fühlfeder-Barometer wurde 1857 erfunden.

Die ursprüngliche *Vidi*sche Konstruktion ist von *Naudet* und *Hulot* in Paris verbessert worden; die Pariser Instrumente haben weite Verbreitung gefunden, sie wurden *baromètre holostérique* (starr) genannt. Auch englische Firmen versandten ähnliche Instrumente.

Von *deutschen* Instrumenten sind ausser der eigentümlichen *Reitz*schen Konstruktion (Fig. 3. S. 493) namentlich die sehr nahe kompensierten *Bohne*schen Instrumente (s. o. S. 491) hervorzuheben.

§ 139. Reduktionsformeln für Feder-Barometer.

Man kann im allgemeinen nicht erwarten, dass ein Feder-Barometer, wenn es auch nach Millimetern 760, 750 u. s. w. beziffert ist, *genau* den Luftdruck anzeige, welchen ein richtiges Quecksilber-Barometer an gleicher Stelle zeigen würde.

Die unmittelbare Ablesung F eines Feder-Barometers wird im Allgemeinen nur genähert gleich dem Werte Q_0 sein, welchen ein Quecksilber-Barometer nach Anbringung aller Reduktionen (§ 134.—§ 137.) liefert. Wir wollen vorerst annehmen, die Beziehung zwischen Q_0 und F lasse sich durch eine Gleichung von folgender Form darstellen:

$$Q_0 = F + x + y\,t + z\,(760 - F) \qquad (1)$$

Hiebei nennen wir:

x die Stand-Korrektion.

$y\,t$ die Temperatur-Korrektion, und y den Temperatur-Coëfficienten,

$z\,(760-F)$ die Teilungs-Korrektion, und z den Teilungs-Coëfficienten.

Die Gleichung (1) reicht in den meisten Fällen aus, ja man kann bei den neueren Instrumenten für rohere Zwecke die Temperatur-Korrektion und die Teilungs-Korrektion vernachlässigen, denn bei den thunlichst kompensierten Instrumenten ist y nur etwa $= 0{,}05$ d. h. $0{,}05^{mm}$ auf $1°$ oder $0{,}5^{mm}$ auf $10°$, und die Teilungen neuerer guter Instrumente pflegen auf etwa $1\,\%$ sicher zu sein, d. h. sie haben z nur etwa $= 0{,}01$.

Allein im allgemeinen kann man bei Instrumenten die man nicht kennt, durchaus nicht erwarten, dass die Korrektionen so klein sind. Die Temperatur-Korrektion beträgt oft $0{,}2^{mm}$ für $1°$, und die Teilungen finden sich wohl bis $5\,\%$ und mehr fehlerhaft.

Man kann auch nicht von vornherein annehmen, dass bei weiten Intervallen eine lineare Gleichung (1) immer ausreiche; bei genaueren Untersuchungen wird man wohl noch weitere Glieder hinzunehmen müssen, etwa so:

$$Q_0 = F + x + y\,t + z\,(760-F) + y'\,t\,(760-F) + z'\,(760-F)^2 + y''\,t^2 + \ldots \qquad (2)$$

Hier bedeutet $y'\,t\,(760-F)$ den mit dem Barometerstand selbst veränderlichen Teil der Temperatur-Korrektion, und das quadratische Glied $z'\,(760-F)^2$ nennt man hier eine Teilungs-Korrektion zweiter Ordnung u. s. w.

Solche weitere Glieder der Überlegung im einzelnen Falle überlassend, betrachten wir nochmals die einfache Gleichung (1), an welche noch einige Bemerkungen zu knüpfen sind, welche zur Vorbereitung für spätere Anwendungen dienen.

Zunächst kann man die Gleichung (1) nach F auflösen:

$$F = \frac{Q_0}{1-z} - \frac{x}{1-z} - \frac{y}{1-z}\,t - 760\,\frac{z}{1-z}.$$

Dieses kann man aber besser in folgende Form bringen:

$$F = Q_0 - \frac{x}{1-z} - \frac{y}{1-z}\,t - \frac{z}{1-z}\,(760-Q_0) \qquad (3)$$

Wenn z klein ist, so kann man den Nenner $1-z=1$ setzen, und dann erscheint (3) als Näherungsauflösung von (1), indem nur im letzten Gliede $760-Q_0$ statt $760-F$ gesetzt ist.

Wenn man umgekehrt eine Gleichung zu Grunde legt:

$$F - Q_0 = x' + y'\,t + z'\,(760-Q_0) \qquad (4)$$

so kann man dieselbe nach Q_0 auflösen, und erhält:

$$Q_0 - F = \frac{x'}{1-z'} - \frac{y'}{1-z'} - \frac{z'}{1-z'}\,(760-F) \qquad (5)$$

Bisher haben wir einen Normalstand von 760^{mm} angenommen, das ist aber natürlich nicht wesentlich; will man z. B. statt 760 den Stand 700 einführen, so kann man (1) so schreiben:

$$Q_0 - F = (x + 60\,z) + y\,t + z\,(700-F) \qquad (6)$$

oder

$$Q_0 - F = (x + 60\,z) + y\,t - z\,(F-700) \text{ u. s. w.}$$

Durch die Änderung des Normalstandes von 760 auf 700 ist auf die Stand-Korrektion von x auf $x + 60\,z$ übergegangen.

Wir wollen auch in einer quadratischen Funktion den Normalstand ändern. Man habe zunächst:

$$Q_0 = F + x + y\,t + z\,(760 - F) + u\,(760 - F)^2 \qquad (7)$$

Wenn man hier einen anderen Normalstand als 760, etwa 700 einführen will, so setzt man in den zwei letzten Gliedern $760 = 700 + 60$, und erhält damit:

$$Q_0 = F + (x + 60\,z + 60^2\,u) + y\,t + (z + 120\,u)\,(700 - F) + u\,(700 - F)^2 \qquad (8)$$

Hier wird also nicht nur die Stand-Korrektion, sondern auch der Teilungs-coëfficient durch Veränderung des Normalstandes geändert.

Dieses führt dazu, die oben bei (1) gegebenen Erklärungen, Stand-Korrektion, Temperatur-Korrektion und Teilungs-Korrektion genauer so zu fassen, dass diese Grössen, wenn man eine allgemeine Funktion (2) zu Grunde legt, nur durch gleichzeitige Angabe eines Normalstandes scharf bestimmt sind.

In Bezug auf die Resultate, welche man aus einer Reduktionsformel ziehen will, ist es gleichgültig, welcher Normalstand zu Grunde gelegt wird, und deswegen rechnen wir im allgemeinen mit dem Normalstand 760; indessen ist es formell häufig zu empfehlen, den *Mittelstand* als Normalstand zu nehmen. Wenn man z. B. eine Formel mit einer Teilungs-Korrektion zweiter Ordnung bestimmen will, so ist es bei der Ausgleichung bequem, den Normalstand möglichst gleich dem Mittel aller in Betracht kommenden Stände zu machen.

Die Grundlagen zur Aufstellung einer Reduktionsformel zwischen Q_0 und F wird man immer durch mehrfache Vergleichung eines Feder-Barometers mit einem Quecksilber-Barometer bekommen, und hat man eine Reihe solcher Vergleichungen bei möglichst verschiedenen Temperaturen *und* möglichst verschiedenen Luftdrücken, so kann man aus einer solchen Reihe alle Coëfficienten x, y, z u. s. w. einer Reduktionsformel gemeinsam (etwa nach der M. d. kl. Q.) bestimmen.

Indessen solche allgemein für Temperatur *und* Luftdruck brauchbare Vergleichsreihen erhält man selten, deswegen wird meist der Temperatureinfluss besonders untersucht (durch rasche Abkühlungen bezw. Erwärmungen des Feder-Barometers) und dann wird an die Bestimmung der Teilungsfehler gegangen, wozu man im wesentlichen drei Arten von Vergleichungen benützt:

1) Ruhe-Vergleichungen,
2) Bergbesteigungen,
3) Luftpumpenversuche.

Statt der rechnerischen Reduktionsbestimmung kann man auch *graphische* Ausgleichung anwenden.

Wir werden für beides im Folgenden Beispiele behandeln.

§ 140. Temperatur-Korrektion der Feder-Barometer.

Wir legen die Reduktionsformel zu Grunde:

$$Q_0 = F + x + y\,t + z\,(760 - F) \qquad (1)$$

Die Temperatur-Korrektion lässt sich am besten im Winter bestimmen; man beobachtet das Instrument im gewöhnlich geheizten Zimmer und liest gleichzeitig ein Quecksilber-Barometer (oder ein anderes Feder-Barometer) ab, dann legt man das zu untersuchende Instrument in die freie kalte Luft, und liest nach etwa einer Stunde abermals seinen Stand und gleichzeitig den des Quecksilber-Barometers ab, beidemale

wird auch der Stand t des innern Thermometers an dem zu untersuchenden Feder-Barometer notiert.

Die Gleichung (1) entspreche der ersten Beobachtung und eine ähnliche Gleichung mit accentuierten Buchstaben der zweiten Beobachtung, dann hat man:

$$Q_0 = F + x + y\,t + z\,(760 - F) \tag{1}$$

$$Q_0' = F' + x + y\,t' + z\,(760 - F') \tag{2}$$

Nun wollen wir annehmen, dass die Teilung nahezu richtig, also der Coëfficient z sehr klein sei; und da zugleich F und F' nicht sehr verschieden sind, können die beiden letzten Glieder in (1) und in (2) hinreichend genau einander gleich gesetzt werden; man erhält also durch Subtraktion:

$$Q'_0 - Q_0 = F' - F + y\,(t' - t)$$

$$y = \frac{(Q_0' - Q_0) - (F' - F)}{t' - t} \tag{3}$$

oder kürzer:

$$y = \frac{\Delta Q_0 - \Delta F}{\Delta t} = -\frac{\Delta F - \Delta Q_0}{\Delta t} \tag{4}$$

wobei durch ΔQ_0, ΔF, Δt gleichartige Differenzen bezeichnet sind.

Eine Reihe solcher Beobachtungen und deren Berechnung zeigt das folgende tabellarisch geordnete Beispiel, in welchem unter Q_0, Q'_0 die bereits auf 0° reduzierten Quecksilber-Barometer-Angaben verstanden sind.

Temperatur-Korrektion für das Instrument Naudet 39305.

Nr.	Zeit	t t'	Q_0 Q_0'	F F'	ΔQ_0	ΔF	$\Delta F - \Delta Q_0$	Δt	y
	1877		mm	mm	mm	mm	mm		
1.	Jan. 26. 9h Jan. 26. 10h	20,2° 6,0	746,5 746,8	749,6 747,6	+ 0,3	− 2,0	− 2,3	− 14,2°	− 0,162
2.	Jan. 26. 3h Jan. 26. 4h	19,0 6,0	748,6 749,0	750,9 749,5	+ 0,4	− 1,4	− 1,8	− 13,0	− 0,138
3.	Jan. 27. 9h Jan. 27. 10h	20,2 3,0	756,2 757,3	758,6 757,3	+ 1,1	− 1,3	− 2,4	− 17,2	− 0,140
			Summe . .		+ 1,8	− 4,7	− 6,5	− 44,4	− 0,440

$$\text{Mittel } y = -\frac{0{,}440}{3} = -0{,}147$$

Solcher Vergleichungen, deren hier nur drei hergesetzt sind, weil dieses zur Veranschaulichung des Verfahrens genügt, machen wir gewöhnlich etwa 5 — 10, täglich etwa 1—2.

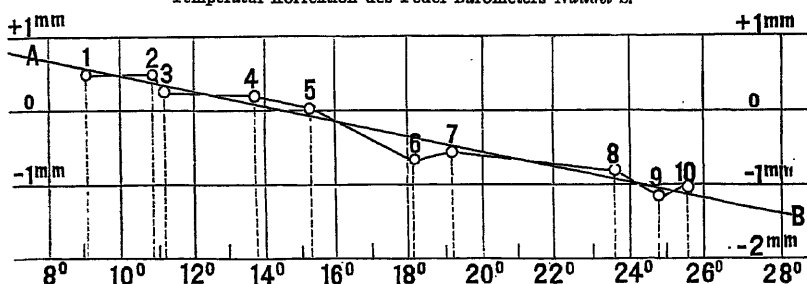
Statt durch Verbindung der Vergleichungen zu je *zweien* (warm und kalt) kann man eine grössere Reihe von Vergleichungen auch *gemeinsam* behandeln, indem man graphisch oder nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgleicht.

Folgendes ist ein Beispiel hiezu, welches mit einem *Naudet*-Instrument der Karlsruher Sammlung durch 4tägige Vergleichung erhalten wurde. Die Quecksilber-Baro-

meterstände sind sofort auf 0° reduziert, unter der Bezeichnung Q_0 eingeführt Die folgende Tabelle enthält ausser den Beobachtungen Q_0, F und t alles, was zur graphischen Ausgleichung oder zur Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate erforderlich ist.

Nr.	Q_0	F	t	$F - Q_0 = l$	$0{,}1\,t = b$	b^2	$b\,l$	l^2
	mm	mm		mm				
1.	758,76	758,25	9,6°	— 0,51	0,96	0,92	— 0,49	0,26
2.	759,51	759,05	10,9	— 0,46	1,09	1,19	— 0,51	0,21
3.	759,34	759,00	11,2	— 0,34	1,12	1,25	— 0,38	0,12
4.	758,54	758,40	13,7	— 0,14	1,37	1,88	— 0,19	0,02
5.	758,26	758,25	15,4	— 0,01	1,54	2,37	— 0,02	0,00
6.	758,08	758,75	18,2	+ 0,67	1,82	3,31	+ 1,22	0,45
7.	759,51	760,00	19,2	+ 0,49	1,92	3,69	+ 0,94	0,24
8.	758,26	759,15	23,6	+ 0,89	2,36	5,57	+ 2,10	0,79
9.	759,28	760,35	24,8	+ 1,07	2,48	6,15	+ 2,65	1,14
10.	758,61	759,65	25,5	+ 1,04	2,55	6,50	+ 2,65	1,08
	88,15	90,85	172,1	+ 2,70	17,21	32,83	+ 7,97	4,31

Zu einer graphischen Ausgleichung nimmt man die Temperaturen t als Abscissen und die Differenzen $F - Q_0 = l$, oder $Q_0 - F = -l$, als Ordinaten, und trägt damit die 10 Punkte von Fig. 1. auf.

Fig. 1.
Temperatur-Korrektion des Feder-Barometers *Naudet S.*

Eine verglichen durchgezogene Gerade giebt den Temperatur-Coëfficienten durch ihre Neigung gegen die Abscissen-Axe. Bei $t = 10°$ hat die Gerade $A\,B$ eine Ordinate $+0{,}5^{mm}$ und bei $t = 28°$ ist die Ordinate $-1{,}4^{mm}$; die Abnahme beträgt also $-1{,}9^{mm}$ auf 18° Temperatur, und hiernach ist der Temperatur-Coëfficient:

$$y = -\frac{1{,}9}{18} = -0{,}106.$$

Zu einer rechnerischen Ausgleichung gehen wir von der einfachen Gleichung aus:

$$Q_0 = F + x + y\,t$$

indem die Teilungs-Korrektion innerhalb der geringen hier benützten Ausdehnung als verschwindend angenommen wird. Die Fehlergleichungen schreiben wir so:

$$v = x + 10\, y\, \frac{t}{10} + F - Q_0$$

oder $\quad v = x + b y' + l \quad , \quad$ wo $\; b = \frac{t}{10} \;$ und $\; y' = 10\, y.$

Die hiezu gehörigen Summen $[b\,b]$ u. s. w. sind in der vorstehenden Tabelle S. 498 schon ausgerechnet, sie geben die Normalgleichungen:

$$\begin{array}{rrr} +10{,}00\,x & +17{,}21\,y' & +2{,}70 = 0 \\ & +32{,}83\,y' & +7{,}97 = 0 \\ & & +4{,}31 \end{array}$$

Die Auflösung giebt:

$$x = +1{,}51^{mm} \;,\; y' = -1{,}03 \;\text{oder}\; y = -0{,}103 \;,\; [l\,l\,.\,2] = 0{,}14$$
$$\pm 0{,}12 \qquad\qquad \pm 0{,}07 \qquad\qquad \pm 0{,}007$$

Also die Reduktionsformel:

$$Q_0 = F + 1{,}51^{mm} - 0{,}103\, t \tag{6}$$

Wenn man hiernach alle 10 Beobachtungen reduziert und die bei der Ausgleichung übrig bleibenden Fehler v bildet und quadriert, so erhält man $[v\,v] = 0{,}12$ hinreichend übereinstimmend mit $[l\,l\,.\,2] = 0{,}14$ der Elimination. Der mittlere Fehler einer Vergleichung wird:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{10-2}} = \pm 0{,}12^{mm}. \tag{7}$$

Die Grösse des Temperatur-Coëfficienten.

Der Reduktionswert für 1° ist bei den meisten Pariser Instrumenten zwischen $-0{,}1^{mm}$ und $-0{,}2^{mm}$.

Jelinek giebt in *Carls* „Repertorium der Experimentalphysik“ (13. Band, 1877, S. 68—73) die Mitteilung, dass bei 108 Feder-Barometern, welche an der österreichischen Zentralanstalt für Meteorologie untersucht wurden, folgende Temperatur-Coëfficienten y gefunden wurden:

bei	9	Exemplaren	y	zwischen	+ 0,23	und	0,00
„	9	„	y	„	0,00	„	— 0,07
„	82	„	y	„	— 0,07	„	— 0,17
„	8	„	y	„	— 0,17	„	— 0,37

Die positiven Werte y zeigten sich in der Regel bei kleinen Instrumenten von 7^{cm} Durchmesser.

Eine ähnliche Zusammenstellung haben wir von Major *Hartl* in den „Mitteilungen des k. k. militär-geographischen Instituts“ 1. Jahrgang, 1881 (abgedruckt in der „Zeitschr. f. Verm. 1882“, S. 458—470). Bei 81 Instrumenten war der Temperatur-Coëfficient y zwischen $-0{,}03$ und $-0{,}24$, und darunter bei 58 Instrumenten oder 72 %, y zwischen $-0{,}11$ und $-0{,}17$.

Den mittleren Fehler einer Jahresbestimmung, von y, aus 30—40 Vergleichungen, giebt *Hartl* $= \pm 0{,}014^{mm}$ an.

Temperatur-Korrektion zweiter Ordnung und Abhängigkeit der Temperatur-Korrektion vom Barometerstand.

Die bisher gemachte Annahme, dass die Temperatur-Korrektion bei allen Barometerständen dieselbe sei, ist nur für eine erste Näherung richtig. Man muss im

allgemeinen annehmen, dass die Reduktion bei verschiedenen Ständen verschieden ist, oder dass in der Reduktionsformel (2) § 139. S. 495 ausser dem Gliede $y\,t$ noch Glieder von der Form $y'\,t\;(760 - F)$ oder $y''\,t^2$ u. s. w. vorkommen. *Koppe* giebt in dem Buche „Die Aneroide von Jakob Goldschmid“, Zürich 1877, S. 18, nach *Weilenmann* eine theoretische Untersuchung der zwei verschiedenen Temperatur-Einflüsse, welche einander entgegenwirken, nämlich Vergrösserung der Büchsenoberfläche und Ausdehnung der stets im Innern noch befindlichen Luft, wornach die Temperatur-Kurve nicht geradelinig sein kann, sondern ungefähr parabolische Form haben muss (Glied $y''\,t^2$), und *Koppe*s Versuche mit graphischen Darstellungen bestätigen dieses. Trotzdem begnügt man sich bei mässigen Temperatur-Intervallen nicht mit einer linearen Funktion.

Was andererseits die Abhängigkeit vom *Barometerstand* betrifft, so wurde dieselbe bei genauerer Untersuchung von *Hartl* bedeutend gefunden, wie aus den graphischen Darstellungen im 1. Band des „Militär-geograph. Instituts“ und in der „Zeitschr. f. Verm. 1882“, S. 467—469 zu ersehen ist.

Als Zahlentafel giebt *Hartl* in dem Buche „Praktische Anleitung zum Höhenmessen mit Barometern u. s. w.“ Wien 1884, S. 53, folgendes (im Auszug):

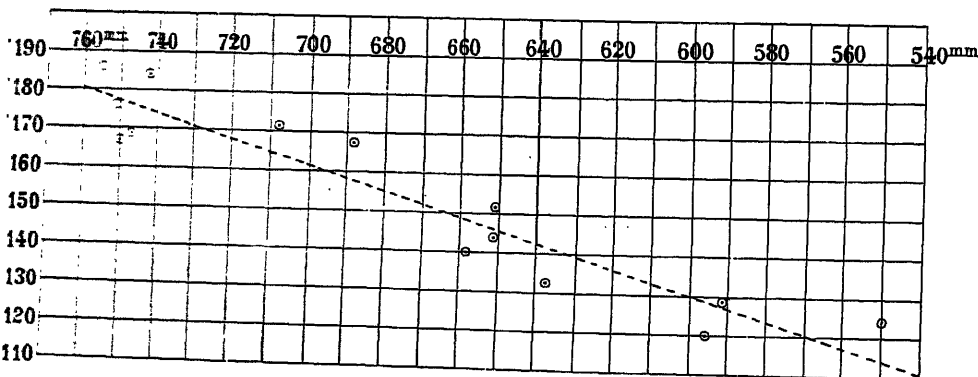
Temperatur-Korrektion für das Feder-Barometer 1222:

t	$B = 760^{mm}$	$B = 720^{mm}$	$B = 680^{m}$	$B = 640^{mm}$
0°	— 0,0mm	— 0,0mm	— 0,0mm	— 0,0mm
10°	— 1,8	— 1,7	— 1,6	— 1,4
20°	— 3,6	— 3,4	— 3,1	— 2,9
30°	— 5,4	— 5,0	— 4,7	— 4,3

(8)

In solchem Falle kann man auch eine Tafel für Temperatur-Korrektion und Teilungs-Korrektion zusammen anlegen.

Die graphische Darstellung der Beobachtungen selbst und die Ausgleichung nach (8) zeigt folgende Figur:

Fig. 2.
Feder-Barometer Nr. 1222. Temperatur-Korrektion.

Hartl kommt zu dem Schluss: dass es keineswegs genügt, die Feder-Barometer nur bei den geringen Luftdrucksschwankungen an einem und demselben Orte zu beobachten, sondern dass Bestimmungen des Temperatur-Coëfficienten bei sehr verschiedenem Luftdruck erforderlich sind, um eine *Tabelle mit zwei Eingängen* konstruieren zu können

Änderung der Temperatur-Korrektion mit der Zeit.

Es ist eine wiederholt gemachte Erfahrung, dass jedenfalls bei *neuen* Instrumenten sich die Temperatur-Wirkungen mit der Zeit ändern. Von unserem Karlsruher Instrument *Naudet* 39305 können wir hierüber folgende Bestimmungen mitteilen, welche bis 1880 von uns selbst gemacht, von 1881 an von Herrn Dr. *Doll* in Karlsruhe mitgeteilt sind; die Vergleichungen sind in der einfachen Weise, wie das Beispiel S. 497 zeigt, mit je 6—10 Wiederholungen, gemacht.

Karlsruhe	1872	Januar und Februar	$y = -0{,}148$
„	„	November	$-0{,}168$
„	1873	September	$-0{,}146$
„	1874	November und Dezember	$-0{,}157$
„	1877	Januar	$-0{,}138$
„	1879	Januar	$-0{,}124$
„	1880	Januar	$-0{,}123$
„	1881	Januar	$-0{,}118$
„	1882	Januar	$-0{,}141$
„	1888	Februar	$-0{,}070$.

Jelinek berichtet in „*Carl*s Repert. 13. Bd. 1877“, S. 68, dass eine Abnahme der Temperatur-Korrektion wiederholt beobachtet wurde, z. B. von 27 Instrumenten, welche von Hauptmann *Hartl* 1873 und 1875 untersucht wurden, zeigten 22 eine solche Abnahme, 5 eine Zunahme, im Mittel war die Abnahme = 0,012 für 2 Jahre. 8 andere von *Jelinek* aufgeführte Instrumente zeigen von 1869—1875 im Mittel eine Abnahme von nur 0,05 für 4 Jahre.

Wenn überhaupt eine Änderung der Empfindlichkeit gegen Temperatur stattfindet, so wird es wohl eine Abnahme sein, welche durch das Stabilerwerden der molekularen Zusammensetzung der Instrumenten-Bestandteile erklärbar ist.

Koppe sagt hierüber („Die Aneroide von Goldschmid“, Zürich 1877, S. 23): Eine ganz neue Büchse kann vollständig kompensiert erscheinen, und nach mehrmaligem Erhitzen eine stark gekrümmte Temperatur-Kurve zeigen. Die neuen Aneroide bleiben daher stets längere Zeit hindurch einer Temperatur bis zum Siedepunkt ausgesetzt. Ihre Angaben werden so nach und nach immer regelmässiger und werden zuletzt durch starkes Erwärmen gar nicht mehr geändert.

Auch *Hartl* spricht sich in der mehrfach citierten Abhandlung in den „Mitteilungen des milit.-geogr. Inst. 1881“, S. 88 (und „Zeitschr. f. Verm. 1882“, S. 463) ähnlich aus: Für die eine hinreichend lange Reihe von Jahren verglichenen Feder-Barometer kann der Temperatur-Coëfficient als eine mit der Zeit nicht veränderliche Grösse angesehen werden. *Neuere* Instrumente werden vielleicht Jahre benötigen, bis ihre Temperatur-Coëfficienten konstante Grössen geworden sind.

Zur Beantwortung der Frage nach „*kompensierten*“ Feder-Barometern, zu welcher bereits in § 138. S. 491 eine *Bohne*sche Konstruktion erwähnt worden ist, können wir über unser Hannoversches Instrument, *Bohne* Nr. 780, folgendes berichten: Im Februar

1886 gab dasselbe den Temperatur Coëfficienten $y = -0{,}008$, also sehr nahe = Null Im Februar 1888 wurden ähnliche Werte (Mittel $y = +0{,}01$) gefunden. Es ist nicht gleichgültig, ob man schon nach 1 Stunde, oder nach 2—3 Stunden abliest, nachdem der Temperaturwechsel eingetreten ist.

§ 141. Teilungs-Korrektion der Feder-Barometer.

Zur Untersuchung der Teilung eines Feder-Barometers hat man verschiedene Mittel, die im wesentlichen in folgendem bestehen:

I. Fortgesetzte Vergleichungen eines Feder-Barometers mit einem Quecksilber-Barometer bei natürlichen Luftdrücken, wobei beide Instrumente in Ruhe bleiben.

II. Vergleichungen bei Bergbesteigungen.

III. Vergleichungen unter der Luftpumpe, oder mit ähnlichen Vorrichtungen zur Erzeugung künstlicher Luftdrucks-Verhältnisse.

Wir werden diese drei Methoden nacheinander behandeln.

I. Ruhende Vergleichungen.

Die einfachste Bestimmung der Teilungs-Korrektion erhält man durch fortgesetzte Vergleichung des Feder-Barometers mit einem guten Quecksilber-Barometer, an einem und demselben Ort. Allerdings sind die hiebei erreichbaren Luftdrucks-Intervalle nur mässig, doch reicht eine solche Untersuchung für viele Zwecke vollständig aus.

Die Schwankungen des Luftdrucks sind in verschiedenen Jahreszeiten sehr verschieden, nämlich im Winter bedeutender als im Sommer. Nach den Stuttgarter Beobachtungen (*Schoder*, „Württemb. naturw. Jahreshefte 1868," S. 262) sind die mittleren monatlichen Schwankungen nach 12jährigen Beobachtungen folgende:

Monat	*Mittl. monatl. Schwankung*	*Monat*	*Mittl. monatl. Schwankung*
Januar . . .	$\pm 29^{mm}$	Juli	$\pm 15^{mm}$
Februar . . .	25	August . . .	14
März	29	September . .	18
April	20	Oktober . .	23
Mai	18	November . .	26
Juni	16	Dezember . .	29

Man wird also namentlich in den Monaten Dezember, Januar und März solche Barometer-Vergleichungen machen.

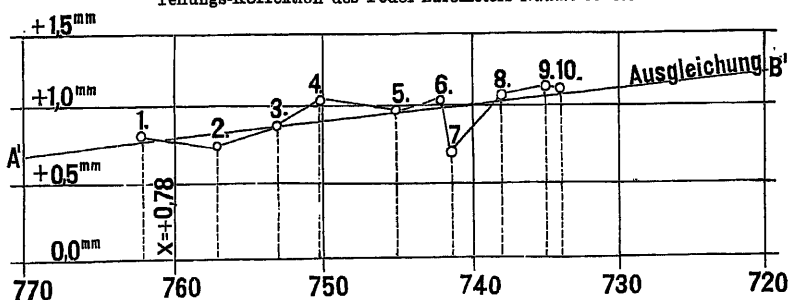
Folgendes ist ein Beispiel hiefür, mit dem Instrument *Naudet* 39305, Karlsruhe 20. Februar bis 14. März 1877. Der Übersichtlichkeit wegen ist das Zahlenmaterial auf 10 Vergleichungen beschränkt.

Die aufgeführten Werte Q_0 und F_0 sind bereits auf 0° reduziert.

Die Tabelle enthält ausser den Beobachtungen selbst, alles, was zu graphischer oder rechnerischer Ausgleichung nötig ist:

Nr.	Q_0	F_0	$F_0 - Q_0 = l$	$760 - F_0$	$\frac{760 - F_0}{100} = b$	b^2	$b\,l$	l^2
	mm	mm	mm	mm				
1.	762,82	762,03	— 0,79	— 2,03	— 0,02	0,000	+ 0,016	0,624
2.	757,56	756,82	— 0,74	+ 3,18	+ 0,03	0,001	— 0,022	0,548
3.	753,95	753,06	— 0,89	+ 6,94	+ 0,07	0,005	— 0,062	0,792
4.	751,30	750,27	— 1,03	+ 9,73	+ 0,10	0,010	— 0,103	1,061
5.	745,66	744,70	— 0,96	+ 15,30	+ 0,15	0,022	— 0,144	0,922
6.	743,28	742,24	— 1,04	+ 17,76	+ 0,18	0,032	— 0,187	1,082
7.	742,26	741,57	— 0,69	+ 18,43	+ 0,18	0,032	— 0,124	0,476
8.	739,30	738,22	— 1,08	+ 21,78	+ 0,22	0,048	— 0,238	1,166
9.	735,79	734,65	— 1,14	+ 25,35	+ 0,25	0,062	— 0,285	1,300
10.	734,95	733,83	— 1,12	+ 26,17	+ 0,26	0,068	— 0,291	1,254
	466,87	457,39	— 9,48	142,51	+ 1,42	0,280	— 1,440	9,225

Zu einer graphischen Ausgleichung, welche in der nachfolgenden Fig. 1. gezeichnet ist, hat man zu den Werten F_0, als Abscissen, die Ordinaten $F_0 - Q_0 = l$ oder $Q_0 - F_0 = -l$ aufzutragen.

Fig. 1.
Teilungs-Korrektion des Feder-Barometers *Naudet* 39805.

Durch die so erhaltenen 10 Punkte kann man zunächst nach Gutdünken eine möglichst anschliessende Gerade $A'\,B'$ legen, womit die graphische Ausgleichung vollendet ist. Die Ordinaten der Geraden geben dann geradezu die Stand- und Teilungs-Korrektionen; z. B. bei 740mm ist die Ordinate $= + 1{,}0^{mm}$.

Die rechnerische Ausgleichung gründet sich auf die Formel:

$$Q_0 = F_0 + x + z\,(760 - F_0) \tag{1}$$

oder die Fehlergleichung:

$$v = x + z' \, \frac{760 - F_0}{100} + F_0 - Q_0 \quad , \quad \text{wo } z' = 100\,z$$

oder

$$v = x + b\,z' + l. \tag{2}$$

Die Coëfficienten der Normalgleichungen sind schon in der obigen Tabelle berechnet, die Normalgleichungen sind hiernach:

$$\begin{array}{l} \underline{10\,x} + 1{,}42\,z' - 9{,}48 = 0 \\ \qquad \underline{+ 0{,}28\,z'} - 1{,}44 = 0 \\ \qquad\qquad \underline{+ 9{,}22.} \end{array}$$

Die Auflösung giebt:

$x = +0{,}78^{mm} \pm 0{,}07$ | $z' = +1{,}13 \pm 0{,}43$ oder $z = +0{,}0113 \pm 0{,}0043$ | $[ll.2] = 0{,}12.$

Die Reduktionsformel ist also:

$$Q_0 = F_0 + 0{,}78^{mm} + 0{,}0113\,(760 - F_0) \tag{3}$$

$$\text{Mittlerer Fehler: } m = \sqrt{\frac{[vv]}{8}} = \sqrt{\frac{0{,}12}{8}} = \pm 0{,}12^{mm}.$$

Nach der Formel (3) kann man eine Reduktionstabelle berechnen, deren Hauptwerte sind:

F_0	$Q_0 - F_0$	F_0	$Q_0 - F_0$
760mm	+ 0,78mm	730mm	+ 1,12
750	+ 0,89	720	+ 1,23
740	+ 1,01	710	+ 1,35
730	+ 1,12	700	+ 1,46

(4)

Teilungs-Korrektion höherer Ordnung durch zwei ruhende Vergleichs-Reihen.

Wenn man an zwei sehr verschieden hohen Orten ruhende Vergleichungen in der soeben beschriebenen Weise gemacht hat, und dabei merklich verschiedene Teilungs-Coëfficienten erster Ordnung findet, so kann man daraus eine Formel mit quadratischem Gliede ableiten.

Man habe an zwei Orten folgende zwei lineare Formeln erhalten:

$$Q_0 - F_0 = x_1 + z_1\,(Q_1 - F_0) \tag{5}$$
$$Q_0 - F_0 = x_2 + z_2\,(Q_2 - F_0) \tag{6}$$

Dabei seien Q_1 und Q_2 die Mittelstände der beiden Vergleichs-Orte. Die neue Formel, welche für *beide* Orte gelten soll, werde auf den Mittelstand Q_m bezogen, und sei diese:

$$Q_0 - F_0 = x + z\,(Q_m - F_0) + z'\,(Q_m - F_0)^2 \tag{7}$$

dabei ist:

$$\frac{Q_1 + Q_2}{2} = Q_m \quad \text{und} \quad Q_1 - Q_2 = \Delta Q \tag{8}$$

Der allgemeine Differentialquotient von (7) ist:

$$\frac{d\,(Q_0 - F_0)}{d\,F_0} = -z - 2z'\,(Q_m - F_0)$$

Setzt man hier $F_0 = Q_1$, so wird der Differentialquotient $= z_1$, und mit $F_0 = Q_2$ wird er $= z_2$, d. h.:

$$-z - 2z'\,(Q_m - Q_1) \quad \text{oder} \quad -z + z'\,\Delta Q = -z_1$$

und

$$-z - 2z'\,(Q_m - Q_2) \quad \text{oder} \quad -z - z'\,\Delta Q = -z_2.$$

Diese beiden Gleichungen zusammen geben z und z':

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2} \quad \text{und} \quad z' = \frac{z_2 - z_1}{2\,\Delta Q} \tag{9}$$

Zu einem Zahlenbeispiel nehmen wir unser Karlsruher Instrument *Naudet* 39305. Dasselbe gab in Karlsruhe, nach Gleichung (3):

$$Q_0 - F_0 = +0{,}78 + 0{,}0113\,(760 - F_0) \tag{10}$$

und in Höchenschwand auf dem Schwarzwald aus einer ähnlichen ruhenden Vergleichung:

$$Q_0 - F_0 = +4{,}30 + 0{,}0261\,(670 - F_0) \tag{11}$$

Es ist also:

$$Q_1 = 760^{mm} \quad , \quad Q_2 = 670^{mm} \quad , \quad \Delta Q = 90^{m} \quad , \quad Q_m = 715^{mm}$$
$$z_1 = +\,0{,}0113 \quad , \quad z_2 = +\,0{,}0261$$
$$z = +\,0{,}0187 \quad , \quad z' = +\,\frac{0{,}0148}{1800} = +\,0{,}000082.$$

Die neue Formel heisst also nun nach (7):

$$Q_0 - F_0 = x + 0{,}0187\,(715 - F_0) + 0{,}000082\,(715 - F_0)^2 \qquad (12)$$

Die Standkorrektion x kann man zweifach bestimmen, indem man $F'_0 = 715$ entweder in (10) oder in (11) einsetzt, im ersten Falle bekommt man $x = +\,1{,}29$ und im zweiten Falle $x = +\,3{,}13$. Dieser Widerspruch ist jedoch kein Beweis gegen die Brauchbarkeit der Formel (12), denn auf dem Transport des Instrumentes von Karlsruhe nach Höchenschwand (als Postpaket) kann sich die *Stand*korrektion wohl geändert haben. Indessen nehmen wir nun das Mittel beider Werte, $x = +\,2{,}21$, und haben damit aus (12):

$$Q_0 - F_0 = +\,2{,}21 + 0{,}0187\,(715 - F_0) + 0{,}000082\,(715 - F_0)^2. \qquad (13)$$

Dieses kann man auch wieder auf den Normalstand 760 reduzieren, indem man $715 = 760 - 45$ setzt, und alle von 45 herrührenden Teile absondert. Dieses giebt:

$$Q_0 - F'_0 = +\,1{,}53 + 0{,}0113\,(760 - F'_0) + 0{,}000082\,(760 - F_0)^2. \qquad (14)$$

Damit kann man eine neue Reduktionstafel statt (4) berechnen.

Ruhende Vergleichungen für Teilungs-Korrektion und Temperatur-Korrektion.

Ein englisches Instrumentchen (*Casella* 1640) von Taschenuhr-Grösse, welches uns auf kurze Zeit übergeben war, wurde während der verfügbaren Zeit (Mai — Juni 1874) neben das Karlsruher Stations-Quecksilber-Barometer gelegt, und unter möglichst verschiedenen Verhältnissen ruhend abgelesen.

Es gelang, in 38 Tagen, eine Druckdifferenz von $16{,}9^{mm}$ und eine Temperaturdifferenz von $12{,}3°$ zu erhalten, was eine zusammenfassende Ausgleichung rätlich scheinen liess.

Die Vergleichungs-Beobachtungen (bereits im Partialmittel zusammengefasst) und einen Teil der Coëfficienten-Berechnung für die Ausgleichung zeigt folgende Tabelle:

Num.	Q_0	F	$Q_0 - F = l$	t	$t - 10 = b$	$760 - Q_0 = c$	b^2	c^2	l^2
	mm	mm	mm						
1.	755,6	748,7	+ 6,9	12,7°	2,7	4,4	7,29	19,36	47,61
2.	756,4	749,4	7,0	13,5	3,5	3,6	12,25	12,96	49,00
3.	750,2	743,0	7,2	14,5	4,5	9,8	20,25	96,04	51,84
4.	742,4	735,3	7,1	16,6	6,6	17,6	43,56	309,76	50,41
5.	753,7	747,2	6,5	17,8	7,8	6,3	60,84	39,69	42,25
6.	751,9	744,9	7,0	18,0	8,0	8,1	64,00	65,61	49,00
7.	745,9	738,9	7,0	18,1	8,1	14,1	65,61	198,81	49,00
8.	756,3	749,9	6,4	19,7	9,7	3,7	94,09	13,69	40,96
9.	754,4	747,3	7,1	21,8	11,8	5,6	139,24	31,36	50,41
10.	759,3	752,9	6,4	22,9	12,9	0,7	166,41	0,49	40,96
11.	753,7	746,9	6,8	25,0	15,0	6,3	225,00	39,69	46,24
Summe . . .	579,8	504,4	75,4	200,6	90,6	80,2	898,54	827,46	517,68
Differenzen .	16,9 mm			12,3°					

Der Ausgleichung soll folgende Form zu Grunde gelegt werden:

$$F - Q_0 = x + y(t - 10°) + z(760 - Q_0) \qquad (15)$$

oder $v = x + by + cz + l$, wo $b = (t - 10°)$, $c = (760 - Q_0)$, $l = Q_0 - F$.

Die Normalgleichungen werden:

$$\begin{aligned} +11{,}0\,x + 90{,}6\,y + 80{,}2\,z + 75{,}4 &= 0 \\ 898{,}5\,y + 618{,}4\,z + 616{,}2 &= 0 \\ +827{,}5\,z + 558{,}2 &= 0 \\ +517{,}7 & \end{aligned}$$

Die Auflösung giebt:

$$x = -6{,}83^{mm} \quad y = +0{,}0228 \quad z = -0{,}0312$$
$$\pm\ 0{,}24 \qquad \pm\ 0{,}0203 \qquad \pm\ 0{,}0160 \qquad m = \sqrt{\frac{0{,}48}{8}} = \pm 0{,}25^{mm}$$

Die Reduktionsformel ist hiernach:

$$F - Q_0 = -6{,}83 + 0{,}0228\,(t - 10°) - 0{,}0312\,(760 - Q_0) \qquad (16)$$

oder nach Q_0 aufgelöst:

$$Q_0 - F_0 = +6{,}62 - 0{,}022\,(t - 10°) + 0{,}030\,(760 - F). \qquad (17)$$

Hiernach lässt sich eine Reduktionstabelle berechnen.

II. Bergbesteigung.

Bei einer Brocken-Besteigung, 25. September 1887, haben wir drei Instrumente mitgeführt, nämlich:

1) Das Quecksilber-Barometer Fig. 2. § 133. S. 474.
2) Ein neues Feder-Barometer *Bohne.*
3) Ein älteres kleines Feder-Barometer *Naudet.*

An 7 Punkten in verschiedenen Höhen wurde das Quecksilber-Barometer aufgehängt, alle drei Instrumente je 3 mal in Zwischenzeiten von etwa 5 Minuten abgelesen, gelegentlich wurde auch die Lufttemperatur durch Schleuderthermometer gemessen.

Zuerst geben wir nur die Quecksilber-Barometer-Angaben und deren Reduktion. Die in folgender Tabelle eingesetzten Q_0' sind reduziert wegen Temperatur und Capillarität. Mit Q_0 und dem Mittelwert $t = 7°$ sind die Höhen H roh genähert aus einer barometrischen Höhentafel eingesetzt; das genügt nämlich völlig, um die Schwere-Korrektionen $-\frac{2QH}{r}$ zu berechnen, durch welche schliesslich die beobachteten Q_0' auf Q_0 reduziert werden, d. h. auf solche Werte Q_0, welche als richtiges Vergleichsmass für die Feder-Barometer dienen können.

Brocken-Besteigung 25. September 1887.

Nr.	Ort und Tageszeit		Q_0'	Luft t	Höhe H genähert	Schwere-Korrektion $-\frac{2QH}{r}$	Q_0
			mm		mm	mm	mm
1.	Harzburg	$8^h\ 50^m$	742,45	9,0°	210	— 0,05	742,40
2.	Canossa-Säule	$11^h\ 16^m$	721,52	9,0	450	— 0,10	721,42
3.	Molkenhaus	$1^h\ 16^m$	717,87	9,0	490	— 0,11	717,76
4.	Scharfenstein	$3^h\ 18^m$	707,15	8,5	610	— 0,14	707,01
5.	Pflasterstoss	$4^h\ 3^m$	687,07	5,5	850	— 0,18	686,89
6.	Kleiner Brocken	$4^h\ 46^m$	673,74	3,0	1010	— 0,22	673,52
7.	Brocken, Haus	$5^h\ 30^m$	663,02	2,0	1140	— 0,24	662,78

In einer zweiten nachfolgenden Tabelle geben wir die Vergleichung der so berechneten Q_0 mit den entsprechenden Feder-Barometern F_0, welch letztere ebenfalls bereits, mit ihren besonderen Temperatur-Korrektionen versehen, eingesetzt werden. Die beigesetzten b u. s. w. beziehen sich auf die Ausgleichung.

Nr.	Q_0	*Bohne* F_0	*Bohne* F_0-Q_0	*Naudet* F_0	*Naudet* F_0-Q_0	$\frac{760-Q_0}{100} = b$	b^2	$b^3 = bc$	$b^4 = c^2$
	mm	mm	mm	mm	mm				
1.	742,40	743,94	+ 1,54	749,03	+ 6,63	0,176	0,031	0,005	0,001
2.	721,42	722,53	+ 1,11	727,00	+ 5,58	0,386	0,149	0,058	0,022
3.	717,76	719,31	+ 1,55	723,92	+ 6,16	0,422	0,178	0,075	0,032
4.	707,01	708,57	+ 1,56	713,07	+ 6,06	0,530	0,281	0,149	0,079
5.	686,89	687,30	+ 0,41	690,18	+ 3,29	0,731	0,534	0,391	0,285
6.	673,52	674,39	+ 0,87	676,40	+ 2,88	0,865	0,748	0,647	0,560
7.	662,78	665,98	+ 3,20	664,89	+ 2,11	0,972	0,945	0,919	0,893
	4911,78	4922,02	+10,24	4944,49	+32,71	0,082	2,866	2,224	1,872

Nun wird man jedenfalls wieder die Differenzen $Q_0 - F_0$ graphisch darstellen, wie in der nachfolgenden Fig. 2. S. 508 zu sehen ist. Jedes der beiden Instrumente *Naudet* und *Bohne* giebt 7 Punkte, deren Verbindung sehr unregelmässige Zickzack-Linien geben. Dabei fällt in die Augen, dass der Verlauf 2. 3. 4. 5. bei *beiden* Instrumenten nahezu *gleich* gestaltet ist, und das lässt schliessen, dass hier Unregelmässigkeiten nicht der beiden Feder-Barometer, sondern des zur Vergleichung benützten *Quecksilber-Barometers* vorliegen. Trotzdem sind diese wenigen Vergleichungen immer noch geeignet, die Teilungsfehler der beiden Instrumente *Naudet* und *Bohne* im grossen und ganzen zu bestimmen.*)

Was man etwa rein graphisch aus diesen Vergleichungen erhalten kann, das zeigt die Figur (S. 508) selbst auf einen Blick, wobei MN die nach der M. d. kl. Q. berechnete Ausgleichung für *Naudet* ist, während AB und $A'B'$ zwei Ausgleichungen nach der M. d. kl. Q. für *Bohne* darstellen.

Die rechnerische Ausgleichung geht, wenn man nur eine lineare Funktion nimmt, genau nach dem Muster der Vergleichung mit ruhenden Instrumenten (s. o. Gleichungen (1)–(4) S. 503—504).

Die Resultate sind:

---

*) Diese sachlich nicht ganz befriedigenden 7 Vergleichungen einer Brocken-Besteigung wurden von vorhandenem Material doch ausgewählt, weil sie ein übersichtliches, in sich abgerundetes Schulbeispiel bieten, und weil sie sehr gut sind, um zu zeigen, dass man bei solchen Barometer-Reisen gewärtig sein muss, nicht bloss immer glatte Resultate, sondern manchmal auch Missstimmigkeiten bis zu 1^{mm} zu erhalten.

Eine ähnlich angeordnete, besser stimmende Vergleichsreihe vom Schwarzwald haben wir in *Neumayer*s „Anleitung zu wissenschaftlichen Beobachtungen auf Reisen“, 2. Auflage, Berlin 1888, S. 86—87, mitgeteilt.

Beispiele von Reisebarometer-Vergleichungen giebt *Koppe* in dem Buche „Die Aneroide von Jakob Goldschmid“, Zürich 1877, S. 32—40, und *Hartl*, „Praktische Anleitung zum Höhenmessen,“ Wien 1884, S. 59—60 und S. 66. Hiebei wird auch die elastische Nachwirkung betrachtet, von welcher bei unserem zunächst nur den formalen Rechnungsgang zeigenden Brocken-Beispiel nicht die Rede ist.

Instrument *Naudet*:

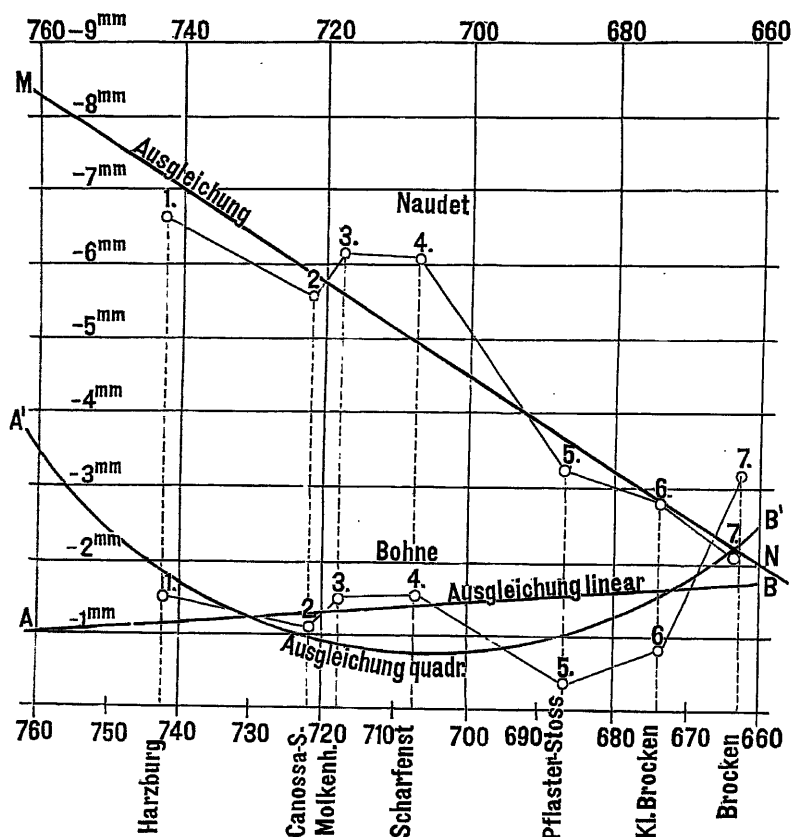
$$Q_0 - F_0 = -8{,}27^{mm} + 0{,}0616\,(760 - Q_0) \quad , \quad m = \pm 0{,}63^{mm} \qquad (18)$$
$$\pm 0{,}58 \quad \pm 0{,}0091$$

Instrument *Bohne*:

$$Q_0 - F_0 = -1{,}02^{mm} - 0{,}00765\,(760 - Q_0) \quad , \quad m = \pm 0{,}93^{mm} \qquad (19)$$
$$\pm 0{,}86 \quad \pm 0{,}0134$$

Während *Naudet* befriedigend ist, sind bei *Bohne* die mittleren Fehler zu gross; und der Anblick der Figur macht es ganz begreiflich, dass eine *Gerade* sich unmöglich den 7 zerstreuten Punkten anschliessen kann.

Fig. 2.

Brocken-Besteigung. Feder-Barometer *Naudet* und *Bohne*.

Wir machen desshalb für *Bohne* einen Versuch mit einer Funktion zweiten Grades:

$$Q_0 - F_0 = x + z'\,\frac{760 - Q_0}{100} + z''\left(\frac{760 - Q_0}{100}\right)^2$$

Normalgleichungen:

$$\begin{aligned} &\underline{+7{,}000\,x} + 4{,}082\,z' + 2{,}866\,z'' + 10{,}240 = 0 \\ &\qquad\underline{+2{,}866\,z'} + 2{,}244\,z'' + \ \ 6{,}343 = 0 \\ &\qquad\qquad\underline{+1{,}872\,z''} + \ \ 4{,}830 = 0 \\ &\qquad\qquad\qquad\underline{+19{,}650.} \end{aligned}$$

$$Q_0 - F_0 = -3{,}42 + 9{,}43\,\frac{760 - Q_0}{100} - 8{,}65\left(\frac{760 - Q_0}{100}\right)^2 \qquad (20)$$

$F_0 - Q_0$	*beobachtet*	v	v^2
+ 2,03	+ 1,54	+ 0,49	0,24
+ 1,07	+ 1,11	— 0,04	0,00
+ 0,98	+ 1,55	— 0,57	0,32
+ 0,85	+ 1,56	— 0,71	0,50
+ 1,15	+ 0,41	+ 0,74	0,55
+ 1,73	+ 0,87	+ 0,86	0,74
+ 2,42	+ 3,20	— 0,78	0,61
			2,96.

$$m = \sqrt{\frac{2{,}96}{7-3}} = \pm 0{,}86^{mm} \qquad (21)$$

Der mittlere Fehler ist etwas kleiner geworden und, so lange keine weiteren Vergleichungen zur Verfügung kommen, kann man die Formel (20) wohl anwenden, und hiezu folgende Tabelle berechnen:

$Q_0 =$	$Q_0 - F_0 =$	$Q_0 =$	$Q_0 - F_0 =$
760mm	— 3,42mm	710mm	— 0,86mm
750	— 2,57	700	— 0,87
740	— 1,88	690	— 1,06
730	— 1,37	680	— 1,42
720	— 1,03	670	— 1,94
710	— 0,86	660	— 2,64

(22)

Hier ist der richtige (Quecksilber-) Stand als Argument genommen, man könnte die Gleichung (20) auch so umformen, dass F_0 als Argument erschiene, nämlich:

$$Q_0 - F_0 = -3{,}10^{mm} + 844\,\frac{760 - F_0}{100} - 8{,}65\left(\frac{760 - F_0}{100}\right)^2 \qquad (23)$$

Indessen praktisch genommen werden beide Formeln (20) und (23) nahezu dasselbe geben, und die Tabelle (22), welche zu (20) gehört, ist deswegen von allgemeinerer Bedeutung, weil sie unabhängig von der jeweiligen (zufälliger und absichtlicher Änderung unterworfener) *Stand-Korrektion* ist.

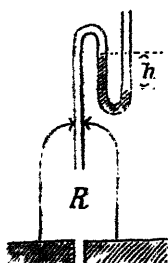
III. Luftpumpen-Versuche.

Ruhende Vergleichungen und Bergbesteigungen eignen sich nicht zu ausgiebiger Anwendung zur Feder-Barometer-Vergleichung.

Hiezu dienen die künstlichen Luftdrucks-Regulierungen, deren sich namentlich auch die Verfertiger von Feder-Barometern bedienen.

Die Anwendung der Luftpumpe ist in Fig. 3. S. 510 angedeutet.

Unter den Recipienten *R* wird das zu untersuchende Feder-Barometer gebracht, und die durch Pumpen erzeugte Luftdrucks-Verminderung wird durch eine Glasröhre

Fig. 3.

mit der Quecksilber-Differenz h kathetometrisch gemessen. Wenn der aussen an einem gewöhnlichen Quecksilber-Barometer abgelesene Barometerstand Q' um diese Quecksilber-Höhe h vermindert wird, so hat man den inneren Druck $Q' - h = Q$. Durch symmetrische Aufeinanderfolge der Ablesungen, nämlich: 1) Barometer, 2) Kathetometer h, 3) Feder-Barometer im Recipienten, 4) Kathetometer h, 5) Barometer, können kleine Änderungen während einer einzelnen Vergleichung thunlichst eliminiert werden.

Folgende Tabelle zeigt einen solchen von uns angestellten Versuch:

Nr.	Feder-Barometer		Quecksilber-Säulen			$F - Q_0$	$Q_0 - 670$
	F	t	h	Q_0'	$Q_0' - h = Q_0$		
1.	678,93^{mm}	16,7°	68,58^{mm}	740,87^{mm}	672,29^{mm}	+ 6,64^{mm}	2,3^{mm}
2.	685,02	16,5	61,09	740,89	679,80	+ 5,22	9,8
3.	691,45	16,3	54,09	740,88	686,79	+ 4,66	16,8
4.	698,90	16,2	45,62	740,87	695,25	+ 3,65	25,2
5.	705,66	16,2	38,40	740,85	702,45	+ 3,21	32,4
6.	712,43	16,1	31,25	740,83	709,58	+ 2,85	39,6
7.	718,75	15,9	24,59	740,75	716,16	+ 2,59	46,2
8.	725,97	15,7	16,47	740,78	724,31	+ 1,66	54,3
9.	733,19	15,6	8,87	740,68	731,81	+ 1,38	61,8
10.	740,18	15,5	0,59	740,66	740,07	+ 0,12	70,1

Da die Temperaturen t des Feder-Barometers nur zwischen 16,7° und 15,5° schwanken, wurde die Temperatur t als konstant angenommen, und durch Ausgleichung folgende Formel gebildet:

$$F - Q_0 = 6,433 - 0,1046\,(Q_0 - 670) + 0,0003\,(Q_0 - 670)^2 \qquad (24)$$

Der mittlere Fehler einer Vergleichung wurde $= \pm\, 0,32^{mm}$ gefunden.

Die Luftpumpenversuche haben den Nachteil der elastischen Nachwirkung. *Jelinek* teilt in „*Carls* Rept." 13. Band S. 54 folgende Resultate von *Balfour Stewart*, Vorstand des Observatoriums zu Kew, mit:

	Stand des Instruments				
	Nr. 8	Nr. 9	Nr. 10	Nr. 14	Nr. 16
vor dem Versuch	— 2,5^{mm}	— 3,1^{mm}	— 3,1^{mm}	— 1,0^{mm}	— 1,3^{mm}
nach dem Versuch	0,0	+ 0,8	+ 1,5	+ 1,5	+ 1,0
18 Stunden nachher	— 1,8	— 0,8	. .	+ 0,3	+ 0,3
48 „ „	— 2,0	— 1,0	— 0,8	. .	. .
4 Tage „	— 2,0	— 1,3	. .	— 0,3	— 0,3
21 „ „	— 3,3	— 2,5	— 2,8	— 1,8	— 1,5

Wie man sieht, hat sich hier nach 3 Wochen wieder nahezu der alte Stand hergestellt.

Statt der gewöhnlichen Luftpumpe empfiehlt *Schreiber* („Handbuch der barometr. Höhenmess." S. 169—176) andere Apparate zur Erzeugung von Druckdifferenzen, wovon ein Topf, aus welchem die Luft durch ein Saugrohr mit dem Munde durch Lungenkraft ausgesaugt wird, seiner Einfachheit wegen Beachtung verdient. *Schreiber* berichtet, dass er 280^{mm} Quecksilbersäule durch Saugen leicht bewältigt, aber nur 50^{mm} durch Blasen. Die Druckdifferenz in- und ausserhalb des Gefässes muss kathetometrisch in ähnlicher Weise, wie bei Fig. 1. angedeutet ist, gemessen werden.

In nachfolgender Fig. 4. ist eine solche Vorrichtung dargestellt, welche Ingenieur *Kröber* in Stuttgart für sich hergestellt, und in der „Zeitschr. f. Verm. 1881", S. 313 beschrieben hat.

Fig. 4.

Ein gewöhnlicher Luftpumpenteller *A* aus Messing von 22^{cm} Durchmesser, mit aufgekitteter geschliffener Glasscheibe, ruht auf einem Dreifuss *B*. Die starke Glasglocke *C* mit gut geschliffenem Rande kann mittelst Fett luftdicht auf den Teller gesetzt werden. In der oberen Wölbung der Glocke *C* befindet sich eine Stopfbüchse *E* zum Durchlassen einer Stange *D*, welche zum Drehen und Einstellen eines in der Glocke befindlichen *Goldschmid*-Aneroides dient, welche aber auch zum einfachen Klopfen eines etwa hinein gelegten gewöhnlichen Zeiger-Instrumentes eingerichtet werden kann.

Von der Glasglocke *C* geht nach unten eine Luftverbindung durch Gummischläuche nach *zwei* Seiten, erstens nach dem Behälter *O* zur *Änderung* des Luftdrucks, und zweitens nach dem Barometer *K* zur *Messung* des Luftdrucks.

Betrachten wir zuerst den Behälter O, so führt zu demselben ein Schlauch S, mittelst dessen die Luft durch den Mund ausgesaugt werden kann, wobei ein Hahn d zum Öffnen und Absperren dient. Ein Quecksilber-Manometer R zeigt sofort die Saugwirkung, ohne jedoch zum genaueren Messen der Druckverminderung zu dienen.

Zwischen dem Behälter O, in welchem die Luftverdünnung durch Saugen erzeugt wird, und der Glasglocke C ist eine Schlauchverbindung Q und J, jedoch mit Zwischenschaltung eines Regulators P, der dazu dient, die Druckverminderung in O stetig und langsam (z. B. 5^{mm} in 1 Minute) nach C zu übertragen.

Die Messung des Druckes in C geschieht durch das Barometer K, dessen Gefäss durch Schläuche JJ in luftdichter Verbindung mit dem Inneren von C steht. Das Barometer K hat dieselbe Konstruktion wie unsere frühere Figur S. 473 zeigt; wobei für den besonderen Zweck der Verbindung mit C natürlich das Gefäss in *allen* Beziehungen luftdicht sein muss.

Soweit wirkt das Ganze nur zur Luft*verdünnung*, Luftverdichtung ist schwieriger, sie verlangt Anpressen der Glocke C an den Teller A und Einblasen von Luft durch den Schlauch S, wozu der Gummiball T dient.

Zahlreiche mit dieser Vorrichtung angestellte Versuche hat Ingenieur *Kröber* in der „Zeitschr. f. Verm. 1881“, S. 320—339 veröffentlicht.

Ausser den bereits beschriebenen oder zitierten Einrichtungen zur künstlichen Luftdrucksänderung für Feder-Barometer-Vergleichungen sind noch folgende Verweisungen zu machen: *Vogler*, „Zeitschr. f. Verm. 1877“, S. 51 und S. 476. *Koppe*, Untersuchungsstation für Aneroid-Barometer an der technischen Hochschule zu Braunschweig. „Zeitschr. d. hannov. Ing.- u. Arch.-Ver. 1884“, S. 135, ferner „Deutsche Bauzeitung 1886“, S. 231 u. 242. *Schreiber*, Apparate zur Prüfung von Feder-Barometern sowie von Thermometern, „Zeitschr. f. Instrumentenkunde 1886“, S. 121.

§ 142. Änderung der Stand-Korrektion.

Alle Feder-Barometer leiden an dem Übelstande, dass sie den Stand im allgemeinen nicht auf die Dauer bewahren. Namentlich die unvermeidlichen Erschütterungen, beim Feldgebrauch und auf Reisen, bringen Standänderungen hervor, welche dadurch gefunden werden, dass man die Instrumente mit einem Quecksilberbarometer vergleicht.

Es kann vorkommen, dass ein Instrument, wenn man es nur einen Tag lang über Berge und Thäler zum barometrischen Gebrauch herumträgt, seinen Stand bis zu 1^{mm} ändert; und es bleibt dann meist nichts übrig, als die Änderung auf die Zwischenzeit zu verteilen; doch wird die Änderung in einem Tag im *Mittel* nur wenige Zehntel Millimeter betragen, und in längeren Zeiträumen werden die Änderungen sich nicht fortgesetzt häufen, sondern auch wieder sich aufheben.

Als Beispiel geben wir in der folgenden Tabelle die verschiedenen Standkorrektionen, welche die Feder-Barometer der libyschen Expedition nach und nach, bei der Vergleichung mit dem Quecksilber-Barometer, zeigten, nachdem alle anderen Korrektionen in Rechnung gebracht worden sind:

Standkorrektionen von 4 Federbarometern auf der libyschen Expedition 1873—1874.

Ort und Zeit der Vergleichung.	*Naudet* 39305.	*Goldschmid* 600.	*Casella* 1640.	*Casella* 1641.
Kairo 1873, 5. Dezbr.	+ 2,8mm	+ 14,0mm	+ 5,8mm	+ 1,3mm
Siut „ 12. „	+ 2,5	+ 13,3	. .	. .
Marak „ 20. „	+ 2,8	+ 13,1	. .	. .
Farafrah 1874, 1. Jan.	+ 4,5	+ 13,8	+ 5,0	+ 0,7
Dachel „ 10. „	+ 5,0	+ 13,2	+ 7,2	+ 1,6
Dachel „ 16. März	+ 1,4	+ 11,0	+ 9,2	+ 0,9
Chargeh „ 25. „	— 0,3	+ 9,4	+ 9,6	+ 1,0
Esneh „ 1. April	+ 0,8	+ 8,1	+ 9,4	+ 0,4
Kairo „ 16. „	+ 0,6	. .	+ 8,7	. .
Grösste Änderung . . .	— 5,3mm	— 5,9mm	+ 4,6mm	— 1,2mm

Casella 1641., welches sich hiernach am besten bewährt hat, ist ein kleines Instrument von der Grösse einer Taschenuhr, es wurde beständig vom Professor *Zittel* in der Beinkleidertasche getragen. Es scheint dieses darauf hinzudeuten, dass solcher Transport *kleiner* Instrumente sehr vor Veränderungen schützt. Grosse und schwere Instrumente mussten bei dem Transport zu Kameel (welches hier stattfand) notwendig stark erschüttert werden.

Weitere Erfahrungs-Ergebnisse giebt *Koppe*, „Die Aneroide von *Goldschmid*, Zürich 1877“, S. 41: „Die Gesamtänderung des Instrumentes Nr. 803. betrug im ersten Jahre 2—3mm, in jedem der beiden folgenden Jahre noch nicht 1mm“.

Erfahrungen über Stand-Änderungen giebt auch *Hartl* „Praktische Anleitung zum Höhenmessen“, Wien 1884, S. 57—62, z. B. in 3 Tagen: + 2,9mm , + 3,5mm, 3,7mm , + 3,4mm.

Welche Art von Instrumenten die grösste Widerstandskraft gegen Erschütterungen u. s. w. haben, ist allgemein nicht zu sagen; man kann vermuten, dass *mikroskopische* Instrumente, welche der federnden Büchse keine mechanische Arbeit zumuten, die besten sind; indessen kommt hier alles auf die Erfahrung an.

Solange die Feder-Barometer noch so starke Stand-Änderungen zeigen, wie im Vorstehenden angedeutet ist, und so lange keine Sicherheit besteht, dass ein Instrument nicht plötzlich viel stärkere Änderungen erleidet, als man im Mittel annimmt, muss man auf Reisen immer noch ein Quecksilber-Barometer (oder vielleicht auch ein Koch-Thermometer, § 150.) mitführen.

§ 143. Bestimmung der Lufttemperatur.

Indem wir zunächst ein richtiges (geprüftes) Quecksilber-Thermometer als vorhanden voraussetzen, beschreiben wir dessen Anwendung zur Bestimmung der Lufttemperatur, wie man sie zur barometrischen Höhenmessung braucht.

Das gewöhnlichste Mittel zur Messung der Lufttemperatur besteht darin, dass man das Thermometer ruhig im Schatten aufhängt und dann abliest.

Im Felde hat man aber hiezu meist weder einen geeigneten Ort noch die verfügbare Zeit. Hier wird daher das *Schleuder-Thermometer* benützt, welches in einem

an einer Schnur befestigten Glas-Thermometer besteht, das man rasch umschwingt (100—200 mal). Das Thermometer kommt dadurch mit vielen Luftteilen in Berührung, und nimmt deren Temperatur an.

In neuerer Zeit wird auf dem meteorologischen Institut in Berlin ein neues Mittel zur Lufttemperatur-Bestimmung angewendet, welches darin besteht, dass ein starker *künstlicher* Luftstrom dem Thermometer zugeführt wird. Letzteres wird zu diesem Zweck in ein System von Röhren eingeschlossen, welche infolge Ansaugens mittels eines einfachen Saugebalges die Luft mit einer Geschwindigkeit von $1{,}2^m$ in der Sekunde durchstreift. Ein Anstauen und eine abweichende Erwärmung der Luftteilchen in den Röhren wird hierdurch unmöglich. Das Ergebnis war ein durchaus befriedigendes, da bei den Versuchen im Schatten und in der Sonne genau dieselben Messungswerte sich ergaben.

So lange man solche Mittel nicht hat, ist im Felde immer noch das beste das vorher beschriebene Schleuder-Thermometer.

Das Quecksilber-Thermometer.

Es sind drei verschiedene Thermometer-Teilungen im Gebrauche, nach *Celsius*, *Réaumur* und *Fahrenheit*; ihre gegenseitigen Beziehungen zeigen die Tabellen von Seite [13] des Anhangs.

Die gewöhnlichen dem Handel entnommenen Thermometer pflegen etwa innerhalb $0{,}5° — 1°$ richtig zu sein, und die Nullpunkte kann man jederzeit selbst untersuchen durch Eintauchen der Thermometer in schmelzendes Eis; die genauere Untersuchung dagegen, für die von 0° entfernten Striche der Teilung, ist eine schwierige Sache, welche der Einzelne gewöhnlich nicht selbst ausführen kann. Man verschafft sich daher zur Vergleichung der rohen Gebrauchs-Thermometer ein oder zwei feine *Normal-Thermometer* (*R. Fuess*, vorm. *Greiner & Geissler*, Berlin SW., Alte Jakob-Strasse 108) mit Beglaubigung der K. Normal-Aichungs-Kommission oder der II. Abteilung der physikalisch-technischen Reichs-Anstalt. Mit einem solchen Normal-Thermometer werden die Gebrauchs-Thermometer in Wasser verglichen, und die Fehler der letzteren in Rechnung gebracht.

Die Fixpunkte des Thermometers, Änderungen der Thermometerangaben. *)

In dem Werke „Travaux et mémoires du bureau international des poids et mesures“ I. 1881. Seite A. 43 finden wir folgendes: Der Nullpunkt der Thermometer ist bestimmt durch die Temperatur des schmelzenden Eises unter dem Atmosphärendruck von 760^{mm}. Der Punkt 100° *C* der Thermometer entspricht der Siede-Temperatur des reinen Wassers unter dem Drucke einer Quecksilbersäule von 760^{mm} Höhe bei 0° Temperatur, unter 45° Breite, in der Meeresfläche.

Die so bestimmten Thermometergrade heissen *Normal-Grade*, zur Unterscheidung von den Graden nach *Regnault*, für welche der Punkt 100° ein *anderer* ist, nämlich die Siedetemperatur des Wassers unter dem Druck 760^{mm} in *Paris*, mit Breite $= 48° 50' 14''$ und Höhe 60^m über dem Meere. Infolge der Schwere-Reduktion (§ 136.) entspricht dem absoluten Barometerstande 760^{mm} (d. h. unter 45° Breite und Nullhöhe) in dem *Regnault*schen Laboratorium eine Quecksilberhöhe von $759{,}7462^{mm}$. Dem Punkte 100° von *Regnault* entspricht 100,0093176 Normal-Grade. Bezeichnet man mit t die

*) Diese zur barometrischen Höhenmessung nicht unmittelbar nötigen Mitteilungen fügen wir hier bei, teils wegen ihrer allgemeinen Bedeutung, teils wegen der späteren Verwendung zum Verständnis des Koch-Thermometers (§ 150.).

Temperatur in *Regnault*-Graden und mit τ dieselbe Temperatur in Normal-Graden, so ist $\tau = 1{,}000093176\ t$.

Für die Siede-Temperaturen als Funktion des Barometerstandes werden zwei ausführliche Tafeln gegeben, Seite A. 33—39 und Seite A. 46—48, von welchen wir einen Auszug in unserem Anhange Seite [20] und [21] gebildet haben. Wenn τ die Siedetemperatur, und B der zugehörige Barometerstand ist, so kann man B nach der Formel berechnen:

$$B = 760 - 27{,}2502\,(100 - \tau) + 0{,}4140\,(100 - \tau)^2 - 0{,}0035\,(100 - \tau)^3.$$

Nach diesem geben wir noch die wichtigsten Erfahrungen über die *Änderungen* der Thermometerangaben, nach den Metronomischen Beiträgen der K. Normal-Aichungs-Kommission. (Nr. 3. 1881, *Thiessen*, „Vergleichungen von Quecksilber-Thermometern", und *Wiebe*, „Bewegungen der Fundamentalpunkte von Thermometern". Die ersten Untersuchungen dieser Art sind von *Pernet* und *Marek*.)

Als eigentliches Normal-Thermometer dient das Luft-Thermometer. Die verschiedenen Quecksilber-Thermometer werden im allgemeinen andere Ablesungen geben als das Luft-Thermometer, weil die Ausdehnungen der Gläser und des Quecksilbers weder gleich, noch genau proportional den Temperaturen sind, und zwar beträgt die Differenz etwa bis zu 0,2°, und ist der Rechnung kaum zugänglich.

Es ist schon ziemlich lange bekannt, dass der Eispunkt eines Thermometers nicht unveränderlich ist, sondern namentlich bald nach der Anfertigung um etwa 1/2 Grad ansteigt, und man fand auch bald, dass der Fundamentalabstand zwischen 0° und 100° weniger sich ändert, wenn die Siedepunktsbestimmung *zuerst* gemacht wird.

Unmittelbar nach der Anfertigung des Instruments ist der Nullpunkt sehr veränderlich, indem er ziemlich rasch etwa bis 0,5° ansteigt, was allmählich sich verzögernd, mehrere Jahre lang dauert. Man hat den Grund hievon darin gefunden, dass das Glas bei der starken Erwärmung der Anfertigung sich stark ausdehnt, und nur *allmählich* sich wieder zusammenzieht, oder umgekehrt, man kann sagen, die Anfertigungserhitzung hat eine *Depression* des Nullpunkts erzeugt, welche nur allmählich wieder verschwindet.

Wenn man ein solches altes Thermometer längere Zeit im Eise hält, so stellt sich ein ziemlich konstant bleibender *Eispunkt nach langer Ruhe im Eise* ein, welcher aber wieder heruntergedrückt wird, wenn das Thermometer beim Gebrauch in höhere Temperaturen kommt. Insbesondere entsteht eine starke Depression, wenn das Instrument zur Neubestimmung des Siedepunktes auf 100° erwärmt wird. Man hat daher *zwei* Nullpunkte zu unterscheiden:

1) Eispunkt nach langer Ruhe im Eis,
2) Maximaldeprimierter Nullpunkt, d. h. Eispunkt unmittelbar nach dem Sieden.

Von diesen zwei Punkten hat der letztere die grösste Konstanz, und der vorher bestimmte Siedepunkt giebt mit ihm den Fundamental-*Abstand*, welcher sich ebenfalls als nahe konstant erweist. Es empfiehlt sich, zu jeder wichtigen Messung den Eispunkt jedesmal besonders zu bestimmen. (Zu Weiterem vgl. „Zeitschr. f. Meteorologie 1879", S. 134 und S. 206.)

§ 144. Bestimmung der Luftfeuchtigkeit.

Zur Bestimmung der Luftfeuchtigkeit eignet sich für barometrische Höhenmessung am besten die von *August* zuerst angegebene Vergleichung des trockenen und des befeuchteten Thermometers. Die Befeuchtung eines Thermometers geschieht dadurch, dass man die Thermometerkugel mit lockerem Baumwollstoff umhüllt, und dann Wasser darüber giesst. Nach etwa 5 Minuten wird das Wasser teilweise verdunstet sein, und die Verdunstungskälte erzeugt ein Sinken des Thermometerstandes. Je trockener die Luft ist, desto rascher und heftiger erfolgt die Verdunstung, und um so mehr muss der Stand des feuchten Thermometers gegen den Stand des trockenen Thermometers zurückgehen, während bei vollständig feuchter Luft kein Wasser mehr

verdunsten kann, und somit, trotz der Befeuchtung, beide Thermometer gleich hoch stehen. Es dient also die Differenz beider Thermometerstände als Feuchtigkeits- bzw. Trockenheits-Mass.

Zur Berechnung der Luftfeuchtigkeit braucht man zuerst die Spannung des gesättigten Wasserdampfes, wofür wir auf S. [20] des Anhangs eine Tafel als Auszug aus der nach *Regnault* neu berechneten Tafel des internationalen Mass- und Gewichts-Amtes zusammengestellt haben (vgl. S. 515).

Wenn E die Spannung des gesättigten Wasserdampfes bedeutet für die Temperatur t, welche das feuchte Thermometer zeigt, während das trockene Thermometer T und das Barometer B zeigt, so erhält man die Spannung e des in der Luft befindlichen Wasserdampfes für positives t durch die Formel:

$$e = E - \frac{0{,}48\,(T-t)\,B}{610-t} \tag{1}$$

Beispiel: Trockenes Thermometer $T = 16{,}4^\circ$ $\quad T - t = 3{,}2^\circ$
Feuchtes „ $t = 13{,}2^\circ$
Barometer (auf 0° red.) $B = 735^{mm}$

Die Dunstdrucktafel Seite [20] des Anhangs giebt für $t = 13{,}2^\circ$ den Wert $E = 11{,}3$, folglich:

$$e = 11{,}3 - \frac{0{,}48 \times 3{,}2 \times 735}{596{,}8} = 11{,}3 - 1{,}9 = 9{,}4^{mm}$$

Für irgend welchen mittleren Barometerstand und mittleren Wert t kann man aus (1) eine Näherungsformel bilden, z. B. für $B = 740$, $t = 10$ erhält man:

$$e = E - 0{,}6\,(T - t) \tag{2}$$

Dieses giebt für obiges Beispiel $e = 9{,}4$, wie die strenge Formel.

Für häufigen Gebrauch bestehen ausführliche Tafeln, insbesondere „Psychrometertafeln für das 100-teilige Thermometer, nach Dr. *H. Wild*s Tafeln, bearbeitet von Dr. *C. Jelinek*. Dritte erweiterte und mit einer ausführlichen Einleitung versehenen Auflage, Leipzig 1887, von Dr. *J. Hann*".

Aus dieser *Jelinek-Hann*schen Psychrometertafel haben wir einen kurzen Auszug gebildet, der auf S. [22] unseres Anhangs gegeben ist.

Die Anwendung dieser abgekürzten Tafel zeigt ein Beispiel:

Trockenes Thermometer $T = 16{,}4$
Feuchtes „ $t = 13{,}2$

Um nicht zweifach interpolieren zu müssen, schreiben wir statt dessen:

$T = 16{,}2$ oder $T = 16{,}0$
$t = 13{,}0$ „ $t = 12{,}8$

es kommt nämlich hauptsächlich auf die *Differenz* beider Stände an, und man darf deshalb beide Stände so verändern, dass mit Erhaltung dieser Differenz der eine Stand auf 0,0° ausgeht. Damit ist die Benützung der Tafel auf *eine* einfache Interpolation zurückgeführt; man findet so $e = 9{,}3$ oder $9{,}1$, was für barometrische Höhenmessung meist genügt.

Aus dem Dunstdruck e kann man auch das Dunstgewicht berechnen; da ein Kubikmeter Luft von 0° und 760^{mm} Druck 1293 Gramm wiegt, und der Wasser-

dampf die Dichte 0,623 bezogen auf Luft hat, so ist das Gewicht des in 1^cbm^ feuchter Luft enthaltenen Wasserdampfes in Grammen:

$$D = 0{,}623 \times 1293 \, \frac{e}{760} \, \frac{1}{1 + 0{,}003665\, T}$$

$$D = 1{,}06 \, \frac{e}{1 + 0{,}003665\, T}$$

Weil somit der Dunstdruck e ein Mass für das Dunstgewicht abgiebt, nennt man den Dunstdruck e selbst die *absolute Feuchtigkeit.*

Die relative Feuchtigkeit ist das Verhältnis der Spannung e des in der Luft wirklich vorhandenen Wasserdampfes zu der Spannung, welche der Wasserdampf hätte, wenn die Luft für die eben stattfindende Temperatur damit gesättigt wäre. Man erhält also die relative Feuchtigkeit, wenn man den oben ermittelten Dunstdruck e (absolute Feuchtigkeit) durch die der Tafel zu entnehmende Maximalspannung des Wasserdampfes für die Temperatur des *trockenen* Thermometers dividiert.

Für das obige Beispiel giebt die Tafel Seite [20] des Anhangs mit $T = 16{,}4^\circ$ den Spannungswert $E = 13{,}9^{mm}$, also relative Feuchtigkeit $= \frac{9{,}4}{13{,}9} = 0{,}68$ oder 68%.

Da man oft in die Lage kommt, barometrische Höhen ohne besondere Beobachtungen über Luftfeuchtigkeit berechnen zu müssen, ist es von Wichtigkeit, die Mittelwerte des Dunstdrucks für verschiedene Zeiten und Orte zu kennen. Solche Mittelwerte zeigt folgende Tabelle:

Monatsmittel und Jahresmittel des Dunstdrucks.

Monat	West-Europa	Preussen	Württemberg	Baden	Mittel
Januar	4,6^mm^	3,9^mm^	4,2^mm^	4,3^mm^	4,1^mm^
Februar	4,7	3,8	4,6	4,0	4,1
März	5,2	4,2	5,2	5,0	4,8
April	6,4	5,6	6,3	6,3	6,1
Mai	8,3	7,8	7,8	7,7	7,8
Juni	10,2	9,6	10,1	10,2	10,0
Juli	11,1	10,9	11,3	12,2	11,5
August	11,1	10,9	11,1	13,0	11,7
September	9,8	9,2	9,0	9,6	9,3
Oktober	7,7	7,7	7,2	7,2	7,4
November	6,1	5,0	5,3	5,1	5,1
Dezember	5,1	4,6	4,5	3,9	4,3
Jahresmittel	7,5^mm^	6,9^mm^	7,2^mm^	7,4^mm^	7,2^mm^

(3)

Die Zahlen für „West-Europa" sind Mittel aus den Resultaten von 30 Stationen, die Zahlen für „Preussen" Mittel von 46 Stationen, nach *Schmid*s Lehrbuch der Meteorologie S. 622—625. Die Zahlen für „Baden" sind Monatsmittel für 1871—1875 von 12 Stationen, nach dem badischen meteorologischen Jahresbericht für 1875, S. 108; die Zahlen für „Württemberg" sind die Mittel für 16 württemb. Stationen von 1867, 1872 und 1873 nach den betreffenden meteorologischen Jahresberichten von *Schoder.*

Die Mittelwerte in der letzten Spalte dieser Tabelle (3) haben nur die Bedeutung einer rohen Durchschnitts-Berechnung für Deutschland; diesen Mittelwerten entspricht auch die kleine Hilfstafel unten auf Seite [23] des Anhangs.

Die regelmässige *tägliche* Änderung des Dunstdrucks beträgt höchstens 0,5^mm^.

Bei Vergleichung der monatlichen Dunstdrucks-Mittel mit den entsprechenden Lufttemperatur-Mitteln findet man eine deutliche Beziehung zwischen beiden. Der badische meteorologische Jahresbericht für 1875 giebt ausser den in vorstehender Tabelle (S. 517) mitgeteilten 5jährigen Dunstdrucks-Mitteln auch die Lufttemperatur-Mittel für dieselbe Zeit 1871—1875 und für dieselben 12 Stationen.

Die 12 Stationen liegen zwischen 112^m und 1012^m Meereshöhe und zwischen 47° 42′ und 49° 46′ Breite; die 5jährigen Mittel von 1871—1875 sind:

Monat	*Luft-temperatur*	*Dunstdruck*	*Monat*	*Luft-temperatur*	*Dunstdruck*
Januar	0,3°	$4,3^{mm}$	Juli	18,7°	$12,2^{mm}$
Februar	1,2	4,0	August	17,2	13,0
März	4,4	5,0	September	14,3	9,6
April	7,8	6,3	Oktober	8,3	7,2
Mai	11,0	7,7	November	3,6	5,1
Juni	15,7	10,2	Dezember	— 1,2	3,9

Daraus wurde die empirische Formel gebildet:

$$e = 3,6 + 0,45\, t \tag{4}$$

wobei e der Dunstdruck in Millimetern und t die entsprechende Lufttemperatur in C° ist. Der mittlere Fehler eines Wertes e ergab sich $= \pm 0,8^{mm}$.

Die Änderung der Luftfeuchtigkeit nach der Höhe ist von Wichtigkeit, wenn nur an *einem* barometrischen Beobachtungspunkt eine Dunstdrucks-Bestimmung gemacht ist, oder wenn nur Beobachtungen eines fremden benachbarten Ortes vorhanden sind. *Hann* findet, dass die Änderung des Dunstdrucks mit der Höhe sehr regelmässig stattfindet, und giebt hiefür folgende empirische Formel:

$$p = p_0 \left(1 - 0,246 \frac{h}{1000} + 0,01569 \left(\frac{h}{1000}\right)^3\right)$$

wobei p und p_0 die Werte des Dunstdrucks oben und unten (in beliebigem Mass) und h der Höhen-Unterschied in Metern ist; die Formel gilt bis zu Höhen von 7800^m („Zeitschr. d. österr. Ges. für Met. IX. Band 1874" S. 197).

Auch die oben schon genannten *Jelinek-Hann*schen Psychrometer-Tafeln geben in ihrem letzten Teile S. 92—102 Regeln und Tafeln zur Berücksichtigung der Luftfeuchtigkeit bei der Luftdrucks-Bestimmung in verschiedenen Höhen, weshalb auch in dieser Hinsicht auf jene wertvollen Tafeln zu verweisen ist.

§ 145. Vollständige barometrische Höhenformel.

Nachdem wir schon in § 132. S. 470—472 die Grundzüge der Theorie der barometrischen Höhenmessung dargelegt haben, ist es nun unsere Aufgabe, diese Theorie weiter zu entwickeln, und die vollständige barometrische Höhenformel abzuleiten.

Zu diesem Zwecke knüpfen wir an der früheren Differentialformel (10) § 132. S. 471 wieder an, nämlich:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\Delta_0}{p_0}\, g\, \frac{1}{1 + \varepsilon t}\, dH \tag{1}$$

Die Lufttemperatur t ist mit der Höhe H jedenfalls veränderlich; da aber das Gesetz der Wärmeabnahme mit der Höhe im allgemeinen nicht bekannt ist, und da es für viele praktische Zwecke ausreichend ist, die Lufttemperatur als arithmetisches Mittel der unten und oben gemachten Bestimmungen anzunehmen, so wollen wir alles, was sich etwa weiter theoretisch rechnen lässt, hier zuerst bei Seite lassen (vgl. den späteren § 152.) und bei der Integration der Differentialgleichung (1) die Grösse t als *konstant* behandeln.

Dagegen ist die Schwerenbeschleunigung g, welche in (1) vorkommt, mit der Höhe H veränderlich, und zwar nach (2) § 136. S. 483, entsprechend der Gleichung:

$$g = g_0\left(1 - \frac{2\,H}{r}\right) \tag{2}$$

wo g_0 die Schwerenbeschleunigung in der Höhe $H = 0$ ist. Setzt man dieses (2) in (1), so bekommt man:

$$\frac{d\,p}{p} = -\frac{\Delta_0}{p_0}\,\frac{g_0}{1+\varepsilon\,t}\left(1 - \frac{2\,H}{r}\right) d\,H \tag{3}$$

Die allgemeine Integration giebt:

$$\int\frac{d\,p}{p} = l\,p = \frac{log\,p}{M} \quad , \quad \int\left(1 - \frac{2\,H}{r}\right) d\,H = H - \frac{H^2}{r} \tag{4}$$

wo l den natürlichen Logarithmus, log den *Briggs*chen Logarithmus und $M = 0{,}434294$ dessen Modul bedeutet.

Es ist also das allgemeine Integral von (3):

$$\frac{log\,p}{M} = -\frac{\Delta_0}{p_0}\,\frac{g_0}{1+\varepsilon\,t}\left(H - \frac{H^2}{r}\right) + Konst. \tag{5}$$

Zur Konstantenbestimmung setzen wir fest, es sollen p und P einerseits, H und H' andererseits zusammengehörige Werte sein, d. h. neben (5) besteht die zweite Gleichung:

$$\frac{log\,P}{M} = -\frac{\Delta_0}{p_0}\,\frac{g_0}{1+\varepsilon\,t}\left(H' - \frac{H'^2}{r}\right) + Konst. \tag{6}$$

Die Subtraktion von (5) und (6) giebt:

$$\frac{log\,P - log\,p}{M} = +\frac{\Delta_0}{p_0}\,\frac{g_0}{1+\varepsilon\,t}\left(H - H' - \frac{H^2 - H'^2}{r}\right)$$

hiebei ist: $\quad H - H' - \dfrac{H^2 - H'^2}{r} = (H - H')\left(1 - \dfrac{H + H'}{r}\right)$

Man hat daher die Auflösung nach $H - H'$:

$$H - H' = \frac{log\,P - log\,p}{M}\left(\frac{p_0}{\Delta_0\,g_0}\right)(1+\varepsilon\,t)\left(1 + \frac{H + H'}{r}\right) \tag{7}$$

Hier ist nach früherem (Gleichung (5) § 136. S. 483):

$$g_0 = g_0{}^{45}\,(1 - \beta\cos 2\,\varphi) \quad \text{oder genähert} \quad \frac{1}{g_0} = \frac{1}{g_0{}^{45}}\,(1 + \beta\cos 2\,\varphi). \tag{8}$$

Dieses (8) setzt man in (7), zugleich setzen wir $H - H' = h$, ändern auch die Bezeichnungen im letzten Faktor dahin ab, dass wir unter H nun die *mittlere* Höhe $\dfrac{H + H'}{2}$ verstehen wollen. Damit wird (7):

$$h = log\left(\frac{P}{p}\right)\frac{1}{M}\,\frac{p_0}{\Delta_0}\,\frac{1}{g_0{}^{45}}\,(1 + \beta\cos 2\,\varphi)\,(1+\varepsilon\,t)\left(1 + \frac{2\,H}{r}\right) \tag{9}$$

Es handelt sich nun um die beiden Grössen p_0 und Δ_0; wir haben dieselben schon mit dem *Mariotte-Gay-Lussac*schen Gesetze in § 132., (8) S. 471, eingeführt, und zwar ist Δ_0 die Dichte der Luft von der Temperatur 0° unter irgend einem willkürlich angenommenen Drucke p_0.

Zur Vergleichung wollen wir eine andere Luftdichte $\Delta_0{}^{45}$ einführen, welche gewissermassen als Normalwert gelten soll, nämlich bei der Temperatur 0° und bei dem Barometerstand 0,76ᵐ, der selbst auf die Höhe Null und die Breite 45° bezogen sei. Dann besteht nach dem *Mariotte*schen Gesetze die Proportion:

$$\frac{\Delta_0}{\Delta_0{}^{45}} = \frac{p_0}{0{,}76\, q\, g_0{}^{45}} \tag{10}$$

Dabei sei q die Dichte des Quecksilbers, es ist also $0{,}76\, q$ die Masse einer Quecksilbersäule von 0,76ᵐ Höhe und dem Querschnitt $= 1$, und $0{,}76\, q\, g_0{}^{45}$ das Gewicht dieser Quecksilbersäule.

Setzt man (10) in (9), so erhält man:

$$h = log\left(\frac{P}{p}\right)\frac{0{,}76}{M}\,\frac{q}{\Delta_0{}^{45}}(1+\beta\cos 2\,\varphi)\,(1+\varepsilon t)\left(1+\frac{2\,H}{r}\right) \tag{11}$$

Nun handelt es sich um den Quotienten $\frac{q}{\Delta_0{}^{45}}$, d. h. um das Verhältnis der Quecksilberdichte q zur Luftdichte $\Delta_0{}^{45}$. Man hat hiefür die physikalischen Bestimmungen von *Regnault*. Derselbe fand das Gewicht von 1 Liter Quecksilber = 13,59593 Kilogramm, oder es ist die Dichte des Quecksilbers bezogen auf Wasser von grösster Dichte:

$$q = 13{,}59593\ ^{*)} \tag{12}$$

Um auch die Luftdichte in gleichem Masse zu bestimmen, verfuhr *Regnault* in Paris derart, dass er eine Glasflasche von ungefähr 10 Liter Fassung zweimal wog, das erste Mal mit Luftfüllung und das zweite Mal mit Wasserfüllung.

Die Luft war trocken und frei von Kohlensäure, hatte 760ᵐᵐ Druck und 0° Temperatur (oder entsprechende Reduktion). Die Wägung gab im Mittel:

$$\text{Luftgewicht} = 0{,}0127781 \text{ Kilogramm} \tag{13}$$

Die Wägung mit Wasserfüllung gab entsprechend:

$$\text{Wassergewicht} = 9{,}881086 \text{ Kilogramm} \tag{14}$$

Hiernach ist die Luftdichte:

$$D_P = \frac{0{,}0127781}{9{,}881086} = 0{,}00129319\ ^{**)} \tag{15}$$

---

*) Nach „*Poggendorff*s Annalen“ 74. Band (1849) S. 213 fand *Regnault* das Gewicht von 1 Liter Quecksilber bei 0° durch 3 Versuche:

13595,99 13595,78 13596,02 Gramm

Mittel = 13595,93 Gramm.

Dieser Wert 13,59593 als Dichte des Quecksilbers bei 0° ist auch angenommen in dem Werke „Travaux et mémoires du bureau international des poids et mesures“, Tome I. Paris 1881, Seite A. 44 mit Citat: Mém. de l'ac. des sc. XXI. S. 162.

**) *Regnault* fand in Paris das Gewicht von 1 Liter trockener kohlensäurefreier Luft = 1,293187ᵍʳ. Der erste Teil dieser Bestimmung ist mitgeteilt in „Comptes rendues“ Tome XX S. 975 u. ff. und im Auszug in „*Poggendorff*s Annalen“ 65. Band (1845) S. 395—423.

Es haben sich jedoch daselbst mehrere kleine Rechenfehler eingeschlichen, auf welche schon wiederholt aufmerksam gemacht worden ist. Wir haben alle Zahlen von

Wir haben hier D_P geschrieben, wobei der Index $_P$ den Beobachtungsort Paris, und D die Dichte *reiner* Luft (ohne Wasserdampf und ohne Kohlensäure) vorstellen soll, im Gegensatz zu dem früheren Zeichen $\varDelta$, welches sich auf feuchte und kohlensäurehaltige Luft beziehen soll.

Wir wollen zuerst die Reduktion von D_P auf $D_0{}^{45}$ ausführen, und wir wissen hiezu, dass der Barometerstand 760^{mm} von Paris auf die Normal-Breite 45° und die Höhe Null reduziert, (nach § 136. Gleichung (11) S. 484) folgendes giebt:

$$(760_P)_0{}^{45} = 760 \frac{g_P}{g_0{}^{45}} = 760 \left(1 - \beta \cos 2\varphi - \frac{2H}{r}\right)$$

oder ausgerechnet mit $\varphi = 48° 50'$ und $H = 60^m$ für Paris:

$$(760_P)_0{}^{45} = 760{,}254. \tag{16}$$

Wenn daher das bei (13) als gewogen erwähnte Luftvolumen unter dem reduzierten Normaldrucke 760^{mm} statt $760{,}254^{mm}$ gestanden wäre, so würde es nach dem *Mariotte*schen Gesetze im Verhältnis 760 : 760,254 weniger gewogen haben, d. h. man bekommt aus (13), (15) und (16) nun:

$$D_0{}^{45} = \frac{760}{760{,}254}\, 0{,}00129319 = 0{,}00129277 \tag{17}$$

Nun fehlt uns nur noch die Reduktion für Wasserdampf und für Kohlensäure.

Wir betrachten zuerst den Wasserdampf, der sich in der Luft befindet, für sich allein.

Wir setzen voraus, dass der Druck des Wasserdampfes durch Beobachtung eines trockenen und eines nassen Thermometers, oder auf irgend welche andere Art bestimmt worden sei (§ 144.). Die übrigen Bestandteile ausser dem Wasserdampf bezeichnen wir als trockene Luft und nehmen folgende Bedingungen an:

Trockene Luft:	Druck $= p'$	Dichte $= \varDelta'$	(18)
Wasserdampf:	„ $= e$	„ $= \varDelta''$	(19)
Gemisch:	„ $= p$	„ $= \varDelta$	(20)

S. 985—987 des 20. Bandes der „Compt. rend." nachgerechnet, und für das Gewicht der in *Regnaults* Behälter enthaltenen Luft von 0° gefunden:

(I) = 12,7757 Gramm	(IV) = 12,7764 Gramm	(VII) = 12,7808 Gramm
(II) = 12,7800	(V) = 12,7794	(VIII) = 12,7759
(III) = 12,7811	(VI) = 12,7777	(IX) = 12,7790

Mittel 12,7784 $\pm$ 0,0007

Regnault giebt 12,7781.

Das Gewicht des Wassers von 0°, welches denselben Behälter füllte, fand *Regnault* bei 3 Versuchen:

9881,060 Gramm 9881,113 Gramm 9881.299 Gramm

Das dritte Resultat wird von *Regnault* ausgeschieden, das Mittel der beiden ersten ist 9881,086 Gramm, folglich das Gewicht eines Liters trockener Luft nach *Regnault:*

$$\gamma = \frac{12{,}7781}{9{,}881086} = 1{,}293188$$

Diese letzteren Angaben finden sich in dem Werk von *Regnault* „Relations des expériences entreprises pour déterminer les principales lois et les données numériques qui entrent dans le calcul des machines à vapeur", Paris 1847 (S. 155), worin ein Auszug in „*Poggendorff*s Annalen" 74. Band (1849) S. 202—213 gegeben ist.

Wir nehmen nun den abgerundeten Wert:

$$\gamma = 1{,}29319$$

(in Übereinstimmung mit *Förster*, „Metronomische Beiträge" Nr. 1 S. 5).

Wenn die trockene Luft unter demselben Druck p stünde, wie das Gemisch, so wäre ihre Dichte eine andere, dieselbe sei $= D$, wir setzen deshalb noch bei:

$$\text{fingierte trockene Luft: Druck} = p \qquad \text{Dichte} = D \tag{21}$$

Es ist unsere nächste Aufgabe, das Verhältnis $\Delta : D$ zu bestimmen.

Nach dem *Dalton*schen Gesetz bestehen zwischen (18), (19) und (20) die Summenbeziehungen:

$$p = p' + e \tag{22}$$

und

$$\Delta = \Delta' + \Delta'' \tag{23}$$

Das Verhältnis der Dichte des Wasserdampfes zur Dichte der trockenen Luft ist durch Versuche bestimmt worden, nämlich bei 760^{mm} Druck und 0° Temperatur:

$$\frac{\Delta''_{760}}{\Delta_{760}} = 0{,}623 = d \tag{24}$$

und dieses Verhältnis gilt auch wegen des *Mariotte-Gay-Lussac*schen Gesetzes für andere Temperaturen und andere Drücke, welche beiden Gasen gemeinsam sind; bei (18) und (19) sind aber die Drücke verschieden, weshalb $\Delta'' : \Delta'$ nicht $= d$ ist. Zur Reduktion auf gleiche Drücke hat man nach dem *Mariotte*schen Gesetz aus (19) und (18):

$$\Delta'' = \frac{e}{760}\,\Delta''_{760} \qquad \text{und} \qquad \Delta' = \frac{p'}{760}\,\Delta'_{760}$$

Also das Verhältnis $\Delta'' : \Delta'$ mit Rücksicht auf (24):

$$\frac{\Delta''}{\Delta'} = \frac{e}{p'}\,d \tag{25}$$

Das Dichtenverhältnis der wirklichen und der fingierten trockenen Luft ist nach (18) und (21):

$$\frac{\Delta'}{D} = \frac{p'}{p} \tag{26}$$

Nun besteht nur noch die Aufgabe, aus den vier Gleichungen (22), (23), (25), (26) die drei Hilfsgrössen Δ', Δ'' und p' zu eliminieren. Aus (23) und (25) folgt:

$$\frac{\Delta}{\Delta'} = 1 + \frac{\Delta''}{\Delta'} = 1 + \frac{e}{p'}\,d$$

Wenn man dieses mit (26) multipliziert, so fällt Δ' fort, und man hat:

$$\frac{\Delta}{D} = \left(1 + \frac{e}{p'}\,d\right)\frac{p'}{p} = \frac{p'}{p} + \frac{e}{p}\,d$$

Nun ist vermittelst (22), $p' = p - e$ zu setzen und damit p' zu eliminieren, so dass man hat:

$$\frac{\Delta}{D} = 1 - \frac{e}{p} + \frac{e}{p}\,d = 1 - (1-d)\frac{e}{p}\;^{*)} \tag{27}$$

Eine ähnliche Reduktion ist noch für den geringen Kohlensäuregehalt der Luft anzustellen. Es soll D wie bisher die Dichte reiner, trockener und kohlensäurefreier Luft bedeuten, dagegen nun Δ die Dichte eines Gemisches, welches ausser Wasserdampf auch noch Kohlensäure enthält. Wenn dann d' und e' dasselbe für die Kohlensäure sind, was d und e für den Wasserdampf, dann wird die Gleichung (27) sich so erweitern:

$$\frac{\Delta}{D} = \left(1 - (1-d)\frac{e}{p}\right)\left(1 - (1-d')\frac{e'}{p}\right) \tag{28}$$

---

*) Diese Berechnung des Einflusses der Luftfeuchtigkeit wird zuerst mitgeteilt von *Biot* in der Einleitung der „tables barométriques portatives, Paris 1811“ S. 10—11.

Um Zahlenwerte einzusetzen, haben wir $d = 0{,}623$ bereits in (24) gegeben, und die Kohlensäure-Dichte für den Normaldruck 760^{mm} und 0° Temperatur ist auch physikalisch bestimmt, nämlich $d' = 1{,}529$. (Die Kohlensäure ist bekanntlich ein *schweres* Gas, d. h. d' grösser als 1.)

Der Druck e' der Kohlensäure kann in der Luft als konstant angenommen werden, nämlich rund $e' : p = 0{,}0004$. Setzt man diese Zahlen in (28) ein, so erhält man:

$$\frac{\Delta}{D} = \left(1 - 0{,}377\,\frac{e}{p}\right)(1 + 0{,}00021) \tag{29}$$

Alle diese Verhältnisse gelten, wenn die Dichten Δ und D zu irgend welchem gleichen Drucke p gehören, also auch wenn dieser Druck der Normaldruck $(760)_0^{45}$ ist, wir können daher statt (29) auch schreiben:

$$\frac{\Delta_0^{45}}{D_0^{45}} = \left(1 - 0{,}377\,\frac{e}{p}\right) 1{,}00021 \tag{30}$$

Zusammensetzung der Schlussformel.

Wir haben zurückzugreifen auf die Gleichungen (11), (12), (17) und (30). Setzt man alles ein, und sondert die konstanten Teile mit der Bezeichnung K ab, so bekommt man:

$$\underline{h = K \log \frac{P}{p}(1 + \varepsilon t)\left(1 + 0{,}377\,\frac{e}{(p)}\right)(1 + \beta \cos 2\varphi)\left(1 + \frac{2H}{r}\right)} \tag{31}$$

wo
$$K = \frac{0{,}76}{M}\,\frac{13{,}59593}{0{,}00129277}\,\frac{1}{1{,}00021} = 18400 \tag{32}$$

Zur Übersicht stellen wir auch nochmals alle Bezeichnungen und Zahlenwerte zusammen; es ist:

h die zu messende Höhe, und zwar in Metern, weil die Quecksilbersäule 0,76 in (32) auch in Metermass genommen ist;

$K = 18400$ heisst die barometrische Konstante; ihre Bestandteile nach (32) sind:

- $0{,}76^m$ die angenommene Normalhöhe einer Quecksilbersäule,
- $M = 0{,}4342945$ der logarithmische Modul,
- 13,59593 die Dichte des Quecksilbers im Vergleich mit Wasser von grösster Dichte,
- 0,00129277 die Dichte der Luft unter dem Normaldruck $(760)_0^{45}$ im Vergleich mit Wasser von grösster Dichte;
- 1,00021 der Reduktionsfaktor für Kohlensäure;

P und p die an der unteren und oberen Station gleichzeitig beobachteten Luftdrücke in beliebigem aber einheitlichem Masse gemessen;

$\varepsilon = 0{,}003665$ der Ausdehnungs-Coëfficient der Luft für 1° C;

t die mittlere Lufttemperatur in C°;

e der mittlere Dunstdruck;

(p) der mittlere Luftdruck $= \dfrac{P+p}{2}$;

$0{,}377 = 1 - d$, wobei $d = 0{,}623$ die Dichte des Wasserdampfes, bezogen auf Luft von gleichem Druck und gleicher Temperatur, ist;

$\beta = 0{,}00265$ der von der Abplattung der Erde abhängige Schwere-Coëfficient (nach *Helmert*);

φ die mittlere geographische Breite der beiden Stationen;
H die mittlere Höhe der Stationen über dem Meer in Metern;
$r = 6370000^m$ der Erdhalbmesser.

In unserer Schluss-Formel (31) ist alles fortgelassen, was sich auf die Reduktion der Barometerstände auf gleiche Temperatur, auf gleiche Schwere u. s. w. bezieht, diese Reduktionen müssen *vor* der Anwendung der Formel oder der darauf bezüglichen Tafeln gemacht werden. Die Trennung der Barometer-Reduktionen von der Höhenformel ist namentlich seit Anwendung der Feder-Barometer unbedingt nötig, denn die Reduktionen für diese Instrumente kann man keinenfalls in die Formel aufnehmen und die Reduktionen für Quecksilber-Barometer, welche man früher allgemein in die Formel aufgenommen hat, z. B. die Schwerekorrektion, ist für Feder-Barometermessungen nicht gültig. Namentlich würde durch Aufnahme der Instrumenten-Reduktionen in die Barometerformel Unklarheit entstehen in den Fällen, in welchen an der einen Station mit einem Quecksilber-Barometer und an der anderen mit einem Feder-Barometer beobachtet ist.

Man kann die Frage nach der theoretischen Genauigkeit der Barometerformel (31) aufwerfen, und zuerst die Genauigkeit von K untersuchen.

Wenn man den Einfluss der mittleren Fehler der *Regnault*schen Bestimmungen, soweit man diese Fehler aus den Übereinstimmungen der verschiedenen Einzelresultate ermitteln kann, auf die barometrische Konstante untersucht, so findet man

$$K = 18400 \pm 2 \tag{32}$$

Die von *Regnault* veröffentlichten Beobachtungen werden wohl nicht hinreichend sein, um einen Schluss auf die wirkliche Genauigkeit von K zu bilden; immerhin kann man beiläufig die Grössenordnung des Fehlers von K hiernach schätzen, und setzen wir sogar rund $K = 18400 \pm 10$, so folgt daraus, dass der barometrischen Höhenmessung von dieser Seite keine Genauigkeitsgefahr droht.

§ 146. Barometrische Höhentafeln.

Die vollständige Barometerformel heisst nach (31) § 145. S. 523:

$$h = 18400 \log \frac{P}{p} (1 + 0{,}003665\, t) \left(1 + 0{,}377 \frac{e}{(p)}\right) (1 + \beta \cos 2\varphi) \left(1 + 2 \frac{H}{r}\right) \tag{1}$$

$$\beta = 0{,}00265 \qquad r = 6\,370\,000$$

Für die 4 Klammergrössen dieser Formel haben wir Hilfstafeln berechnet, welche im Anhang auf Seite [24], [23] und [18] zusammengestellt sind.

Wir wollen hiernach ein Zahlenbeispiel behandeln; wir nehmen dazu die 5jährigen meteorologischen Mittelwerte von 1871—1875 der zwei badischen meteorologischen Stationen Karlsruhe und Höchenschwand:

	Barometer	Luftwärme	Feuchtigkeit	
Untere Station Karlsruhe	$751{,}79^{mm}$	$+ 9{,}5°$	$+ 7{,}5^{mm}$	(2)
Obere Station Höchenschwand	$676{,}13^{mm}$	$+ 5{,}9°$	$+ 6{,}3^{mm}$	
Mittel	$B = 713{,}96^{mm}$	$t = + 7{,}7°$	$e = + 6{,}9^{mm}$	

Die Angaben 751,79 und 676,13 sind Quecksilber-Barometerstände und zwar bereits auf 0° reduziert.

Dagegen sind die Schwere-Korrektionen noch nicht angebracht. Wir bedürfen hiezu der geographischen Breiten und der genäherten Meereshöhen beider Punkte, dieselben sind:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{Karlsruhe} & H_1 = 120^m & \varphi_1 = 49^\circ\ 1' \\ \text{Höchenschwand} & H_2 = 1000^m & \varphi_2 = 47^\circ\ 44' \\ \hline \text{Mittel} & H = 560^m & \varphi = 48^\circ\ 22' \end{array}\right\} \quad (3)$$

Was die hier mitgeteilten Höhen H über dem Meere betrifft, so sind dieselben hier nur genähert nötig (nötigenfalls vorläufig barometrisch berechnet).

Die Schwere-Reduktion für B und H mit der Breite φ giebt nach § 136.:

$$B - B\,\beta \cos 2\,\varphi - 2\,\frac{B\,H}{r} = B_0^{45}$$

Dieses giebt, geradezu ausgerechnet, oder mit Benützung der Hilfstafeln Seite [18] und [19] des Anhangs:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für Karlsruhe} & 751{,}79 + 0{,}28 - 0{,}03 = 752{,}04 \\ \text{für Höchenschwand} & 676{,}13 + 0{,}17 - 0{,}21 = 676{,}09 \end{array}\right\} \quad (4)$$

Zur Anwendung der Formel (1) haben wir nun:

$$\begin{array}{l} P = 752{,}04^{mm} \\ p = 676{,}09^{mm} \end{array} \text{ Mittel } (p) = 714^{mm}\ ,\ e = 6{,}9^{mm}\ ,\ t = 7{,}7^\circ\ ,\ \varphi = 48^\circ 22'\ ,\ H = 560^m \quad (5)$$

Das giebt folgende Berechnung:

$$\begin{array}{rl} \log 752{,}04 = & 2.876\,241 \\ \log 676{,}09 = & 2.830\,005 \\ \hline \text{Differenz} & 0.046\,236 \end{array}$$

$\log 0{,}046\,236$	8.66498
$K = 18400 \quad \log K$	4.26482
die Tafel Seite [24] mit $t = 7{,}7^\circ$ giebt $\log(1 + \varepsilon t)$	0.01209
„ „ „ [23] mit $e = 6{,}9$ und $B = 714$ giebt $\log\left(1 + 0{,}377\,\frac{e}{B}\right)$	0.00158
„ „ „ [18] mit $\varphi = 48{,}37^\circ$ giebt $\log(1 + \beta \cos 2\,\varphi)$	9.99987
„ „ „ [18] mit $H = 560$ giebt $\log\left(1 + \frac{2H}{r}\right)$	0.00008
$\log h$	2.94342

$$h = 877{,}85^m \quad (6)$$

Ist die Höhe der unteren Station über N. N. gegeben, nämlich Karlsruhe = 123,0^m, so ergiebt sich nun die Höhe über N. N. der oberen Station Höchenschwand = 120,0 + 877,8 = 1000,8^m.

Barometrische Formeln und Tafeln für besondere Verhältnisse.

Die im Vorstehenden gezeigte ausführliche Berechnung nach der allgemeinen Formel (1), bezw. mit den allgemeinen Hilfstafeln Seite [24], [23], [18], kommt nur selten vor. Glücklicherweise machen die drei letzten Faktoren der Hauptformel so wenig aus, dass man sie für weite Gebiete und für zahlreiche Fälle als *konstant* be-

handeln und mit der Konstanten K zusammennehmen kann. Insbesondere für Deutschland nehmen wir in runden Zahlen:

$$\frac{e}{B} = \frac{1}{100} \quad , \quad \varphi = 50^\circ \quad , \quad H = 500^m \tag{7}$$

Setzt man dieses in die Hauptformel (1) ein, so bekommt man:

$$\text{für Deutschland} \quad h = 18464\,(log\,P - log\,p)\,(1 + 0{,}003665\,t) \tag{8}$$

Zu dieser einfachen Formel ist zuerst zu bemerken, dass die runde Annahme $\frac{e}{B} = \frac{1}{100}$ nach (7), welche hier gemacht ist, oder rund $e = 7^{mm}$, teilweise den wirklichen Verhältnissen nicht entspricht, weil ein konstanter Dunstdruck $e = 7^{mm}$ bei niedrigen Temperaturen einer Übersättigung und bei hohen Temperaturen einer grossen Trockenheit entspricht (vgl. *Helmert* „Zeitschr. f. Verm. 1879“, S. 269—270).

Ehe wir die Gründe entwickeln, welche dennoch für Beibehaltung der Formel (8) als Grundlage von barometrischen Höhentafeln sprechen, wollen wir eine andere Näherungsformel, nach einem schon von *Laplace* und *Biot* benützten Grundsatze, entwickeln.

In § 144. S. 518 haben wir gesehen, dass in Baden der Dunstdruck e als Funktion der Lufttemperatur t etwa durch folgende Gleichung dargestellt wird:

$$e = 3{,}6^{mm} + 0{,}45\,t \tag{9}$$

Damit wird, wenn man B rund $= 700^{mm}$ setzt:

$$1 + 0{,}377\,\frac{e}{B} = 1 + 0{,}001939 + 0{,}0002423\,t \tag{10}$$

In ähnlicher Weise hat *Hann* aus Beobachtungen in den Alpen eine Beziehung hergeleitet (74. Band d. Sitzb. d. k. Akad. d. Wissensch. II. Abt. Juli 1876, Sep.-Abdr. S. 9):

$$1 + f(e) = 1 + 0{,}377\,\frac{e}{B} = 1 + 0{,}00154 + 0{,}000341\,t \tag{11}$$

Die Formeln (10) und (11), welche für Baden (Schwarzwald) und für die Alpen gelten, weichen nicht sehr von einander ab. Wir wollen zunächst allgemein nehmen:

$$1 + f(e) = 1 + 0{,}377\,\frac{e}{B} = 1 + \alpha + \beta\,t \tag{12}$$

Und wenn man dieses in die barometrische Hauptformel (1) S. 524 einsetzt, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} h = 18400\,(1 + \varepsilon\,t)\,(1 + f(e))\,log\,(\ldots.)\,(1 + \beta\,cos\,2\,\varphi)\,(1 + \ldots) \\ (1 + \varepsilon\,t)\,(1 + f(e)) = (1 + \varepsilon\,t)\,(1 + \alpha + \beta\,t) \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$\text{genähert} = (1 + \alpha)\,(1 + (\varepsilon + \beta)\,t) \tag{14}$$

Nun zieht man den Faktor $(1 + \alpha)$ in die Haupt-Konstante 18400 hinein, und nimmt $\varepsilon + \beta$ zusammen. Indem wir nach der Formel (11) von *Hann*, für die Alpen, $\alpha = 0{,}00154$ und $\beta = 0{,}000341$ einsetzen, bekommen wir aus (13) und (14):

$$h = 18428\,(1 + 0{,}004006\,t)\,(log\,P - log\,p)\,(1 + \beta\,cos\,2\,\varphi)\,(1 + \ldots) \tag{15}$$

Die Berücksichtigung der Luftfeuchtigkeit hat also die Konstante 18400 auf 18428 d. h. um 0,15% erhöht, und auch den Luftausdehnungs-Coëfficienten 0,003665 auf rund 0,004 gebracht, was schon *Laplace* und *Biot* hatten. Wenn man nun auch die beiden letzten Faktoren von (15) als konstant mit dem ersten Faktor vereinigt, etwa mit $\varphi = 50^\circ$ und $H = 500$, so bekommt man:

$$h = 18423\,(1 + 0{,}004\,t)\,(log\,B - log\,b) \tag{16}$$

Wenn man nun aber zur Berechnung von *Tafeln* übergeht, welche für möglichst *viele* Fälle brauchbar sein sollen, so erscheint es misslich, den Coëfficienten 0,003665 zu verändern.

Die Vergrösserung von 0,003665 auf 0,0040 beruht auf einer *Näherung*, welche zwar der *jährlichen* Periode der Lufttemperatur und des Dunstdrucks angepasst ist, welche aber der *täglichen* erheblichen Änderung der Lufttemperatur bei nahezu konstantem Dunstdruck nicht folgt. Deswegen empfiehlt es sich, die theoretisch allerdings rohere Formel (8) mit dem ungeänderten Faktor $(1 + 0{,}003665\, t)$ zur Tafelberechnung aus formellen Gründen beizubehalten. Eine nach der Formel (8) berechnete barometrische Höhentafel kann man jederzeit durch Beigabe eines kleinen Korrektionstäfelchens leicht für jeden möglichen mehr oder weniger genau bekannten Fall der Feuchtigkeitsverhältnisse einrichten; das ist aber bei der Formel (16) nicht in gleicher Weise der Fall.

Endlich wollen wir aber noch zeigen, dass man der Formel (8) oder einer darnach berechneten Hilfstafel eine andere Feuchtigkeit in bequemster Weise dadurch unterlegen kann, dass man die Lufttemperatur t ändert, und dass damit noch eine andere Verfeinerung der Formel erzielt werden kann.

Die Formel (8) enthält den konstanten Feuchtigkeitsfaktor $\left(1 + 0{,}377 \frac{1}{100}\right)$; wenn also statt dessen ein Faktor $\left(1 + 0{,}377 \frac{e}{B}\right)$ gelten soll, so hat man den Tafelwert zu multiplizieren näherungsweise mit $\left(1 + 0{,}377 \left(\frac{e}{B} - \frac{1}{100}\right)\right)$, oder es wird mit einfachen Bezeichnungen:

$$H' = H\left(1 + \varepsilon t\right)\left(1 + 0{,}377\left(\frac{e}{B} - \frac{1}{100}\right)\right)$$

Setzt man (12) ein, so wird:

$$H' = H\,(1 + \varepsilon t)\,(1 + \alpha + \beta t - 0{,}00377)$$

$$H' = H\,(1 - (0{,}00377 - \alpha) + \varepsilon t + \beta t + \ldots) \qquad (17)$$

Um dieses durch eine Temperatur-Korrektion auszudrücken, wollen wir setzen:

$$H' = H\,(1 + \varepsilon\,(t + \Delta t)) \quad \text{wo} \quad \Delta t = x + y\,t \qquad (18)$$

Nun giebt die Vergleichung von (17) und (18):

$$\varepsilon \Delta t = \varepsilon x + \varepsilon y\,t = -(0{,}00377 - \alpha) + \beta t$$

$$x = -\frac{0{,}00377 - \alpha}{\varepsilon} \qquad y = \frac{\beta}{\varepsilon}$$

Wenn man die von *Hann* bestimmten Coëfficienten α und β nach (11) und (12) einsetzt, nämlich $\alpha = 0{,}00154$, $\beta = 0{,}000341$, nebst $\varepsilon = 0{,}003665$, so bekommt man:

$$x = -0{,}608^\circ \quad \text{und} \quad y = 0{,}093,$$

also nach (18):

$$\Delta t = -0{,}608^\circ + 0{,}093\, t$$

Diesem entsprechen folgende Werte:

$t =$	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	(19)
$\Delta t =$	−0,6°	−0,1°	+0,3°	+0,8°	+1,3°	+1,7°	+2,2°	

Wenn man also unsere Formel (8) oder die darnach berechneten Hilfstafeln so ändern wollte, dass sie den Feuchtigkeitsbestimmungen von *Hann* entsprechen, so brauchte man nur bei 15°—20° mit einer um rund 1° höheren Lufttemperatur in

die Tafel einzugehen als die unmittelbare Beobachtung verlangt, und durch eine solche Abänderung der Lufttemperatur könnte man *allen* irgend wie im Mittel angenommenen oder wechselnden Feuchtigkeitsverhältnissen genügen.

Indessen kommen bei feineren Berechnungen noch *andere* Umstände hinzu.

Denken wir uns, um dieses zu erklären, Messungen in der günstigen Jahreszeit, mit t etwa 10°—20°, was das häufigste ist, so müsste man nach vorstehender Tabelle (19) die Temperaturen um rund 1° erhöhen, ehe man die Formel (8) oder unsere darnach berechnete Tafel anwendet; und zwar würde man durch diese kleine Temperatur-Erhöhung den mittleren Feuchtigkeits-Verhältnissen für die Sommermonate gerecht werden.

Nun wurde aber durch Erfahrungen, welche wir später in § 153. ausführlich darlegen werden (*Bauernfeind* am grossen Miesing, Genf—St. Bernhard u. s. w.) gefunden, dass wegen Wärmestrahlung der Erdoberfläche oder aus sonstigen Gründen, gerade in den Sommertagen kleine *negative* Korrektionen von nahezu gleichem Betrage wie (19) an der Lufttemperatur anzubringen sind.

Diese letzteren negativen Korrektionen wirken nun den bei (19) gefundenen positiven Korrektionen gerade entgegen, und es zeigt sich hiemit, dass unsere ursprünglich nur mit der *runden* Annahme $\frac{e}{B} = \frac{1}{100}$ angelegte Formel (8) und die darnach berechneten Tafeln, in günstiger Weise der mittleren Feuchtigkeit *und* den Eigentümlichkeiten der strahlenden Wärme u. s. w. genügen.

Bei *kleineren* Höhen, z. B. für Topographie u. s. w. ist es überhaupt sachlich *gleichgültig*, ob man nach der Formel (8) oder (16), oder nach irgend einer anderen ähnlichen Formel rechnet.

Bei grösseren Höhen aber, und in allen Fällen, wo es auf Rechenschärfe ankommen soll, scheint uns (ausser der erwähnten günstigen Kompensationswirkung zwischen Feuchtigkeit und Wärmestrahlung u. s. w.) die einfache Formel (8) gegen (16) oder ähnliche, schon deswegen den Vorzug zu verdienen, weil es für die Rechenschärfe günstiger ist, den Grundstock der Hilfstafeln mit dem *reinen* Luftausdehnungs-Coëfficienten 0,003665 berechnet zu haben, und alles übrige nötigenfalls in Korrektionstäfelchen zu erledigen, als die Grundtafeln selbst auf eine Annahme zu gründen (Coëfficient 0,004), welche Korrektionsberechnungen erschwert.

Die einfache Formel (8) ist allen unseren barometrischen Tafelberechnungen, im Anhang Seite [25]—[35], zu Grunde gelegt, und auch unseren als besonderes Werk im Buchhandel erschienenen Tafeln (s. Anmerkung auf Seite 529 unten).

Rohe Meereshöhen.

Man kann die barometrische Höhenberechnung in zweckmässiger Weise in *Differenzen*form ausführen, wenn man einen fingierten Barometerstand im Meere annimmt. In Mitteleuropa ist der mittlere Barometerstand in der Höhe des Meeres etwa 762^{mm}, wir schreiben daher die Formel (8) S. 526 in diese Form:

$$h = 18464\,(1 + 0{,}003665\,t)\,((log\,762 - log\,p) - log\,(762 - log\,P))$$

Nun setzt man $$18464\,(1 + 0{,}003665\,t)\,(log\,762 - log\,p) = H_1 \qquad (20)$$

und $$18464\,(1 + 0{,}003665\,t)\,(log\,762 - log\,P) = H_2 \qquad (21)$$

Folglich ist

$$h = H_2 - H_1 \qquad (22)$$

Die Anwendung soll ein Beispiel zeigen:

Unterer Beobachtungspunkt $P = 752{,}7^{mm}$ Luft $t_1 = 16°$ } Mittel $t = 15°$
Oberer " $p = 720{,}4$ " $t_2 = 14°$ }

Nun geht man in die Tafel Seite [33] des Anhangs ein, welche für $t = 15°$ gilt, und entnimmt:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für } 752{,}7^{mm} & H_1 = 103{,}9^m \\ \text{„ } 720{,}4 & H_2 = 474{,}9 \end{array}\right\} h = 171{,}0^m \tag{23}$$

In dem Anhang dieses Buches haben wir die Werte H_1 oder H_2 nur für den *einen* Fall $t = 15°$ ausgerechnet, und auf S. [32]—[33] zusammengestellt.

Dagegen haben wir eine besondere umfangreichere Tafel*) dieser Art berechnet und herausgegeben, welche für alle Temperaturen von 5° bis 35° und für alle Barometerstände von 630^{mm} bis 765^{mm} die Höhen H_1 bzw. H_2 ebenso bequem giebt, wie Seite [32]—[33] für den einzelnen Fall der Temperatur 15°.

Indem wir auf diese Tafeln und die ihnen beigegebenen Erläuterungen verweisen, können wir diese Rechnung nach rohen Meereshöhen als erledigt betrachten.

Dagegen haben wir zu mehr überschlägigen Rechnungen, aber für Höhen bis zu 4000^m, in dem Anhang Seite [25]—[31] noch eine Tafel gegeben (welche früher in der ersten Auflage der ausführlichen Tafeln, Stuttgart 1878, enthalten war), deren Anwendung ebenfalls durch ein Beispiel gezeigt werden soll.

Unterer Beobachtungspunkt $P = 714^{mm}$ } Luft im Mittel $= 8°$
Oberer " $p = 462$ }

Da die Tafel nur von 5° zu 5° Lufttemperatur geht, nehmen wir mit $t = 10°$:

$$\left.\begin{array}{lll} P = 714^{mm} & \text{Seite [30]} & 541^m \\ p = 462 & \text{„ [25]} & 4160 \end{array}\right\} h = 3619^m. \tag{24}$$

Barometrische Höhenstufen.

Eine zweite Berechnungsform für barometrische Höhen erhält man durch Darstellung eines Höhen-Unterschiedes als *Produkt.*

Dass innerhalb mässiger Grenzen die Höhen-Differenzen ungefähr proportional den Barometer-Differenzen sind (1^{mm} Barometer giebt ungefähr 10^m Höhe), das zeigt jede barometrische Tafel nach Meereshöhen; und eine erste Näherungsformel hiefür lässt sich rasch bilden. Man hat die Grundformel:

$$h = K(1 + \varepsilon t)(\log P - \log p) \tag{25}$$

Differentiierung giebt:

$$dh = K(1 + \varepsilon t)\frac{M}{P}\,dP \quad , \quad (\text{wo } M = 0{,}43429)$$

oder:

$$dh = -K(1 + \varepsilon t)\frac{M}{p}\,dp$$

Nun kann man setzen:

$$dP = (P - p) \quad \text{oder} \quad dp = -(P - p)$$

und damit bekommt man:

$$dh = MK(1 + \varepsilon t)\frac{P - p}{P} \quad \text{oder} \quad = MK(1 + \varepsilon t)\frac{P - p}{p} \tag{26}$$

---

*) Barometrische Höhentafeln von *Jordan.* 2. Aufl. Stuttgart, J. B. Metzler, 1886.

Diese beiden Formen sind gleich berechtigt; sie unterscheiden sich nur dadurch, dass im Nenner das erstemal P, das zweitemal p steht. Man bildet nun eine dritte, Mittel-Form, welche im Nenner $\frac{P+p}{2}$ hat, und indem man zugleich statt des Differentials dh wieder das Zeichen h für einen endlichen Höhen-Unterschied setzt, erhält man:

$$h = \frac{2\,M\,K\,(1+\varepsilon t)}{P+p}\,(P-p) \tag{27}$$

Dieses ist die gewünschte Form, denn der Höhen-Unterschied h erscheint als ein Produkt, dessen einer Faktor der Barometer-Unterschied $P-p$ ist.

Die in den vorstehenden Gleichungen gewählte Entwicklung mit der Wahl eines Mittelwertes $\frac{P+p}{2}$ statt P und statt p im Nenner von (26) S. 529 ist mathematisch genügend; wir wollen aber doch noch eine zweite ausführlichere Entwicklung hier vornehmen, um auch den Fehler der Näherung zu bestimmen. Zu diesem Zweck bringt man den Quotienten $\frac{P}{p}$, um den es sich im wesentlichen handelt, in folgende Form:

$$\frac{P}{p} = \frac{1+\dfrac{P-p}{P+p}}{1-\dfrac{P-p}{P+p}}$$

Wendet man auf den Zähler und auf den Nenner die logarithmische Reihe an, so erhält man:

$$log\,\frac{P}{p} = log\,P - log\,p = M\left[+\left(\frac{P-p}{P+p}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{P-p}{P+p}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{P-p}{P+p}\right)^3 - \ldots\right]$$
$$- M\left[-\left(\frac{P-p}{P+p}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{P-p}{P+p}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{P-p}{P+p}\right)^3 + \ldots\right]$$

$$log\,P - log\,p = 2\,M\left[\left(\frac{P-p}{P+p}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{P-p}{P+p}\right)^3 + \ldots\right]$$

Dieses in (25) S. 529 eingesetzt giebt:

$$h = 2\,M\,K\,(1+\varepsilon t)\left[\frac{P-p}{P+p} + \frac{1}{3}\left(\frac{P-p}{P+p}\right)^3 + \ldots\right] \tag{28}$$

Lässt man hier das zweite Glied fort, so hat man wieder die frühere Näherungs-Formel (27). Andererseits stellt das zweite Glied von (28) den Fehler der Näherungs-Formel (27) vor. Dieser Fehler ist also:

$$\Delta h = \frac{2}{3}\,M\,K\,(1+\varepsilon t)\left(\frac{P-p}{P+p}\right)^3$$

Für die Genauigkeits-Schätzung ist es genügend, den Fall mit $t = 0$ weiter zu behandeln, und hiefür ist:

$$\Delta h = \frac{2}{3}\,M\,K\left(\frac{P-p}{P+p}\right)^3 \quad \text{und} \quad h = 2\,M\,K\,\frac{P-p}{P+p}$$

also:

$$\Delta h = \frac{1}{12}\,\frac{h^3}{M^2\,K^2} = 1{,}296\left(\frac{h}{1000}\right)^3$$

Die Weglassung des letzten Gliedes in (28) erzeugt also einen Höhenfehler Δh, welcher mit der dritten Potenz der Höhe wächst, und folgende Beträge annimmt:

$h =$	100^m	500^m	1000^m	1500^m	2000^m
$\Delta h =$	0,001	0,16^m	1,3^m	4,4^m	10,4^m

Die Näherungs-Rechnung nach der Gleichung (27) S. 530 ist hiernach etwa bis zu 1000^m Höhen-Unterschied, d. h. bei der grössten Mehrzahl aller praktischen Fälle zulässig; über 1000^m wird die Näherung rasch unbrauchbar.

Zur Anwendung schreiben wir nun die Gleichung (27) so:

$$h = \frac{MK\,(1+\varepsilon t)}{B}\,\varDelta B = \frac{8019}{B}\,(1+\varepsilon t)\,\varDelta B$$

wo nun unter B der *mittlere* Barometerstand und unter $\varDelta B$ die barometrische Differenz verstanden wird.

Die unmittelbare Ausrechnung nach der Formel ist nicht bequem; der Vorteil dieser Formel tritt aber zu Tage, wenn man den einen Faktor tabellarisch verfügbar hat. Wir schreiben:

$$\text{Höhenstufe } (\varDelta h_1) = \frac{MK}{B}(1+\varepsilon t) = \frac{8019}{B}(1+\varepsilon t)$$

dann ist:

$$h = (\varDelta h_1)\,\varDelta B$$

Die Höhenstufenwerte $(\varDelta h_1)$ haben wir als Funktion von B und von t in der Hilfstafel Seite [34]—[35] des Anhangs zusammengestellt.

§ 147. Messung und Berechnung barometrischer Höhen.

Nachdem im bisherigen die Instrumente und die Theorie der barometrischen Höhenmessung beschrieben sind, auch einzelne Beispiele auf S. 525 und 529 bereits berechnet sind, kommt es uns nur noch darauf an, die Gesamtanordnung der Messungen und die tabellarische Behandlung der Höhenberechnungen zu zeigen.

Hiezu eignet sich, besser als allgemeine Worte oder Formeln, die Vorführung eines guten *Beispiels*, zu dem wir hiemit übergehen.

Am 6. Juli 1887 machten wir eine barometrische Aufnahme der bis zu 200^m betragenden Höhen bei Nenndorf, und zwar solcher Höhen, welche wir früher trigonometrisch oder tachymetrisch gemessen hatten, so dass die Fehler der barometrischen Messung sich nachher angeben lassen werden.

Da die Messung auf mehrere Stunden ausgedehnt werden sollte, wurde ein Standbarometer zu korrespondierenden Beobachtungen im Hotel Cassel zurückgelassen, und ein Beobachter dazu gesetzt, welcher viertelstündlich dieses Standbarometer mit innerer Temperatur, und dann noch ein im Schatten aufgehängtes Thermometer für Lufttemperatur abzulesen beauftragt wurde.

Zur Feldbeobachtung sind *zwei* Instrumente zu empfehlen; in unserem Falle waren deren mehrere vorhanden; unsere Mitteilung soll sich jedoch, der Übersichtlichkeit wegen, nur auf *ein* Instrument *(Bohne)* erstrecken.

Zur Feldausrüstung gehört noch ein Schleuder-Thermometer, welches etwa von halb zu halb Stunde geschwungen wird, und die nötigen Lufttemperatur-Bestimmungen liefert.

Vor dem Abgang ins Feld erfolgt die Vergleichung des Standbarometers B_0 mit dem Feldbarometer B_2; und dasselbe geschieht nach der Rückkehr vom Felde. (Vor dem Abgang werden auch die Taschenuhren verglichen, bzw. gleichgestellt.) In unserem Falle ergab sich vor der Messung $B_2 - B_0 = -1{,}37^{mm}$, und nach der Messung $B_2 - B_0 = -1{,}51^{mm}$, also eine Änderung von nur $0{,}14^{mm}$, was zulässig ist, weshalb man nun das Mittel $-1{,}44^{mm} = c$ als konstante Reduktion des Standbaro-

meters für die ganze Messungsreihe annimmt. Diese Berechnung von $c = -1{,}44^{mm}$ ist in der ersten Spalte untenstehender Tabelle ausführlich gegeben.

Es ist jedoch hiezu zu bemerken, dass in der Tabelle alle Barometer-Ablesungen bereits mit ihren besonderen Instrumenten-Korrektionen versehen, und im Falle mehrfacher Ablesung als Mittel-Zahlen eingesetzt sind.

Für die besonderen Temperatur- und Teilungs-Korrektionen u. s. w. werden in dem Stations-Beobachtungsbuch und in den Feldschreibbüchern besondere Spalten angelegt, und die darnach reduzierten und bei Wiederholungen in Mittel zusammengefassten Beobachtungen aus jenen Büchern in die (vorgedruckte) Berechnungs-Tabelle eingetragen.

Barometrische Höhenmessung bei Nenndorf, 6. Juli 1887.

Stand-Vergleichung $B_2 - B_0 = c$	Stand-Beobachtungen			Feld-Beobachtungen			Höhen-Berechnung				
	Barom. B_0	Luft t_1	reduz. Barom. $B_0 + c = B_1$	Ort und Zeit	Barom. B_2	Luft t_2	$\frac{t_1+t_2}{2} = t$	Rohe Meereshöhen H_1'	H_2'	H_0-H_1' $= d$	H_0 $H_2'+d = H_2$
mm	mm		mm		mm			m	m	m	über N.N. m
− 1,37	757,12			**Hotel Cassel** $2^h\ 50^m$	755,75						86,2
	757,11	19,8°	755,67	Galenberg $3^h\ 15^m$	752,20	16,6°	18,2°	71,1	110,3	+ 15,1	125,4
	757,27	19,3°	755,83	Kamm.Brunnen $3^h\ 49^m$	750,30	15,0°	17,2°	69,3	131,8	+ 16,9	148,7
	757,60	19,2°	756,16	Schiesshütte $4^h\ 20^m$	741,33	18,0°	18,6°	65,5	234,2	+ 20,7	254,9
	757,68	18,5°	756,24	Heisterburg $4^h\ 46^m$	735,04	17,5°	18,0°	64,7	306,9	+ 21,5	328,4
	758,09	17,2°	756,65	Schiesshütte $5^h\ 30^m$	741,60	16,4°	16,8°	60,0	231,2	+ 26,2	257,4
	758,16	17,2°	756,72	Kamm.Brunnen $5^h\ 52^m$	751,01	15,8°	16,5°	59,3	123,8	+ 26,9	150,7
	758,33	16,8°	756,89	Galenberg $6^h\ 25^m$	753,50	16,0°	16,4°	57,1	95,6	+ 29,1	124,7
− 1,51	758,64			**Hotel Cassel** $6^h\ 45^m$	757,13						86,2
Mittel − 1,44 = c							17,4° Mittel				

Diesem Übertragen wird in Betreff der *Stations*-Beobachtungen häufig eine graphische Ausgleichung vorhergehen müssen. In unserem Falle z. B. ist die Änderung des Luftdrucks im Laufe des Nachmittags von $757{,}12^{mm}$ auf $758{,}64^{mm}$ ziemlich bedeutend; man trägt daher die Barometer-Kurve, und die Lufttemperatur-Kurve, auf einem vorgedruckten Linien-Netze auf, und entnimmt aus diesem rückwärts die Stationswerte B_0 und t_1, für jeden gebrauchten Zeitpunkt der Feldbeobachtung.

Nachdem so die Spalten B_0, t_1, B_2, t_2 der obigen Tabelle ausgefüllt sind, beginnt die Berechnung, zu welcher nur wenig zu bemerken ist:

Die Stand-Beobachtungen B_0 werden auf $B_0 + c = B_1$ reduziert, die Lufttemperaturen t_1 und t_2 in Mittel $\frac{t_1 + t_2}{2} = t$ zusammengefasst, und auch das Gesamtmittel $t = 17{,}4°$ gebildet.

Wenn dieses Gesamtmittel t von den Einzelwerten t nicht mehr als $1-2°$ abweicht, so kann man das Gesamt-Lufttemperaturmittel für die ganze Reihe als *konstant* gelten lassen; andernfalls rechnet man mit *verschiedenen* Temperaturen. Man sei hier nicht zu ängstlich; diese durch Schleuder-Thermometer erhaltenen Luftwärme-Bestimmungen sind immer von örtlichen Umständen abhängig, welche man doch nicht in

Rechnung nehmen kann; z. B. um $3^h\ 49^m$ hatten wir in der kühlen Schlucht des Kammeraths-Brunnens 15,0°, und um $4^h\ 20^m$ an der 100^m *höheren* Schiesshütte 18,0°.

In unserem Falle nehmen wir für den ganzen Nachmittag von $3^h\ 15^m$ bis $6^h\ 25^m$ die Lufttemperatur konstant, und abgerundet $t = 17°$. Nun schlägt man unsere barometrischen Höhentafeln (2. Auflage, Stuttgart 1886) auf, bei $t = 17°$, S. 39, und setzt von da die rohen Meereshöhen H_1' und H_2' ein. Ist nun H_0 die bekannte festgegebene Höhe des Stationspunktes (Hotel Cassel) über N. N., so kann man für je zwei zusammengehörige rohe Meereshöhen H_1' und H_2', auch die Höhe H_2 des Feldpunktes über N. N. berechnen:

$$H_2 = H_0 + (H_2' - H_1') \qquad (1)$$

oder bequemer:

$$H_2 = H_2' + d, \quad \text{wo} \quad d = H_0 - H_1' \qquad (2)$$

Wenn der Luftdruck im allgemeinen, also das *Stand*-Barometer B_0 oder B_1, während der Dauer der Messung nahe gleich geblieben ist, so ist auch die hier eingeführte Differenz d nahezu konstant, und deswegen, sowie auch aus anderen Gründen, die vorstehende Rechnungsform (2) bequemer als die Form (1).

Sind so die sämtlichen Feldhöhen ausgerechnet, so hat man unter Umständen noch Reduktionen für die Instrumentenhöhe über den Fixpunkten anzubringen; in unserem Falle kommt dieses nicht vor, weil überall der *Erdboden* als Höhenpunkt galt, und die Instrumentenhöhe über dem Boden, etwa 1^m, hier schlechthin als konstant gelten kann.

Wir können unser Beispiel (welches der Übersicht wegen, hier auf 7 Beobachtungen beschränkt vorgeführt wird) auch zu einer Genauigkeits-Betrachtung benützen, in zweifachem Sinne; indem erstens 3 Punkte *hin* und *her* gemessen sind, und zweitens alle Punkte anderwärts trigonometrisch bestimmt sind. Folgendes ist die Vergleichung:

Punkt	Barometrische Höhenmessung			Trigonometr. Messung	Fehler
	hin	her	Mittel		
Galenberg	$125,4^m$	$124,7^m$	$125,0^m$	$124,3^m$	$+ 0,7^m$
Kammeraths Brunnen .	148,7	150,7	149,7	148,7	+ 1,0
Schiesshütte	254,9	257,4	256,2	252,8	+ 3,4
Heisterburg	$328,4^m$		328,4	326,3	+ 2,1
				Mittel	+ 1,8

Dieses zufällig getroffene Beispiel kann wohl auch etwa die Genauigkeit im allgemeinen veranschaulichen, denn der mittlere Fehler solcher barometrischer Höhenmessungen beträgt in der That etwa $1 - 2^m$, wie in § 151. noch näher gezeigt werden wird.

Für die *korrespondierenden Beobachtungen*, welche in dem hier betrachteten Falle gestellt wurden, kann man, statt eines Beobachtungs-Gehilfen, auch ein registrierendes Feder-Barometer aufstellen, wie z. B. von *Koppe* („Die Aneroid-Barometer" Zürich 1877, S. 14) beschrieben wird.

Wir haben ein solches Instrument unserer Hannoverschen Sammlung gut wirkend gefunden. nur müssen die Korrektionen desselben ebenso wie bei jedem anderen Feder-Barometer bestimmt werden.

Graphische und mechanische Hilfsmittel.

Wenn man barometrische Zahlentafeln berechnet vorliegen hat, so kann man daraus auch andere Hilfsmittel ableiten. Die Höhenstufen-Tafel Seite [34] — [35] des Anhangs kann man in Verbindung mit dem gewöhnlichen Rechenschieber benützen, und auch einen Rechenschieber besonders dazu herrichten (vgl. *Koppe* in der „Zeitschrift für Verm. 1874“ S. 17, und „Zeitschr. d. Hann. Ing.- u. Arch.-Vereins 1888“, Heft 6., sowie *Vogler*, „Anleitung zum Entwerfen graphischer Tafeln“, Berlin 1877, S. 110.)

Als ein Beispiel rein graphischer Behandlung einer langen Messungsreihe von etwa 1000 Ablesungen erwähnen wir unsere libyschen Höhen („Physische Geographie und Meteorologie in der libyschen Wüste, von *Jordan*,“ Kassel 1876, S. 178—193 und Tafel IV.). Die Barometerwerte wurden auf einem langen Linien-Netz längenprofilartig aufgetragen, für die Reise selbst und für die korrespondierenden Stationen, so dass jede Ordinatendifferenz zwischen der Reise-Kurve und der Stations-Kurve als Mass für einen Höhenunterschied diente. Die Lufttemperatur wurde bei den geringen Höhen als konstant angenommen, so dass zum Verwandeln der Ordinaten in Höhenmass, *ein* Massstab genügte. In anderem Falle müsste man mehrere Höhenmassstäbe machen, oder man kann auch eine Anordnung wie die früher in der „Zeitschr. f. Verm. 1873“, S. 306—308 mit lithogr. Tafel von uns angegebene, zur Berücksichtigung der Luftwärme benützen.

(Verschiedene graphische Hilfsmittel für barometrische Höhenberechnung sind beschrieben von *Koppe* in der „Zeitschr. d. Hannov. Ing.- u. Arch.-Vereins 1888“, Heft 6.)

Anhang zu § 147.

Schrittmass bei barometrischen Aufnahmen.

Die Frage, wie man barometrisch bestimmte Höhen der *Lage* nach in eine Karte eintragen kann, ist im allgemeinen eine für sich bestehende, und hat mit der barometrischen Höhenbestimmung sonst nichts gemeinsam; indessen bei *Schrittmassen* kann man die barometrischen Differenzen so geschickt zur Reduktion auf den Horizont benützen, dass wir diesen Fall flüchtiger Aufnahme, der in Verbindung mit einem Taschenkompass sich sehr nützlich verwerten lässt, hier mit anfügen müssen.

Über das Schrittmass an sich haben wir das Nöthige schon früher in § 14. S. 35 mitgeteilt, und namentlich S. 35 die Reduktion von Schrittwerten auf die Horizontale bei verschiedenen Steigungen oder Gefällen angegeben.

Bei barometrischen Messungen hat man den Steigungs- oder Neigungswinkel des auf- oder abgeschrittenen Weges nicht unmittelbar, wohl aber mittelbar durch die Differenz der am Anfang und am Ende abgelesenen Barometerstände, welche für den vorliegenden Zweck hinreichend genau in Metermass verwandelt werden durch Multiplikation mit 11,5. Nach diesem Masse haben wir eine Hilfstafel für unseren Schritt berechnet, welche auf Seite [36] des Anhangs mitgeteilt ist, und durch ein einfaches Beispiel erläutert werden soll. Man habe 60 Schritte aufwärts gemacht, zu Anfang

752,4^{mm} und am Ende der Strecke 751,8^{mm} abgelesen, also eine barometrische Differenz $= -0,6^{mm}$ erhalten; dann ist nach S. [36] die Horizontalprojektion des zurückgelegten Weges = 36 Meter.

(Einiges weitere hierüber giebt die „Zeitschr. f. Verm. 1884", S. 485—488.)

§ 148. Barometrische Höhen-Einschaltung.

Ohne irgend welche barometrische Höhenformel kann man zwischen zwei fest gegebenen Punkten weitere Höhen einschalten, mittelst der Annahme, dass die Barometerstände sich nahezu proportional den Höhen ändern.

Fig. 1.

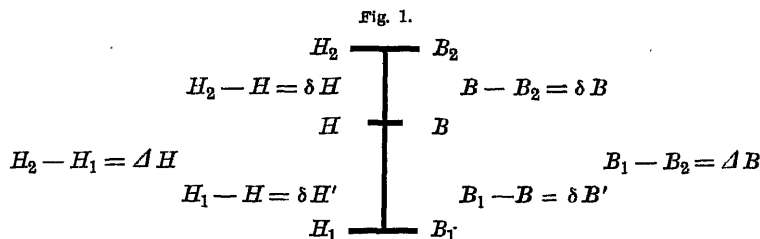
H_2 — B_2

$H_2 - H = \delta H$ $\quad$ $B - B_2 = \delta B$

H — B

$H_2 - H_1 = \Delta H$ $\quad$ $B_1 - B_2 = \Delta B$

$H_1 - H = \delta H'$ $\quad$ $B_1 - B = \delta B'$

H_1 — B_1

Nach Andeutung der vorstehenden schematischen Fig. 1. betrachten wir drei Punkte mit den Höhen H_1, H, H_2 und mit den Barometerständen B_1, B, B_2.

Wenn B_1, B, B_2 beobachtet, und H_1 und H_2 fest gegeben sind, so kann man den Zwischenpunkt H durch zwei Proportionen bestimmen:

$$H_2 - H = \frac{H_2 - H_1}{B_1 - B_2}(B - B_2) \quad \text{oder} \quad H - H_1 = \frac{H_2 - H_1}{B_1 - B_2}(B_1 - B)$$

Mit kürzeren Bezeichnungen heisst dieses:

$$\delta H = \frac{\Delta H}{\Delta B}\,\delta B \quad \text{oder} \quad \delta H' = \frac{\Delta H}{\Delta B}\,\delta B'$$

Dabei ist der Quotient $\frac{\Delta H}{\Delta B}$ derselbe Wert, den wir in § 146. S. 529 die barometrische Höhenstufe genannt haben.

Zu weiterer Erläuterung nehmen wir sofort ein Beispiel:

Punkt	Gegebene Höhen H	Beobachtet Barom. B	δB	$11,81\,\delta B = \delta H$	Berechnete Höhen H
P_2	728,9^m	704,1^{mm}	0,0^{mm}		(728,9^m)
a		707,0	2,9	34,2^m	694,7
b		716,4	12,3	145,3	583,6
c		718,4	14,3	168,9	560,0
d		721,2	17,1	202,0	526,9
P_1	471,4	725,9	21,8		(471,4)
	257,5 $= \Delta H$	21,8 $= \Delta B$	$\frac{\Delta H}{\Delta B} = 11,81$		

Statt wie hier die Einschaltung durchaus auf die *End*punkte zu beziehen, kann man auch, und zwar in mancher Beziehung vorteilhafter, die Einschaltung Schritt für Schritt machen und bekommt dann folgende Anordnung:

Punkt	Gegeben H	Beobachtet B	δB	$11{,}81\,\delta B = \delta H$	Berechnet H
P_2	728,9^m	704,1^{mm}	2,9^{mm}	34,2^m	728,9^m
a		707,0	9,4	111,1	694,7
b		716,4	2,0	23,6	583,6
c		718,4	2,8	33,1	560,0
d		721,2	4,7	55,5	526,9
P_1	471,4	725,9			471,4
	257,5 $= \varDelta H$	21,8 $= \varDelta B$	21,8	257,5 $= \varDelta H$	

Die δH kann man meist mit dem Rechenschieber ausrechnen.

Um diese Interpolations-Berechnung theoretisch zu untersuchen, und den dabei begangenen Fehler zu bestimmen, betrachten wir zuerst die strengen Formeln:

$$H_2 - H_1 = K\log\frac{B_1}{B_2} = K\log\left(1+\frac{B_1-B_2}{B_2}\right)$$

$$H_2 - H = K\log\frac{B}{B_2} = K\log\left(1+\frac{B-B_2}{B_2}\right)$$

Dabei soll K auch den Faktor $(1+\varepsilon\, t)$ u. s. w. mit enthalten, und die Lufttemperatur sei als konstant angenommen.

Mit kürzeren Bezeichnungen $\varDelta B$ und δB nach Fig. 1. giebt dieses entwickelt:

$$\varDelta H = K\log\left(1+\frac{\varDelta B}{B_2}\right) = MK\left(\frac{\varDelta B}{B_2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\varDelta B}{B_2}\right)^2\right) = MK\frac{\varDelta B}{B_2}\left(1-\frac{1}{2}\frac{\varDelta B}{B_2}\right)$$

$$\delta H = K\log\left(1+\frac{\delta B}{B_2}\right) = MK\left(\frac{\delta B}{B_2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\delta B}{B_2}\right)^2\right) = MK\frac{\delta B}{B_2}\left(1-\frac{1}{2}\frac{\delta B}{B_2}\right)$$

$$\frac{\delta H}{\varDelta H} = \frac{\delta B}{\varDelta B}\left(\frac{1-\frac{1}{2}\frac{\delta B}{B_2}}{1-\frac{1}{2}\frac{\varDelta B}{B_2}}\right) = \frac{\delta B}{\varDelta B}\left(1-\frac{1}{2}\frac{\delta B}{B_2}+\frac{1}{2}\frac{\varDelta B}{B_2}\right)$$

$$\frac{\delta H}{\varDelta H} = \frac{\delta B}{\varDelta B}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\varDelta B-\delta B}{B_2}\right) = \frac{\delta B}{\varDelta B}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\delta B'}{B_2}\right)$$

$$\delta H = \frac{\varDelta H}{\varDelta B}\delta B + \frac{1}{2}\frac{\varDelta H}{B_2}\frac{\delta B\,\delta B'}{\varDelta B} \tag{1}$$

Das zweite hier auftretende Glied stellt den Fehler vor, welcher begangen wird, wenn nach der Proportional-Interpolation gerechnet wird. Dieser Fehler erreicht seinen grössten Wert, wenn in dem Produkte $\delta B\,\delta B'$ beide Faktoren *gleich* werden, dann ist $\delta B\,\delta B' = \frac{\varDelta B}{2}\frac{\varDelta B}{2} = \frac{(\varDelta B)^2}{4}$, und damit wird der genannte Fehler:

$$f_{max} = \frac{1}{8}\frac{\varDelta H}{B_2}\frac{\varDelta B}{4} \tag{2}$$

Es kann aber hier wieder $\frac{\Delta B}{B_2} = \frac{\Delta H}{MK}$ gesetzt werden, also

$$f_{max} = \frac{1}{8} \frac{(\Delta H)^2}{MK} = 0{,}156 \left(\frac{\Delta H}{100}\right)^2$$

Der Fehler wächst also mit dem Quadrate des Höhenunterschiedes ΔH der Anbindepunkte, und beträgt:

für $\Delta H =$ 100^m	200^m	300^m	400^m	500^m
$f_{max} =$ 0,16^m	0,6^m	1,4^m	2,5^m	7,8^m

An Rechenarbeit wird bei dieser Interpolationsberechnung im Vergleich mit der Benützung der barometrischen Höhentafeln nur dann etwas gewonnen, wenn man, bei mässigen Höhen, die Interpolation mit dem Rechenschieber macht.

Man kann auch die Interpolation im Anschluss an die Benützung der barometrischen Höhentafeln machen, indem man zuerst die Höhen nach der Tafel aufschlägt und nur den Anschluss*widerspruch* proportional verteilt.

In unseren ausführlichen Barometertafeln (Stuttgart 1886, 2. Auflage) haben wir auch eine Anleitung gegeben, wie man zwischen beliebig weiten Grenzen mit Hilfe der Tafel dadurch interpolieren kann, dass man die etwa gemessene Lufttemperatur zunächst unbenützt lässt, und eine solche Lufttemperatur *annimmt*, dass die Tafelwerte sich ohne Widerspruch in das Höhen-Intervall einfügen.

§ 149. Barometrische Höhenmessung ohne korrespondierende Beobachtungen.

Das Bedürfnis korrespondierender Beobachtungen erhellt aus den beständigen Änderungen im Zustand der Atmosphäre.

Wenn korrespondierende Beobachtungen nicht zu haben sind, muss man auch ohne solche auszukommen suchen. Ein beliebtes Mittel ist hiezu, bei nicht sehr grossen Zwischenzeiten, das Zurückkehren auf den Ausgangspunkt, wie folgendes Beispiel, betreffend die Höhenmessung der Cheops-Pyramide mit zwei Feder-Barometern, zeigt:

Zeit 1873 27. Nov.	*Beobachtungspunkt*	*Naudet*	*Goldschmid*	*Lufttemperatur*
3^h 42^m	Fuss der Pyramide	761,77^{mm}	760,47^{mm}	20,5°
3^h 58^m	Gipfel „ „	749,44	747,98	
4^h 37^m	„ „ „	749,50	748,14	19,8°
4^h 47^m	Fuss „ „	761,06	759,78	19,9°

Die Instrumenten-Korrektionen sind bereits angebracht, jede Angabe ist das Mittel aus 3—4 Ablesungen.

Die 8 Beobachtungen werden so zusammengestellt:

	unten	*oben*	*Differenz*
	761,77^{mm}	749,44^{mm}	
	760,47	749,50	
	761,06	747,98	
	759,78	748,14	
Mittel	760,77^{mm}	748,76^{mm}	12,01^{mm}

Wir nehmen hiernach für die Berechnung als korrespondierend 760,77^{mm} und 748,76^{mm} mit der mittleren Lufttemperatur 20,0°. Der mittlere Barometerstand ist abgerundet $B = 755^{mm}$.

Nach der Tafel Seite [34] des Anhangs hat man für $B = 755^{mm}$ und $t = 20°$, die Höhenstufe $= 11{,}40^m$, es ist also die Höhe der Cheops-Pyramide:

$$h = 11{,}40 \times 12{,}01 = 136{,}9^m \qquad (1)$$

Ähnlich wie das Zurückkehren auf den Ausgangspunkt wirkt in Bezug auf Ersatz korrespondierender Beobachtungen, das Weitergehen zu einem zweiten Fixpunkt.

Wenn man barometrische Höhenmessungen macht, gänzlich *ohne* korrespondierende Standbeobachtungen und ohne Rückkehr auf den Aufgangspunkt oder Abschluss auf einem zweiten Fixpunkt, so bleibt nichts übrig, als den Luftdruck während der ganzen Dauer der Messung als konstant anzunehmen. Bei kurzer Zeitdauer und ruhigem Wetter thut man das oft.

Zur Überlegung, welche Fehler dabei etwa entstehen, haben wir einen Jahrgang (1869) der barometrischen Ablesungen der Station Karlsruhe durchgegangen.

Die Ablesungen sind täglich morgens 7 Uhr, mittags 2 Uhr und abends 9 Uhr, also bei Tage in je 7stündigen Zwischenzeiten, gemacht. Die Mittel der entsprechenden Barometer-Änderungen für je 7 Stunden sind diese:

Januar	$\pm 1{,}4^{mm}$	Juli	$\pm 0{,}9^{mm}$		
Februar	1,6	August	1,0	Gesamt-Mittel	
März	2,0	September	1,4	$= \pm 1{,}5^{mm}$ für 7 Stunden	(2)
April	1,5	Oktober	1,5	oder	
Mai	1,4	November	1,9	$= \pm 0{,}2^{mm}$ für 1 Stunde.	
Juni	1,2	Dezember	1,9		

Es zeigt sich, dass die Veränderungen in den Sommermonaten, während welcher am meisten gemessen wird, kleiner sind als in den Wintermonaten. Die grösste Änderung betrug $\pm 7{,}9^{mm}$ am 9. Dezember zwischen 7 und 2 Uhr. Im ganzen Jahre kamen 15 Änderungen, die grösser als 5^{mm} waren, vor, und hievon fällt nur *eine* in die Monate April bis August.

Bedenkt man, dass die starken Änderungen an stürmischen und gewitterigen Tagen stattfinden, an welchen gewöhnlich nicht gemessen wird, so wird man die durchschnittliche 7stündige Änderung *für Beobachtungstage* unter 1^{mm} annehmen dürfen, also die durchschnittliche *ein*stündige Änderung nur etwa zu $0{,}1^{mm}$ (entsprechend einem Höhenfehler von 1^m).

Wir betrachten noch in Kürze ein wesentlich anderes Verfahren der barometrischen Höhenmessung ohne korrespondierende Beobachtungen, nämlich die Bestimmung *absoluter* Meereshöhen unter der Voraussetzung, dass der Barometerstand im Meeresspiegel einen gewissen, aus irgend welchen anderweitigen Beobachtungen geschlossenen Wert habe. Am Meere selbst lässt sich der Barometerstand unmittelbar beobachten, ausserdem berechnet man den auf den Meeresspiegel reduzierten Barometerstand irgend eines Ortes, dessen Meereshöhe bekannt ist, durch umgekehrte Anwendung der Barometerformel. Allerdings fehlt hiebei die Kenntnis der Temperatur für die angenommene Luftsäule vom Beobachtungsort bis hinunter zum Meeresspiegel, so dass man zu einer Annahme hiezu gezwungen ist. Gewöhnlich nimmt man eine Temperatur-Zunahme nach unten von $0{,}5°$ auf 100^m an, und kann darnach die Reduktion ausführen.

Für Süddeutschland haben wir den mittleren auf das Meer reduzierten Barometerstand bestimmt durch die Ausgleichung der Barometer-Mittel und der Höhen von

26 badischen und württembergischen Stationen, die in Band I. S. 61 unten erwähnt ist mit dem Ergebnis:

$$B_0 = 762{,}56^{mm} \pm 0{,}10^{mm}.$$

Dabei ist die Schwere-Korrektion des Quecksilbers bereits in Rechnung gebracht.

Die erste wissenschaftliche Sammlung und Verarbeitung von Barometer-Beobachtungen in diesem Sinne ist enthalten in der Abhandlung von *Alexander Buchan*: „The mean pressure of the atmosphere and the prevailing winds over the globe“ veröffentlicht in „Transactions of the Royal Soc. of Edinburgh, Vol. XXV. April 1869“. Die beste Übersicht über diese Verhältnisse giebt: „Atlas der Meteorologie (*Berghaus* physikalischer Atlas, Abteilung III.), 12 kolorierte Karten in Kupferstich mit 61 Darstellungen, bearbeitet von Dr. *Julius Hann*, Direktor der k. k. Zentralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus in Wien. Gotha, *Justus Perthes* 1887“, insbesondere: Bl. VI, VII und VIII, Isobaren und Winde im Jahre, im Januar und im Juli.

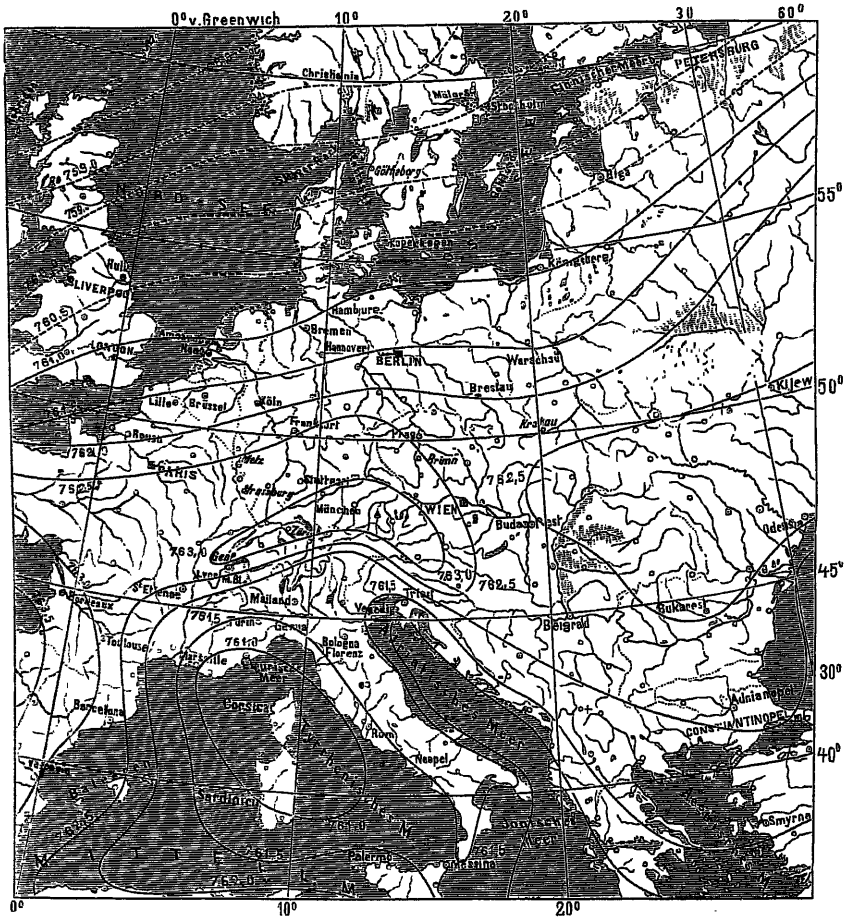
Diese Darstellungen beziehen sich auf die ganze Erde; für unser Gebiet ist die neueste Arbeit hierüber: „Die Verteilung des Luftdruckes über Mittel- und Süd-Europa, dargestellt auf Grundlage der 30jährigen Monats- und Jahres-Mittel 1851—80, nebst allgemeinen Untersuchungen über die Unveränderlichkeit der Luftdruck-Mittel und Differenzen, sowie der mehrjährigen Perioden, von Dr. *J. Hann*, Universitäts-Professor, Direktor der k. k. Zentralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus in Wien, 1887“.

Aus diesem Werke S. 165—173 haben wir von 205 Stations-Tabellen die folgenden 6 ausgezogen, welche das Wesentliche für Deutschland enthalten:

Wahrer Luftdruck im Meeres-Spiegel, nach Hann, Periode 1851—1880
(mit Schwere-Korrektion nach § 136.).

Monat	Hamburg	Berlin	Dresden	Karlsruhe	Wien	München	Mittel
Januar	761,8	763,0	763,8	764,9	765,5	766,0	764,2
Februar	761,6	762,1	762,8	763,7	764,0	764,8	763,2
März	760,2	760,4	761,1	761,4	761,2	762,0	761,0
April	760,7	760,8	761,2	761,3	760,7	761,4	761,0
Mai	761,3	761,2	761,3	761,5	760,4	761,1	761,1
Juni	761,2	761,5	761,9	762,5	761,3	762,4	761,8
Juli	760,9	761,1	762,0	762,3	761,4	762,6	761,7
August	760,7	761,2	761,9	762,3	761,6	762,5	761,7
September	761,9	762,4	763,1	763,4	763,4	763,9	763,0
Oktober	760,6	761,7	762,3	762,6	763,1	763,3	762,3
November	760,6	761,1	761,8	762,1	762,9	763,4	762,0
Dezember	761,1	762,0	762,9	764,3	764,5	765,5	763,4
Jahres-Mittel	761,1	761,5	762,2	762,7	762,4	763,2	762,2

Ausserdem geben wir in nachstehender Figur S. 540 eine verkleinerte Darstellung von *Hann*s Isobarenkarte für Jahresmittel mit Schwere-Reduktion.

Jahresmittel-Isobaren in der Meeresfläche, nach *Hann*.
Massstab 1 : 23 000 000.

Ausser der jährlichen Periode hat das Barometer auch eine *tägliche* Periode, welche bei uns sehr unbedeutend, zwischen den Wendekreisen und auch in Nordafrika erheblich ist, wie folgende zwei Beispiele für Stuttgart und die libysche Wüste (letztere im Winter) zeigen.

Tageszeit	Stuttgart	Lib. Wüste	Tageszeit	Stuttgart	Lib. Wüste
Mitternacht 0^h	$+0{,}13^{mm}$	$+0{,}05^{mm}$	Mittag 12^h	$-0{,}05^{mm}$	$+0{,}47^{mm}$
2^h	$+0{,}03$	$-0{,}34$	2^h	$-0{,}31$	$-0{,}48$
4^h	$-0{,}10$	$-0{,}41$	4^h	$-0{,}38$	$-0{,}76$
Morgen 6^h	$+0{,}01$	$-0{,}02$	Abend 6^h	$-0{,}27$	$-0{,}58$
8^h	$+0{,}28$	$+0{,}82$	8^h	$+0{,}02$	$-0{,}12$
10^h	$+0{,}36$	$+1{,}22$	10^h	$+0{,}21$	$+0{,}19$
Mittag 12^h	$-0{,}05$	$+0{,}47$	Mitternacht 12^h	$+0{,}13$	$+0{,}05$

Das Barometer steht am tiefsten etwa morgens 4 Uhr und abends 4 Uhr, und am höchsten vormittags 10 Uhr und abends 9—10 Uhr. Namentlich das Vormittags 10 Uhr-Maximum ist in den Tageskurven sehr ausgeprägt.

Wenn nun z. B. Jemand nachmittags $4^1/_2$ Uhr in der libyschen Wüste $754{,}5^{mm}$ beobachtet hat, so muss er hiezu $0{,}7^{mm}$ addieren, um das Tagesmittel zu erhalten, weil um $4^1/_2$ Uhr der Barometerstand im allgemeinen $0{,}7^{mm}$ unter dem Tagesmittel ist.

Wie man solche Angaben zu Höhenberechnungen benützen kann, wollen wir andeuten durch Fortschreiten von dem rohesten Verfahren bis zu den Verfeinerungen der heutigen Meteorologie.

Wenn z. B. ein Botaniker in den Alpen eine Pflanze findet, und dazu sein Feder-Barometer mit 560^{mm} abgelesen hat, und sich dazu erinnert, dass es sehr kalt war, so kann er nach der Tafel unseres Anhanges Seite [27] sofort sagen, dass der Fundort der Pflanze etwa 2500^m über dem Meere war. Obgleich dieses Ergebnis wohl um $50^m — 100^m$ und vielleicht noch mehr unsicher ist, so ist es doch immerhin eine Höhenangabe, welche dem Pflanzen-Geographen wahrscheinlich genügt.

Als Beispiel für feinere Berechnung nehmen wir eine Reihe von Barometerablesungen, welche der Reisende *Cailliaud* vom 1. Januar bis 9. Februar 1820 in der Oase Beharieh täglich dreimal gemacht hat.

Die Mittelzahlen nebst Reduktion auf das Tagesmittel entsprechend der obigen Tabelle S. 540, libysche Wüste, sind:

Beharieh	$7^h—8^h$	$12^h—1^h$	$4^h—5^h$
	$757{,}3^m$	$758{,}2^m$	$757{,}2^m$
Temperatur-Korrektion	— 1,2	— 3,1	— 2,7
	756,1	755,1	754,5
Reduktion auf das Tagesmittel	— 0,6	— 0,2	+ 0,7
Tagesmittel	755,5	754,9	755,2
Gesamt-Tagesmittel		$755{,}2^{mm}$.	

Was nun den entsprechenden Barometerstand im Meere betrifft, so ist derselbe für Mitte Januar $= 765{,}2^{mm}$ und für Mitte Februar $= 764{,}0^{mm}$, also für das Mittel vom 1. Jan. bis 9. Febr. etwa $765{,}1^{mm}$, dieses giebt gegen $755{,}2^{mm}$ eine Differenz $= 9{,}9^{mm}$. Die Höhenstufe ist hierfür $= 11{,}1^m$, also $h = 11 \times 9{,}9^m = 110^m$. Hiernach liegt die Oase Beharieh 110^m über dem Meere.

(Weitere solche Berechnungen enthält des Verfassers „Physische Geographie und Meteorologie der libyschen Wüste“, S. 179—199, woselbst auf S. 196 auch Näheres über das vorstehende Beispiel von Beharieh mitgeteilt ist.)

§ 150. Koch-Thermometer.

Aus der Siede-Temperatur des Wassers kann auf den Luftdruck geschlossen werden, wie aus folgenden zur Veranschaulichung der Verhältnisse hergesetzten Zahlen hervorgeht:

Siede-Temperatur	*Barometerstand*	
99,5°	$746{,}5^{mm}$	Differenz $= 2{,}7^{mm}$ für 0,1°
99,6	749,2	
99,7	751,9	
99,8	754,6	
99,9	757,3	
100,0	760,0	

Ein Zehntel Grad Differenz der Siede-Temperatur entspricht bereits etwa $2{,}7^{mm}$ Barometer, und man müsste die Temperatur auf ein Hundertel Grad genau haben, um nur $0{,}3^{mm}$ versichern zu können; das ist nur mit besonderen, zu diesem Zweck konstruierten Thermometern und Siede-Apparaten möglich.

Die genauen Zahlenwerthe der Luftdrücke für verschiedene Siede-Temperaturen haben wir auf Seite [20] des Anhangs zusammengestellt, und zwar nach dem Werke „Travaux et mémoires du bureau international des poids et mesures, Tome I. Paris 1881“, Seite A. 43—48.

Aus den Angaben über die genauen Bestimmungen der Thermometer-Normalpunkte 0° und 100°, welche wir schon in § 143. S. 514—515 vorgeführt haben, sieht man, dass das Siede-Thermometer keine unabhängigen Bestimmungen des Luftdrucks giebt, denn seine Teilung ist selbst von dem Luftdruck abhängig.

Das Siede-Thermometer spielt also als Barometer dieselbe Rolle wie das Feder-Barometer; beides sind Instrumente, welche auf rein empirischem Wege nach einem Quecksilber-Barometer geteilt sind. Diese beiden Instrumente sind auch insofern unter sich verwandt, als ihre Angaben der Schwere-Reduktion nach § 136. *nicht* bedürfen, welche dem Quecksilber-Barometer zukommt.

Das Koch-Thermometer hat nur insofern praktische Bedeutung für das barometrische Höhenmessen auf Reisen, als man annehmen kann, dass seine Angaben mehr *konstant* seien als die des Feder-Barometers.

Ob aber dieses der Fall ist, lässt sich nicht allgemein sagen, und nach dem was man über die Änderungen der Thermometer im allgemeinen weiss (vgl. § 143. S. 515), ist die Konstanz des Koch-Thermometers zweifelhaft, weshalb ein Quecksilber-Barometer zur Standkontrolle der Feder-Barometer vorzuziehen ist, und nur noch die kompendiösere Form und leichtere Transportweise des Siede-Thermometers für dieses sprechen kann.

Praktische Erfahrungen und Vergleichungen von *Fuess*schen Koch-Thermometern sind mitgeteilt von *Kunze* in Tharand, in den „Verhandlungen der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin“, 1882, Nr. 9.

Kunze fand bei den Vergleichungen zweier Thermometer mittlere Fehler von $\pm 0{,}0099°$ und $\pm 0{,}0082°$, was $\pm 0{,}26^{mm}$ und $\pm 0{,}21^{mm}$ entspricht.

§ 151. Genauigkeit der barometrischen Höhenmessung.

Die theoretischen Fehlergesetze der barometrischen Höhenmessung lassen sich aus der barometrischen Höhenformel ableiten; diese Formel ist im wesentlichen:

$$h = K(\log B - \log b)(1 + \varepsilon t) \qquad (1)$$

Die Differentiierung nach B, nach b und nach t giebt die drei Teilfehler:

$$d h_B = \frac{MK}{B} d B (1 + \varepsilon t) \qquad (2)$$

$$d h_b = -\frac{MK}{b} d b (1 + \varepsilon t) \qquad (3)$$

$$d h_t = h \varepsilon d t \qquad (4)$$

Die Werte (2) und (3) sind dieselben, welche wir schon bei den Betrachtungen über barometrische Höhenstufen (§ 146.) kennen gelernt haben, und die Zahlenwerte dafür erhalten wir aus der entsprechenden Hilfstafel S. [34]—[35] des Anhangs.

Wir wollen hieraus und aus S. [25]—[27] zur Übersicht einen kleinen Auszug bilden, mit dB oder $db = \pm 0{,}1^{mm}$:

Höhenfehler dh_B für einen Barometerfehler dB oder $db = \pm 0,1^{mm}$.

t	B=760	B=730	B=700	B=650	B=600	B=550	B=500	B=450	
	m	m	m	m	m	m	m	m	
0°	1,06	1,10	1,15	1,23	1,34	1,4	1,6	1,7	(5)
10°	1,09	1,14	1,19	1,28	1,38	1,5	1,6	1,8	
20°	1,13	1,18	1,23	1,32	1,44	1,6	1,7	1,9	
30°	1,17	1,22	1,27	1,37	1,48	1,6	1,8	2,0	

Innerhalb so weiter Grenzen (bis zu Höhen von 4000—5000^m) ist allerdings dieser Fehlerwert ziemlich schwankend, zwischen 1^m und 2^m für 0,1^{mm}; indessen wenn man im Mittelgebirge bleibt, so kann man diesen Fehler wohl als *konstant*, etwa $= \pm 1,1^m$, für einen Barometerfehler von 0,1^{mm} annehmen.

Hiernach wollen wir setzen:

$$dh_B = dh_b = \pm 1,1^m \text{ für } dB \quad \text{oder} \quad \text{für } db = \pm 0,1^{mm} \tag{6}$$

Ein ganz anderes Gesetz zeigt der von der Lufttemperatur herrührende Fehler dh_t nach (4); dieser ist nicht konstant, sondern wächst proportional mit der Höhe selbst. Setzt man $dt = \pm 1°$ und $\varepsilon = 0,003665$, so findet man aus (4):

$$dh_t = \pm 0,003665\, h \quad \text{oder} \quad 0,3665\,\% \text{ der Höhe} \tag{7}$$

Nun können wir aus den Bestandteilen (6) und (7) eine einfache theoretische Fehlerformel zusammensetzen; da der Fehler (6) zweimal (oben und unten) vorkommt, haben wir den Gesamtfehler:

$$\Delta h = \sqrt{2\,(1,1)^2 + (0,003665\, h)^2} = \sqrt{2,42 + 0,0000\,1343\, h^2} \tag{8}$$

Hiernach ist zur Übersicht folgendes berechnet:

Mittlerer zu fürchtender Fehler Δh einer barometrisch gemessenen Höhe h.

$h =$	$\Delta h =$	$h =$	$\Delta h =$	$h =$	$\Delta h =$	
0^m	$\pm$1,6^m	500^m	$\pm$2,4^m	1000^m	$\pm$ 4,0^m	
100	1,6	600	2,7	2000	7,4	
200	1,7	700	3,0	3000	11,1	
300	1,9	800	3,3	4000	14,7	(9)
400	2,1	900	3,6	5000	18,9	
500	2,4	1000	4,0	6000	22,0	

Diese Zahlen (oder besser eine darnach aufgetragene Kurve) zeigen nun jedenfalls die Haupt-Fehler-Verhältnisse, nämlich, dass bei kleinen Höhen der Fehler lange nahezu konstant bleibt, mit rund 1—2^m, dass der Fehler aber bei grösseren Höhen über 1000^m sehr rasch zunimmt.

Bei sehr grossen Höhen genügt das vorstehende Fehlergesetz nicht mehr. Zunächst müsste man hier den konstanten Fehlerteil stärker annehmen (vgl. Tabelle (5) s. oben), und zweitens bringen bei grossen Höhen die Lufttemperaturen häufig noch stärkere Fehler als solche für $dt = \pm 1°$.

Erfahrungs-Resultate über Genauigkeit barometrischer Höhenmessungen, namentlich für Feder-Barometer mit mässigem Höhen-Unterschiede, liegen in grosser Zahl vor, z. B. von *Koppe* in der „Zeitschr. f. Verm. 1874“, S. 1—28. Derselbe findet (S. 27) aus 248 Anschlüssen an nivellierte Punkte den mittleren Fehler $= \pm 1,6^m$. Ähnliche Untersuchungen werden mitgeteilt von *Schoder* („Hilfstafeln etc.“ S. 40—43), *Bauernfeind* („Beobachtungen und Untersuchungen über die *Naudet*schen Aneroid-

Barometer" S. 34—52), *Schreiber* („Flächen-Nivellement mit Aneroid-Barometern" S. 29—32).

Man kann aus der Zusammenfassung aller solcher Erfahrungen mit grosser Sicherheit den Schluss ziehen, dass bei Anwendung aller nötigen Sorgfalt der mittlere Fehler einer Feder-Barometer-Messung bei Höhen bis etwa 200^m nicht mehr als $1—2^m$ beträgt. Dieses gilt für *Feder*-Barometer, welche kleine *relative* Messungen genauer geben als Quecksilber-Barometer, während letztere dann vorzuziehen sind, wenn es sich um grosse Intervalle und um Erhaltung des Standes handelt.

Reine *Einschaltungs*-Messungen geben bei mässigen Höhen und mässigen Zwischenzeiten mit Feder-Barometern noch geringere mittlere Fehler als $1—2^m$. Verfasser hat bei solchen Einschaltungen selbst wiederholt mittlere Fehler unter 1^m gefunden, und von *Koppe* („Die Aneroid-Barometer von Goldschmid" S. 53—54) werden für solche Fälle wahrscheinliche Fehler $\pm 0{,}57^m$, $\pm 0{,}62^m$, $\pm 0{,}47^m$ mitgeteilt, was einem mittleren Fehler von rund $\pm 0{,}8^m$ entspricht.

Andererseits fanden wir aber auch bei Einschaltungen starke Fehler, bis zu 10^m, wenn schroffe Wechsel, *auf und ab*, und wenig gangbarer Weg vorhanden war.

Die eigentümlichen Fehler-Verhältnisse für *grössere* Höhen werden wir in § 153. besonders behandeln.

§ 152. Unbestimmte Änderung der Lufttemperatur.

Bei der Entwicklung der vollständigen barometrischen Höhenformel (§ 145.) wurde die Lufttemperatur t als konstante Grösse in der Integration behandelt.

Obgleich das auf diesem Wege erhaltene Resultat für die gewöhnlichen praktischen Zwecke keiner Verbesserung fähig ist, wollen wir doch eine Integration mit unbestimmter Änderung der Lufttemperatur ausführen, um den Fehler schätzen zu können, welcher bei der gewöhnlichen Annahme etwa gemacht wird.

Nach (3) § 145. S. 519 handelt es sich um folgende Integration:

$$K'\int\frac{dp}{p}=\int\frac{1}{1+\varepsilon t}\left(1-\frac{2H}{r}\right)dH \tag{1}$$

wobei K' im wesentlichen die barometrische Konstante ist.

Die untere Höhe sei H_1 und die obere Höhe sei H_2 und die Mitte sei:

$$\frac{H_1+H_2}{2}=H_0 \tag{2}$$

Irgend eine Höhe H soll von der Mitte H_0 an gezählt sein nach der Gleichung:

$$H=H_0+x \tag{2a}$$

Der Mittelhöhe H_0 entspreche die Lufttemperatur t_0, und das Gesetz der Lufttemperatur-Änderung sei:

$$t=t_0+Ax+Bx^2+Cx^3 \tag{3}$$

Damit wird entwickelt:

$$\frac{1}{1+\varepsilon t}=\frac{1}{1+\varepsilon t_0}(1-\varepsilon' A' x-\varepsilon' B' x^2-\varepsilon' C' x^3) \tag{4}$$

wobei ε' und B' folgende Bedeutungen haben:

$$\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon t_0} \qquad B'=B-\varepsilon' A^2 \tag{5}$$

A' und C' braucht man hier nicht zu kennen.

Damit wird die nach (1) zu integrierende Funktion:

$$\frac{1}{1+\varepsilon t}\left(1-\frac{2H}{r}\right)dH = \frac{1-\frac{2H_0}{r}}{1+\varepsilon t_0}\left(1-A''x-B''x^2-C''x^3\right)dx \qquad (6)$$

wobei B'' diese Bedeutung hat:

$$B'' = \varepsilon'\left(B'-\frac{A}{r}\right) = \varepsilon'\left(B-\varepsilon' A^2 - 2\frac{A}{r}\right) \qquad (7)$$

A'' und C'' braucht man nicht zu kennen, da sie bei der Integration fortfallen. Wenn man nämlich (6) zwischen den Grenzen $x = -\frac{h}{2}$ und $x = +\frac{h}{2}$ integriert, so erhält man:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(1-A''x-B''x^2-C''x^3\right)dx = h - \frac{B''}{12}h^3 = h\left(1-\frac{B''}{12}h^2\right) \qquad (8)$$

Die Integration auf der linken Seite von (1) ist dieselbe wie früher bei der gewöhnlichen Barometerformel, wir bekommen daher aus (1), (6) und (8):

$$h = K' \log\frac{P}{p}(1+\varepsilon t_0)\left(1+\frac{B''}{12}h^2\right)\left(1+2\frac{H_0}{r}\right) \qquad (9)$$

Dieses ist mit der früher in § 145. S. 519 ausgeführten Entwicklung zu vergleichen, bei welcher eine *konstante* Lufttemperatur t angenommen war; wir wollen nun diejenige konstante Temperatur, welche, in die gewöhnliche Barometerformel eingesetzt, den richtigen Höhenwert h ergiebt, mit τ bezeichnen; dann giebt die Vergleichung von (9) mit der früheren Gleichung (9) § 145. S. 519 folgendes:

$$1+\varepsilon\tau = (1+\varepsilon t_0)\left(1+\frac{B''}{12}h^2\right) = 1+\varepsilon\left(t_0+\frac{B''h^2}{12\,\varepsilon}+\frac{B''h^2}{12}t_0\right) \qquad (10)$$

Nach (7) und (5) haben wir:

$$B'' = \varepsilon' B - \varepsilon'^2 A^2 \quad , \quad \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon t_0} \quad \text{oder} \quad = \varepsilon(1-\varepsilon t_0)$$

Setzt man dieses in (10), und bleibt bei den ersten Gliedern stehen, so erhält man:

$$\tau = t_0 + \frac{h^2}{12}B - \frac{h^2}{12}A^2\varepsilon \qquad (11)$$

Nach dem angenommenen Gesetze (3) hat man:

$$\text{mit } x = -\frac{h}{2}: \qquad t_1 = t_0 - \frac{Ah}{2} + \frac{Bh^2}{4} - \frac{Ch^3}{8}$$

$$\text{mit } x = +\frac{h}{2}: \qquad t_2 = t_0 + \frac{Ah}{2} + \frac{Bh^2}{4} + \frac{Ch^3}{8}$$

$$\text{Mittel:} \qquad \frac{t_1+t_2}{2} = t_0 + \frac{Bh^2}{4} \qquad (12)$$

$$\text{Differenz:} \qquad t_2 - t_1 = Ah + \frac{Ch_3}{4}, \text{ genähert } t_2 - t_1 = Ah \qquad (13)$$

Die stetige Temperaturänderung werde mit n bezeichnet, d. h.:

$$n = \frac{dt}{dh} = A + 2Bx + 3Cx^2$$

Insbesondere:

$$\text{mit } x = -\frac{h}{2}: \qquad n_1 = A - Bh + \frac{3}{4} C h^2$$

$$\text{mit } x = +\frac{h}{2}: \qquad n_2 = A + Bh + \frac{3}{4} C h^2$$

$$\text{Differenz:} \qquad n_2 - n_1 = 2\,Bh \tag{14}$$

Durch (13) und (14) werden die früher unbestimmt eingeführten Coëfficienten A und B bestimmt, und man erhält damit aus (11):

$$\tau = t_0 + \frac{n_2 - n_1}{24} h - \frac{(t_2 - t_1)^2}{12} \varepsilon \tag{15}$$

Ebenso erhält man aus (12):

$$\frac{t_1 + t_2}{2} = t_0 + \frac{n_2 - n_1}{8} h \tag{16}$$

und diese beiden letzten Gleichungen (15) und (16) zusammen geben:

$$\tau = \frac{t_1 + t_2}{2} - \frac{n_2 - n_1}{12} h - \frac{\varepsilon}{12} (t_2 - t_1)^2 \tag{17}$$

Wenn man also nach der gewöhnlichen Barometerformel rechnet, und $\frac{t_1 + t_2}{2} = \tau$ nimmt, so begeht man einen Temperaturfehler:

$$\delta t = + \frac{n_2 - n_1}{12} h + \frac{\varepsilon}{12} (t_2 - t_1)^2 \tag{18}$$

Hier kann man noch näherungsweise $t_2 - t_1 = nh$ setzen, und damit wird:

$$\delta t = \frac{n_2 - n_1}{12} h + \frac{\varepsilon}{12} n^2 h^2 \tag{19}$$

Der entsprechende Höhenfehler ist:

$$\delta h = \varepsilon \frac{n_2 - n_1}{12} h^2 + \frac{\varepsilon^2}{12} n^2 h^3 \tag{20}$$

Nimmt man im Mittel $n = 0{,}005$, so giebt das zweite Glied in (20) für $h = 1000^m$, nur $0{,}03^m$ *); dagegen kann das erste Glied, welches sich auf die Ungleichförmigkeit der Temperatur-Änderung bezieht, stärker werden. Nimmt man z. B. $n_1 = 0{,}004$, $n_2 = 0{,}008$ und $h = 1000$, so giebt das erste Glied in (19) einen Temperaturfehler $= 0{,}33°$ oder in (20) einen Höhenfehler $= 1{,}22^m$.

Weitere Schlüsse aus den Formeln (19) oder (20) können in Verbindung mit den Refraktionsformeln § 128. S. 460—461, gezogen werden, wenn zweckmässig angeordnete Beobachtungen vorhanden sind.

Zu der algebraischen Funktion (3), welche dieser ganzen Betrachtung zu Grunde liegt, ist zum Schluss noch zu bemerken:

Ob eine solche Funktion zur Darstellung der Lufttemperatur-Änderung im einzelnen Falle genügt, und ob man die Funktion kennt, ist eine Frage für sich, die nicht allgemein beantwortet werden kann. Bei der Annäherung an die Erdoberfläche, mit $x = -\frac{h}{2}$ und $x = +\frac{h}{2}$, wird die Gleichung (3) wohl nicht genügen, was aber damit zusammenhängt, ob die an der Erdoberfläche in üblicher Weise beobachteten Lufttemperaturen überhaupt unmittelbar zur barometrischen Höhenmessung brauchbar sind.

---

*) Dieses *zweite* Glied unserer Formel (20) wurde früher von *Reye*, und dann von *Sohncke* in *Schlömilchs* „Zeitschrift f. M. u. Ph. 1875“, S. 478—480, angegeben.

§ 153. Periodische Fehler der barometrischen Höhenmessung.

Man hat schon frühe erkannt, dass die Fehler der barometrischen Höhenmessung nach dem gewöhnlichen Verfahren nicht ganz unregelmässig, sondern nach gewissen Gesetzen, insbesondere der Tageszeit entsprechend eintreten. *Ramond* fand schon 1808 (nach *Rühlmann* S. 6) eine Höhe zu verschiedenen Tageszeiten so:

Tageszeit:	7^h Vorm.	12^h Mittag	3^h Nachm.	9^h Abend
Höhe:	251^m	258^m	254^m	252^m

Plantamour benützte 10jährige Beobachtungen (1841—1850) in Genf und auf dem St. Bernhard, in Monatsmittel vereinigt, berechnete die Lufttemperaturen rückwärts aus den Barometerbeobachtungen und aus den bekannten Höhen, und verglich die berechneten Temperaturen mit den beobachteten.

In Deutschland hat zuerst *Bauernfeind* sich mit dieser Sache beschäftigt, und seine hier bahnbrechenden „Beobachtungen und Untersuchungen über die Genauigkeit barometrischer Höhenmessungen, München 1862“ veröffentlicht.

Die Untersuchung wurde hauptsächlich in der Form geführt, dass aus den anderwärts genau bekannten, nivellierten, Höhenunterschieden und den beobachteten Barometerständen, die Lufttemperaturen mittelst der Barometerformel rückwärts berechnet und mit dem arithmetischen Mittel der unten und oben beobachteten Lufttemperaturen verglichen wurden. Wir wollen eine solche rückwärts barometrisch berechnete Temperatur mit τ bezeichnen und das Mittel der beobachteten Temperaturen mit t; dann handelt es sich um die Differenz $\tau - t$, welche einen ausgesprochen regelmässigen Tagesverlauf zeigte, wie aus folgendem Beispiel zu ersehen ist, welches sich auf *Bauernfeinds* Messungen am grossen Miesing zwischen den Stationen I. und V. bezieht; I. ist $815{,}36^m$ und V. ist $1883{,}53^m$ über dem Meere, also der Höhenunterschied $h = 1068{,}17^m$ (*Bauernfeind* S. 9 und S. 69).

Die Beobachtungen sind an den 7 Tagen 22.—28. August 1857 angestellt, bei einer mittleren Lufttemperatur von $13{,}5°$ R $= 16{,}8°$ C. Die Mittelzahlen $\tau - t$ sind nach *Bauernfeinds* Ausgleichung (von R° in C° reduziert) die folgenden:

Grosser Miesing, August 1857, $h = 1068^m$.

Tageszeit	$\tau - t$	Tageszeit	$\tau - t$
8^h Vorm.	$+1{,}8°$	1^h Nachm.	$-1{,}3°$
9^h „	$+1{,}0$	2^h „	$-1{,}4$
10^h „	$+0{,}3$	3^h „	$-1{,}1$
11^h „	$-0{,}3$	4^h „	$-0{,}2$
12^h Mittag	$-0{,}9$	5^h „	$+1{,}0$
1^h Nachm.	$-1{,}3$	6^h Abend	$+2{,}2$

Bauernfeind schloss hieraus (S. 62), dass die Thermometer bis gegen 10 Uhr morgens die Lufttemperatur zu niedrig, zwischen 10 und 4 Uhr zu hoch, nach 4 Uhr aber wieder zu niedrig angeben.

Bauernfeind leitete daraus die Regel ab, dass die günstigsten Tageszeiten für barometrische Höhenmessungen vormittags 10 Uhr und nachmittags 4 Uhr seien.

Diese *Bauernfeind*schen „Beobachtungen und Untersuchungen“ haben im weiteren sehr fördernd und anregend gewirkt. Solche Untersuchungen wurden fortgesetzt u. a. von *Rühlmann* („die barometrischen Höhenmessungen u. s. w.“, Leipzig 1870), welcher an einer von ihm angestellten sächsischen Beobachtungsreihe und an den von *Plantamour* (s. o.) entlehnten 6jährigen Jahresmitteln der Beobachtungen von Genf und St. Bernhard tägliche und jährliche Perioden der barometrischen Fehler fand.

Auch hier zeigte sich im allgemeinen ein ähnliches Verhalten, wie am grossen Miesing; die Grenz-Zeiten für $\tau = t$ fand *Rühlmann* (S. 116) im allgemeinen weiter auseinander gerückt als *Bauernfeind*, nämlich im Sommer von etwa 7 Uhr vormittags bis 7 Uhr nachmittags, so dass im Sommer fast den ganzen Tag über die gewöhnlichen Lufttemperaturbestimmungen eine *negative* Korrektion verlangen würden.

Die Hauptergebnisse hievon haben wir (nach *Rühlmann* S. 60 und S. 63) in folgender Tabelle zusammengestellt:

Genf — St. Bernhard, Beobachtungen 1860—1865. $h = 2070^m$.

Tagesverlauf für den Monat **Juli.**						Jahres-Mittel.			
Tageszeit	t_1	t_2	$\frac{t_1+t_2}{2} = t$	$h_b - h$	$\tau - t$	Monat	t	τ	$\tau - t$
12^h Mittern.	16,0°	5,1°	10,55°	− 6,0^m	+ 0,8°	Januar	− 3,7°	− 1,9°	+ 1,8°
2^h	14,5	4,3	9,40	− 10,7	+ 1,5	Februar	− 4,1	− 3,0	+ 1,1
4^h	13,8	3,8	8,80	− 10,8	+ 1,5	März	− 1,6	− 1,5	+ 0,1
6^h Morgen	15,0	4,4	9,70	− 3,0	+ 0,4	April	+ 3,6	+ 3,5	− 0,1
8^h	18,4	5,9	12,15	+ 13,7	− 1,9	Mai	+ 8,1	+ 7,8	− 0,3
10^h	20,4	7,9	14,15	+ 24,8	− 3,4	Juni	+ 10,2	+ 9,1	− 1,1
12^h Mittag	22,1	8,8	15,45	+ 29,9	− 4,1	Juli	+ 12,6	+ 11,3	− 1,3
2^h	23,0	9,0	16,10	+ 29,1	− 4,0	August	+ 12,3	+ 11,6	− 0,7
4^h	22,9	8,5	15,70	+ 23,7	− 3,3	September	+ 9,2	+ 9,5	+ 0,3
6^h Abend	21,8	7,3	14,55	+ 14,2	− 2,0	Oktober	+ 5,4	+ 6,6	+ 1,2
8^h	19,5	6,1	12,80	+ 4,0	− 0,6	November	+ 0,3	+ 1,6	+ 1,3
10^h	17,5	5,7	11,60	+ 1,7	+ 0,2	Dezember	− 3,7	− 2,0	+ 1,7
Mittel	18,8°	6,4°	12,6°	+ 9,0^m	− 1,2°	Mittel	+ 4,1°	+ 4,4°	+ 0,3°

Hienach besteht in den Sommermonaten und in der warmen Tageszeit im allgemeinen eine *negative* Korrektion $\tau - t$, d. h. man muss die auf gewöhnliche Weise mit dem Thermometer bestimmten Lufttemperaturen t vermindern, um diejenigen Temperaturen τ zu erhalten, welche zu richtigen barometrischen Höhenunterschieden h führen.

Nach diesem sind Untersuchungen von *Weilenmann* 1875, *Grassi* 1876 (vgl. das Litteraturverzeichnis S. 552) und *Koppe* zu nennen. *Koppe* kam in dem Buche „Die Aneroid-Barometer von *Goldschmid*“, Zürich 1877, S. 79 zu dem Schluss, dass für keine Tageszeit und keine Jahreszeit für verschiedene Höhen die Differenz zwischen beobachteter und berechneter Temperatur dieselbe bleibt. Weitere Resultate, vorläufiger Natur, hat *Koppe* in zahlreichen graphischen Darstellungen mitgeteilt.

Aus neuester Zeit haben wir in Deutschland wieder Beobachtungen von *Bauernfeind*, dessen fortgesetzte Untersuchungen über Refraktion bereits auf S. 466 u. S. 469 erwähnt wurden.

Aus der Abhandlung „Neue Beobachtungen über die tägliche Periode barometrisch bestimmter Höhen von *Carl Max von Bauernfeind*, München 1883“ haben wir von S. 27—28 folgenden Auszug berechnet:

Höhensteig — Kampenwand 16. — 27. August 1881, $h = 1080^m$.

Mitternacht	0^h	$\tau - t = +3{,}3^\circ$	Mittag	12^h	$\tau - t = -3{,}5^\circ$
„	2^h	$+3{,}0$	„	2^h	$-3{,}8$
„	4^h	$+3{,}8$	„	4^h	$-3{,}0$
Morgens	6^h	$+1{,}1$	Abend	6^h	$-0{,}7$
„	8^h	$-1{,}5$	„	8^h	$+2{,}7$
„	10^h	$-3{,}2$	„	10^h	$+3{,}6$
Mittag	12^h	$-3{,}5$	Mitternacht	12^h	$+3{,}3$

Die hiernach gezeichnete Kurve hat nahezu denselben Charakter wie die Kurve für Genf — St. Bernhard.

Zur theoretischen Untersuchung der Temperaturfehler übergehend, halten wir uns zunächst an unsere Gleichung (17) § 152. S. 546, welche zunächst so lautet:

$$\tau = \frac{t_1 + t_2}{2} - \frac{n_2 - n_1}{12}\, h - \frac{\varepsilon}{12}(t_2 - t_1)^2 \qquad (1)$$

Das letzte Glied wird wohl nie von Belang sein, da $\frac{\varepsilon}{12}$ nur $= 0{,}0003$ ist. Indem wir dieses letzte Glied fortlassen, und $\frac{t_1 + t_2}{2} = t$ schreiben, haben wir:

$$\tau - t = -0{,}0833\,(n_2 - n_1)\, h \qquad (2)$$

Hiebei ist t die in üblicher Weise beobachtete Lufttemperatur, τ die barometrisch aus dem Höhenunterschiede h und den Barometerständen berechnete Lufttemperatur, n_1 und n_2 die Temperaturabnahme für die Höheneinheit, unten und oben.

Man hat häufig die so berechneten Werte τ „*wahre Lufttemperaturen*“ genannt, was aber falsche Vorstellungen erzeugt hat, und mindestens unvorsichtig ist; es giebt für jene Werte τ überhaupt keine andere Definition, als durch ihre Entstehung mit Rückwärts-Anwendung der Barometerformel, wobei τ *konstant* gedacht ist.

Wenn man zusehen will, ob die thatsächlich beobachteten Differenzen $\tau - t$ sich durch die Formel (2) erklären lassen, so findet man zunächst das *Vorzeichen* befriedigend, denn die Temperatur-Abnahme n_1 unten ist im allgemeinen kleiner als n_2 oben, wie unter anderem die bei Tage gemachten Refraktions-Beobachtungen beweisen; und die barometrischen Vergleichungen am grossen Miesing und Genf — St. Bernhard gaben bei Tage im Sommer $\tau - t$ negativ.

Am grossen Miesing war im Maximum $\tau - t = -1{,}4^\circ$, dabei $h = 1068^m$, woraus man nach (2) rückwärts berechnen kann $n_2 - n_1 = 0{,}016$. Im Mittel ist etwa $n = 0{,}005$ und setzt man $n_2 = 0{,}010$, $n_1 = 0{,}002$, so wird $n_2 - n_1 = 0{,}008$; d. h. die Hälfte des soeben berechneten 0,016 liesse sich etwa aus der Differenz der n erklären. Zwischen Genf und St. Bernhard ist im Juli höchstens $\tau - t = -4{,}1^\circ$ mit $h = 2070^m$, dieses würde geben $n_2 - n_1 = 0{,}024$.

Man kann noch versuchen, die Differenzen $\tau - t$ durch Annahme von *lokaler* Lufttemperatur-Korrektion unten und oben $\varDelta t_1$ und $\varDelta t_2$ zu erklären, d. h. zu setzen:

$$\tau = \frac{t_1 + \varDelta t_1 + t_2 + \varDelta t_2}{2} - \frac{n_2 - n_1}{12} h$$

$$\tau - t = \frac{\varDelta t_1 + \varDelta t_2}{2} - \frac{n_2 - n_1}{12} h$$

Schon die Annahme, dass an Sommertagen wegen der strahlenden Wärme des Bodens $\varDelta t_1$ und $\varDelta t_2$ beide nahezu gleich und negativ seien, erklärt einen Teil der Differenzen $\tau - t$.

Es wird möglich sein, ein System meteorologischer Beobachtungen und trigonometrischer Höhenmessungen durch die vorstehenden Formeln in Verbindung mit den früheren Formeln S. 460—461, bzw. durch weitere Verfolgung des dadurch betretenen Weges, in Übereinstimmung zu bringen.

§ 154. Litteratur der barometrischen Höhenmessung.

Ohne, bei der grossen Ausdehnung der barometrischen Litteratur, Vollständigkeit zu erstreben, stellen wir hier die wichtigsten, namentlich neueren, barometrischen Schriften zusammen.

1805. *Laplace.* Traité de mécanique céleste. Tome IV. Paris 1805. S. 293—294. Erste theoretisch vollständige Barometerformel:

$$r = 18336\,(1 + 0{,}002845 \cos 2\,\psi)\,(1 + \frac{t + t'}{2}\,0{,}00375)\left(\left(1 + \frac{r}{a}\right) \log \frac{(h)}{h} + \frac{r}{a}\,0{,}868589\right)$$

Erdhalbmesser $a = 6366198$. Dabei sind Quecksilber-Barometerstände (h) und h vorausgesetzt, deren Schwere-Korrektion in dem Zusatz $+\frac{2\,Mr}{a} = 0{,}868589\,\frac{r}{a}$ enthalten ist (wie in unserer Anmerkung zu § 136. S. 486 gezeigt wurde).

Die *Laplace*sche Konstante 18336 wurde nicht theoretisch, sondern durch Vergleichung barometrischer und trigonometrischer Höhen nach *Ramond* erhalten. In dem Faktor $\left(1 + \frac{r}{a}\right)$, welcher unserem $\left(1 + \frac{2\,H}{r}\right)$ entspricht, setzt *Laplace* die untere Meereshöhe = Null.

Die obige Formel gilt zunächst für trockene Luft; zur Berücksichtigung der Luftfeuchtigkeit ändert dann *Laplace* den dritten Faktor, und schreibt statt dessen $\left(1 + \frac{2\,(t + t')}{1000}\right)$, wie nachher von *Biot* ausführlicher angegeben wird.

1808. *Ramond.* Mémoire sur la formule barométrique. Paris 1808.

1811. *Biot.* Tables barométriques portatives etc. avec une instruction contenant *l'histoire de la formule barométrique* etc. Paris 1811.

Die Einleitung giebt auf S. 10—11 die Berechnung für den Einfluss des Wasserdampfes auf die Dichte und den Druck der Luft (wie jetzt allgemein üblich und in unserem § 145. in den Gleichungen (18)—(27) gegeben ist). Der Druck des Wasserdampfes wird auf S. 13 angenommen $2{,}561^{mm} + 0{,}43245\,t$. Dieses entspricht unserer Formel (9) § 146. und die weitere Rechnung *Biot*s ist eben im wesentlichen jene in unserem § 146. (9)—(12) mitgeteilte. *Biot* erhält so den *erhöhten* Temperatur-Coëfficient 0,0039127, welchen er auf 0,004 aufrundet, und nachher in dem Gliede $\frac{4}{1000}\,\frac{T + t}{2} = \frac{2\,(T + t)}{1000}$ benützt.

Die Schlussformel von *Biot* S. 27 ist:

$$X = 18334\,(1 + 0{,}002837 \cos 2\,\psi)\left[\left(1 + \frac{2\,r}{a}\right)\left(1 + \frac{2\,(T + t)}{1000}\right)\left(1 + \frac{X}{h}\right)\left(\log \frac{H}{h} + 2 \log\left(1 + \frac{X}{a}\right)\right]$$

Die Höhentafeln geben auf 9 Seiten rohe Meereshöhen mit $T + t$ von 1° zu 1° und H oder h von 1^{mm} zu 1^{mm}.

1818. *Gauss.* Berliner astron. Jahrbuch für 1818, S. 169—172. Hilfstafel zum Höhenmessen mit dem Barometer. „Die Tafel giebt in aller Strenge den *Laplace*schen Ausdruck wieder."

1827. *Belli.* Giornale di fisica e chimica di Pavia, 1827. (Vgl. 1876, *Grassi.*)

1851. *Plantamour.* Resumé des observations thermométriques et barométriques, faites à l'observatoire de Genève et au Grand St. Bernhard. Genève 1851.

1862. *Bauernfeind.* Beobachtungen und Untersuchungen über die Genauigkeit barometrischer Höhenmessungen und die Veränderungen der Temperatur und Feuchtigkeit der Atmosphäre. München 1862. Formel S. 32:

$$h = 18404{,}9\,(1 + 0{,}0026\,\cos 2\,\psi)\left(1 + \frac{2z + h}{r}\right)\left(1 + \frac{3}{8}\,\varphi\right)(1 + 0{,}003665\,\tau) \times$$
$$\left[\log\frac{B}{b} + \log\left(1 - \frac{T' - t'}{5550}\right) + 0{,}86859\,\frac{h}{r}\right]$$

Die letzte Klammer setzt Quecksilber-Barometerstände B und b voraus, deren Schwere-Korrektion, wie bei *Laplace*, in dem Gliede $0{,}86859\,\frac{h}{r}$ enthalten ist, und für welche ausserdem eine Reduktion für die *Quecksilber*-Temperaturen T' und t' beigegeben ist. Der Feuchtigkeits-Faktor $1 + \frac{3}{8}\,\varphi = 1 + \frac{3}{8}\,\frac{e}{Bm}$ ist wie von *Biot* behandelt, wird aber nicht mit den übrigen Gliedern vereinigt, sondern für Psychrometer-Beobachtungen besonders berücksichtigt. Die Konstanten, namentlich 18404,9, sind, gegen *Laplace* und *Biot*, durch Benützung der *Regnault*schen Bestimmungen der Luftdichte und der Quecksilberdichte u. s. w. verbessert. Die *Bauernfeind*schen Tafeln für logarithmische Rechnung gründen sich auf eine Umformung der obigen Grundformel.

1864. *Radau.* „Moniteur scientifique redigé par Quesneville, deuxième série tome I. 1864" S. 337 u. ff. giebt rohe Meereshöhen für $B_0 = 760^{mm}$; eine entsprechende Tafel mit $B_0 = 762^{mm}$ wurde nach den *Radau*schen Formeln von *Jelinek* berechnet, und in dessen „Anleitung zur Anstellung meteorologischer Beobachtungen" veröffentlicht. *Radau* betont, dass man das Glied $\left(1 + \frac{2H}{r}\right)$ der vollständigen Formel in die rohen Meereshöhen aufnehmen kann; setzt man nämlich, für die Mittelhöhe, $2H = H_1 + H_2$, so ist:

$$h = (K)\,(\log B - \log b)\left(1 + \frac{H_2 + H_1}{r}\right)$$

für den letzten Faktor ist hinreichend genau:

$$H_2 - H_1 = (K)\,(\log B - \log b),$$

folglich:

$$h = (K)\,(\log B - \log b) + \frac{H_2^2 - H_1^2}{r}$$

Nun bestimmt man eine rohe Meereshöhe:

$$H = (K)\,(\log 762 - \log B) + \frac{1}{r}\,(K)^2\,(\log 762 - \log B)^2$$

Das zweite, quadratische Glied gibt für $H = 1000^m$ nur $0{,}16^m$.

Die *Radau*schen Tafeln sind auf die *alten Laplace*schen Coëfficienten (Konstante 18336 statt 18400) gegründet, und enthalten die Schwere-Korrektion des Quecksilbers (welche für Feder-Barometer-Messungen nicht hergehörig ist).

1870. *Rühlmann.* Die barometrischen Höhenmessungen und ihre Bedeutung für die Physik der Atmosphäre. Leipzig 1870.

Die Formel 39) oder 41) S. 43–44 ist mit der *Bauernfeind*schen nahezu identisch. Die Konstante nimmt *Rühlmann* = 18400,2, der kleine Unterschied gegen 18404,9 bei *Bauernfeind* rührt her von der Berücksichtigung der Kohlensäure der Luft. Im letzten Glied hat *Rühlmann* $\frac{5}{4}\,\frac{Mh}{r}$ statt $\frac{2Mh}{r}$, um die Anziehung der Gebirgsschichten zwischen beiden Stationen zu berücksichtigen; es ist dieses aber nicht konsequent, denn die fraglichen Gebirgsschichten beeinflussen auch die Abnahme des Gewichts der Luft, welche in dem Glied $\left(1 + \frac{2z + h}{r}\right)$ zum Ausdruck kommt (vgl. *Helmert,* math. u. phys. Theorieen der höheren Geodäsie II. S. 609). Die *Rühlmann*sche Formel enthält auch, wie die *Laplace*sche und *Bauernfeind*sche Formel, die Schwere-Reduktion für das *Quecksilber*, welche für Feder-Barometer nicht gültig ist.

1871. *Weilenmann.* Vierteljahresschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich, 16. Jahrgang, S. 388.

1872. *Schoder.* Hilfstafeln zur barometrischen Höhenbestimmung nebst Anleitung zur Untersuchung und zum Gebrauch der Aneroid-Barometer. Stuttgart 1872, zweite Auflage 1874.
Barometrische Höhenstufen nach der Formel:

$$h = 15982\left(1 + 0{,}003665\,\frac{t_1 + t_2}{2}\right)\frac{b_1 - b_2}{b_1 + b_2}.$$

1873. *Schreiber.* Über die Verwendbarkeit der Aneroide von *Naudet* u. s w. Separat-Abdruck aus *Carl*s Repertorium, Band IX, Heft 4. München 1873.

1874. *Bauernfeind.* Beobachtungen und Untersuchungen über die Eigenschaften und die praktische Verwertung der *Naudet*schen Aneroid-Barometer (Abh. d. k. bayer. Akad. d. Wissensch. II. Cl. XI. Bd. III. Abtlg.). München 1874.

1874. *Reitz.* Über die Ausführung von Höhenmessungen mit dem Aneroid-Barometer-System *Reitz*, Hamburg 1874.

1875. *Schreiber.* Das Flächen-Nivellement mit Aneroid-Barometern, ausgeführt auf 5 Sektionen der kleinen Generalstabskarte des Königreichs Sachsen (Separat-Abdruck aus dem „Civilingenieur" XXI. Band, 4.—6. Heft). Leipzig 1875 (vgl. „Zeitschr. f. Verm. 1875", S. 341).

1875. *Weilenmann.* Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich, 20. Jahrgang 1875, S. 385—442.
Über ein abgeändertes Aneroid-Barometer und Beziehung zwischen Luftdruck, Temperatur und Höhe der Atmosphäre.

1875. *Kunze.* Meteorologische und Hypsometrische Tafeln. Dresden 1875.

1876. *Schmidt.* Über den praktischen Wert *Naudet*scher Aneroide, nach den Resultaten einer Anzahl vergleichender Beobachtungen. München 1876.

1876. *Jordan.* Physische Geographie und Meteorologie der libyschen Wüste. Kassel 1876. S. 82, 137, 169.

1876. *Grassi.* Untersuchungen über sprungweise Änderungen von Feder-Barometern. Meteorologia Italiana 1874. Bericht hierüber von *Vogler* in der „Zeitschr. f. Verm. 1877", S. 475—477. *Grassi* spricht 9 Sätze aus, darunter: 3) In den *Ruhe*punkten zwischen stärkeren Druckänderungen, wo, nach irgend einer Periode der Änderung, der Druck konstant erhalten wird, entsteht *ein Sprung* in der Korrektions-Kurve. 4) Dieser Sprung entsteht in ähnlicher Weise in den *Wende*punkten, wenn man von einer Druckverminderung zu einer Vermehrung des Druckes übergeht oder umgekehrt.

1876. *Grassi.* Sulla misura delle altezze mediante il barometro. Mailand 1876. (Auf S. 96 und S. 116—119 Citat *Belli*, 1827.)

1876. *Hann.* 74. Band der k. Akad. der Wissensch. II. Abtlg. Juli-Heft. Zur barometrischen Höhenmessung. Es wird im Mittel gesetzt: $1 + 0{,}377\,\frac{e}{b} = 0{,}00154 + 0{,}000341\,t$ (s. oben § 146. S. 526 bis 527).

1877. *Koppe.* Die Aneroid-Barometer von Jakob Goldschmid und das barometrische Höhenmessen. Aus dem Nachlasse des Erfinders bearbeitet von Dr. *Carl Koppe*; Zürich 1877.

1877. *Neumeyer*, Prem.-Lieutenant, Hilfstafeln für barometrische Höhenmessung. München 1877.

1877. *Jelinek.* Über die Konstanten der Aneroide und über Aneroide mit Höhenskalen. Separat-Abdruck aus dem Repertorium für Experimental-Physik und physikalische Technik. 13. Band, 1877, S. 43—93.

1877. *Schreiber.* Handbuch der barometrischen Höhenmessung. Weimar 1877.

1877. *Vogler.* Anleitung zum Entwerfen graphischer Tafeln. Berlin 1877. S. 85—147.

1877. *Vogler.* Beitrag zu den Erfahrungen über *Naudet*sche Aneroide. „Zeitschr. f. Verm. 1877", S. 475—506 sprungweise Änderungen (bis zu 1^{mm}).

1879. *Jordan.* Barometrische Höhentafeln, erste Auflage, Stuttgart 1879. Zweite Auflage, Stuttgart 1886. Rohe Meereshöhen von 630^{mm} bis 765^{mm} mit Intervall $0{,}1^{mm}$, für alle Temperatur-Grade von 5^0 bis 35^0, gegründet auf die Formel $h = 18464\,(\log 762 - \log B)\,(1 + 0{,}003665\,t)$ nach (8) § 146. S. 526.

1880. *Vogler.* Graphische Barometertafeln zur Bestimmung von Höhen-Unterschieden, von Dr. *Vogler*, entworfen von *Feld*, Braunschweig 1880.

1881. *Hartl.* Über die Temperatur-Coëfficienten *Naudet*scher Aneroide. Mitteilungen d. k. k. militär-geogr. Instituts, I. Jahrgang, Wien 1881 (abgedruckt in der „Zeitschr. f. Verm. 1882", S. 458—470).

1883. *Bauernfeind.* Neue Beobachtungen über die tägliche Periode barometrisch bestimmter Höhen, von *Carl Max v. Bauernfeind*, München 1883. (Höhensteig, Irschenberg, Kampenwand.)

1884. *Hartl.* Praktische Anleitung zum Höhenmessen mit Quecksilber-Barometern und mit Aneroiden von *Heinrich Hartl*, k. k. Major im militär-geogr. Institute. Zweite Auflage. Wien 1884.

1884. *Hann. Jelineks* Anleitung zur Ausführung meteorologischer Beobachtungen. Neu herausgegeben und umgearbeitet von Dr. *J. Hann.* Wien 1884.

1884. *Helmert.* Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie. II. Teil. Leipzig 1884.

Seite 609: „Man bleibt ... bei dem üblichen Entwicklungsgange der Formel für barometrisches Höhenmessen stehen; wir verweisen insbesondere auf *Jordan*, „Handbuch der Vermessungskunde", Bd. I. 1877, S. 493 Formel (33), welch letztere wir mit der kleinen Modifikation adoptieren, dass bei der Abhängigkeit der Schwerkraft von der geographischen Breite gemäss unseren Untersuchungen der Faktor 0,00265 anstatt 0,002573 angewendet wird. Doch sind wir völlig damit einverstanden, dass die Anziehung des Terrains nicht zu berücksichtigen ist (sowohl in (33) wie bei der Reduktion der Quecksilber-Barometerstände auf gleiche Schwerkraft); denn dieses entspricht ganz den auf S. 243 § 37. (*Helmert*) gemachten Erfahrungen. Die Formel lautet:

$$h_{1\,.\,2} = 18400\,(1 + 0{,}003665\,t)\left(1 + \frac{3\,e}{8\,b}\right)\log\frac{p_1}{p_2}\,(1 + 0{,}00265\cos 2\,B)\left(1 + \frac{2\,H}{R}\right)$$

Hierin sind p_1 und p_2 die in absolutem Masse gemessenen Luftdrücke für die Flächeneinheit an den beiden, zunächst in derselben Vertikalen gedachten Stationen, ferner sind B, H, t und $e:b$ bzw. die mittlere geographische Breite, mittlere Meereshöhe, mittlere Lufttemperatur in Centisimalgraden und mittleres Verhältnis des Dunstdruckes zum Barometerstand."

1887. *Reinhertz.* Über die elastische Nachwirkung beim Feder-Barometer. Zeitschr. f. Instrumentenkunde, 1887, S. 153, 189.

1887. *Hann.* Die Verteilung des Luftdrucks über Mittel- und Süd-Europa, auf Grundlage der 30jährigen Monats- und Jahres-Mittel 1851—1880. Wien 1887.

1888. *Koppe.* Die Verfahren der Ausführung und der Berechnung barometrischer Höhenaufnahmen. Zeitschr. des Hann. Arch.- u. Ing.-Vereins, 1888. Heft 6.

Kapitel XIII.

Distanzmesser.

§ 155. Erklärungen.

Unter Distanzmesser versteht man ein Instrument, mit Hilfe dessen man von *einem* Standpunkt aus eine Entfernung bestimmen kann.

Ausser in dieser ersten Bedeutung wird die Benennung Distanzmesser zuweilen auch gebraucht zur Bezeichnung eines Instrumentes, mit Hilfe dessen man eine Entfernung bestimmen kann, ohne eine im Vergleiche mit dieser Entfernung erhebliche Ortsveränderung vornehmen zu müssen.

Jedenfalls ist die Anwendung des Distanzmessers von dem *Begehen* der zu bestimmenden Entfernung unabhängig. Die *Genauigkeit* der Distanzmesser-Bestimmungen ist im allgemeinen eine geringere, als die durch unmittelbares Messen mit Messlatten u. s. w. erreichbare Genauigkeit; dagegen hat andererseits die „Distanzmessung" den Vorzug der Bequemlichkeit und raschen Ausführung.

Der Distanzmesser wird stets an dem einen Endpunkte der zu messenden Entfernung aufgestellt, und je nachdem in dem anderen Endpunkte ebenfalls ein Werkzeug, nämlich eine geteilte *Latte* aufgestellt werden muss, oder nicht, unterscheidet man:

Distanzmesser mit Latte,
Distanzmesser ohne Latte.

Die *Latte* ist ein etwa 3—5^{m} langer hölzerner Massstab, welcher beim Gebrauch gewöhnlich vertikal gestellt wird. Die Distanzmesser mit Latte sind im allgemeinen genauer als diejenigen ohne Latte; bei den letzteren wird jedoch auf die Latte verzichtet, um das zeitraubende, und in manchen Fällen (z. B. beim militärischen Distanzmesser) gänzlich ausgeschlossene Aufstellen der Latte auf dem zu bestimmenden Endpunkt zu vermeiden.

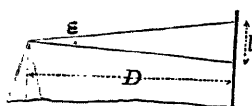
Allen Distanzmessern mit Latte liegt das einfache Gesetz zu Grunde, dass ein Gegenstand dem beobachtenden Auge um so kleiner erscheint, je weiter er entfernt ist.

Fig. 1.
Distanz-Dreieck.

Die Entfernung wird hiebei bestimmt aus einem langgestreckten Dreieck, dessen Basis ein Stück l der Latte ist. Nach Fig. 1. besteht die Beziehung:

$$D = \frac{l}{\varepsilon} \text{ oder } = \frac{l}{\varepsilon''}\varrho''$$

wenn ε in analytischem Masse, oder ε'' entsprechend in Sekunden gerechnet ist.

Bei den Distanzmessern ohne Latte wird die Basis, ohne welche keine geometrische Distanzmessung denkbar ist, meist in das Instrument selbst verlegt, und die Basis ist dann gewöhnlich sehr klein (daher auch die geringere Genauigkeit) oder es wird eine kleine Basis durch Verstellen des Instrumentes gewonnen (vgl. die Eingangs gegebene erweiterte Definition des Distanzmessers), wodurch man natürlich die Genauigkeit erheblich steigern kann, wobei es aber zweifelhaft ist, ob das ganze Verfahren den Namen „Distanzmessung" verdient und nicht vielmehr als Triangulierung zu bezeichnen wäre.

Die Distanzmesser ohne Latte dienen fast auschliesslich militärischen Zwecken.

Ein neuer Grundsatz für Distanzmessung dürfte schwerlich noch aufzufinden sein, und die vielen „neuen Erfindungen“ auf diesem Gebiet geben, wenn sie auch als „neu und eigentümlich“ patentiert sind, doch in der Regel nur bekannte Dinge in neuen Ausführungen.

§ 156. Distanzmessung durch den parallaktischen Winkel.

Wir betrachten wieder das langgestreckte nahezu gleichschenklige Dreieck Fig. 1., in welchem aus der kurzen Linie l eine grosse Entfernung D abgeleitet wird durch Vermittlung des kleinen Winkels ε, nach der Gleichung:

$$D = \frac{l}{\varepsilon} \qquad (1)$$

Fig. 1.
Parallaktischer Winkel ε.

Wir wollen verschiedene Anwendungen des hierin liegenden Grundsatzes betrachten.

I. Die Entfernungs-Schätzungen beruhen meist auf dem Grundsatz dieser Gleichung, indem man aus der scheinbaren Winkelgrösse ε eines Gegenstandes von bekannter linearer Ausdehnung auf die Entfernung schliesst.

So wird namentlich die scheinbare Höhe eines Menschen zur Entfernungs-Schätzung benutzt.

Denken wir uns nach Fig. 2. einen Mann von der Höhe $H = 1{,}667^m$, in der Entfernung E, so wird er in dem Abstand $e = 0{,}6^m$ von dem beobachtenden Auge die scheinbare Höhe h haben, entsprechend der Gleichung:

$$h = \frac{e}{E} H = \frac{1{,}00}{E} \qquad (2)$$

Fig. 2.
Scheinbare Höhe h.

Hiernach ist folgendes berechnet:

E	h	E	h	E	h
10^m	100^{mm}	60^m	$16{,}7^{mm}$	100^m	$10{,}0^{mm}$
20	50	70	14,3	200	5,0
30	33	80	12,5	300	3,3
40	25	90	11,1	400	2,5
50	20	100	10,0	500	2,0

(3)

Man kann hievon manchen praktischen Gebrauch zu Schätzungen machen, indem man z. B. die Höhen h mit den beigeschriebenen Entfernungen E nach (3), an dem Rande des Feldschreibbuchs oder an einem Bleistift u. s. w. aufträgt u. s. w.

Zu wirklichen Messungen übergehend, haben wir zuerst zu erwähnen:

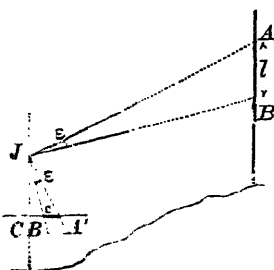
II. Der Faden-Distanzmesser. Man hat in einem Fernrohr zwei feste horizontale Fäden ausgespannt, und betrachtet damit eine entfernt stehende lotrechte Latte. Wenn die Latte entfernt steht, so erscheint sie klein, und man sieht ein grosses Stück derselben zwischen den Fäden; kommt die Latte näher, so erscheint sie grösser und das zwischen den Fäden gefasste Stück derselben wird kleiner. Die Entfernung ist nahezu proportional dem fraglichen Lattenteil l, welcher zwischen den Fäden erscheint, und der Winkel ε (Fig. 1.) ist nahezu konstant.

Dieses ist im wesentlichen der Grundsatz des Faden-Distanzmessers, dessen Theorie wir in § 157. ausführlich behandeln werden.

Dieser Faden-Distanzmesser, welcher heute eines der gebräuchlichsten Feldmess-Instrumente ist, wurde, wie es scheint, am Anfang dieses Jahrhunderts von *Reichenbach* in München oder *Porro* in Mailand erfunden.

Was an geschichtlichen Angaben hiefür zu finden war, haben wir in der „Zeitschr. des Hannov. Ing.- u. Arch.-Vereins 1884", S. 456—457 mitgeteilt. Ein inzwischen erschienenes italienisches Werk: „Istrumenti e methodi moderni di geometria applicata per *Angelo Salmoiraghi*, Direttore dell'officina detta la filotecnica fondata in Milano dal Prof. *Porro*, Milano 1884" giebt auf S. 282, nicht wie zu erwarten war, eine Originalmitteilung über *Porros* Erfindung, sondern beruft sich hiefür auf unsere in Deutschland gesammelten Notizen.

Nach diesem können wir *Reichenbach* in München als Erfinder betrachten.

Fig. 3.
Kontakt-Distanzmesser.

III. Kontakt-Distanzmesser. In Fig. 3. sind JA und JB zwei Ziellinien nach den Punkten A und B einer Latte, und es kann der Winkel $AJB = \varepsilon$ dadurch *konstant* gemacht werden, dass man das Fernrohr für die Zielungen JA und JB an zwei feste Punkte anschlagen lässt.

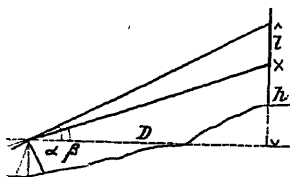
Statt der Fernrohr-Lagen JA und JB selbst kann man auch einen mit dem Fernrohr fest verbundenen Hebel JA' und JB' gegen zwei feste Punkte A' und B' anschlagen lassen, denn das giebt für den Winkel ε dieselbe Wirkung.

Unsere Fig. 3. zeigt jedoch in den Linien JA' und JB' nicht die Anordnung für *konstantes* ε, sondern eine von *Sanguet* in sinnreicher Weise so getroffene Abänderung, dass bei *geneigten* Zielungen sofort die Distanz-Reduktion auf den Horizont erhalten wird; es wird nämlich bei geneigter Zielung der Winkel ε dadurch verkleinert, dass der Anschlag des Hebels JA' bzw. JB' stets ein Stück $A'B' = c$ zwischen sich fasst, welches in *horizontalem* Sinne, in der Geraden $CB'A'$, konstant ist. (Weiteres s. Société d'encouragement pour l'industrie nationale, Rapport par *Benoit* sur un instrument de géométrie pratique etc. par *M. Sanguet*, Paris 1866.)

IV. Der Höhenkreis als Distanzmesser. Man kann offenbar den Winkel ε (Fig. 1. S. 555) durch einen Höhenkreis mit einem Fernrohr messen, wobei der Wert ε als Differenz zweier Höhenwinkel erscheint.

Zur See hat man für solche Zwecke den Sextanten, den man nach Umständen auch zu Lande gebrauchen kann, oder im Binnenlande bei Fluss- und See-Aufnahmen.

Zur Berechnung der Entfernungen aus unmittelbar gemessenen Winkeln ε haben wir im Anhang Seite [37] eine Hilfstafel zusammengestellt (teils nach eigenen Berechnungen, teils nach dem „Handbuch der nautischen Instrumente" Berlin 1882, S. 347—349).

Fig. 4.

Wenn man die Höhenwinkel mit dem Theodolit misst, so kann man auch erhebliche Neigungen α und β streng berücksichtigen; man hat nämlich nach Fig. 4.:

$$h = D \tan \beta \qquad h + l = D \tan \alpha$$

woraus man findet:

$$D = \frac{l}{tang\,\alpha - tang\,\beta} \text{ oder } = \frac{l \cos\alpha \cos\beta}{\sin(\alpha - \beta)} \tag{4}$$

Wenn es weniger um die Entfernungen als um die *Höhen* zu thun ist, ist dieses Verfahren ganz gut, man hat dann die zwei Gleichungen:

$$h = \frac{l\,tang\,\beta}{tang\,\alpha - tang\,\beta} \qquad h + l = \frac{l\,tang\,\alpha}{tang\,\alpha - tang\,\beta} \tag{5}$$

Zur Probe wird man nach diesen beiden Gleichungen rechnen.

Nach unseren Erfahrungen kann man auf diese Weise mit Vorteil sehr rasch eine Nivellierung über Berge und Thäler hinweg ausführen. Die Mühe der Rechnung kommt bei den übrigen Vorteilen nicht in Betracht.

V. Schrauben-Distanzmesser. Man kann den kleinen Winkel ε, den man zur Distanzmessung braucht, auch durch eine senkrechte Schraube messen, wenn man damit eine Vorrichtung verbindet, um die Zahl der Umdrehungen und die Unterabteilungen der Umdrehungen scharf zu bestimmen.

Solche Schrauben-Instrumente hat namentlich *Stampfer* in Wien verfertigt, und in dem Buche beschrieben: „Anleitung zum Gebrauche der verbesserten Nivellier-Instrumente u. s. w. von *S. Stampfer*, Wien 1839“, dann „Theoretische und praktische Anleitung zum Nivellieren, Wien 1845, und siebente Auflage, Wien 1872“.

Die Beziehungen zwischen den Schrauben-Umdrehungen und dem Winkel ε, oder auch sogleich zwischen den Schrauben-Umdrehungen und der Entfernung E muss durch Versuche mit einer Latte in bekannter Entfernung gefunden werden.

Wir haben früher eine solche Untersuchung mit einem Schrauben-Instrument der Stuttgarter technischen Hochschule durchgeführt (Konstruktion nach *Koristka*); die Latte wurde im Abstand 115,842 württb. Fuss = 33,187^m vom Instrument vertikal aufgestellt und von Zoll zu Zoll (1 Zoll = 0,0286^m) viermal auf und ab mit dem Fernrohr durchgegangen, und jedesmal die Schraube abgelesen. Die Ausgleichung gab für den von der Horizontalen an gezählten Winkel ε die Gleichung:

$$\varepsilon = 852{,}73\,n + 0{,}015\,n^2 \tag{6}$$

wenn ε in Sekunden und n in ganzen Umdrehungen der Schraube gezählt ist. $n = 0$ entspricht der horizontalen Ziellinie. Von Seiten der Wiener Werkstätte war angegeben:

$$\varepsilon = 854{,}19\,n + 0{,}036\,n^2.$$

Die Schraube gestattet $n = 28$ Umdrehungen im ganzen, $n = 14$ giebt $0{,}02\,n^2 = 3{,}9''$. Für Distanzmessung wird es genügen zu setzen:

$$E = \frac{l}{\varepsilon}\,\varrho = \frac{206265}{854\,n}\,l = 241{,}53\,\frac{n}{l} \tag{7}$$

wornach eine Entfernungstabelle berechnet werden kann.

Die gewöhnlichen Schrauben-Instrumente haben nur einen kleinen Spielraum von wenigen Graden auf- und abwärts. Mechaniker *Hahn* hat ein solches Schrauben-Instrument konstruiert, welches Höhenwinkel bis zu 45° zu messen gestattet (s. „Zeitschr. f. Verm. 1875“, S. 362—365).

Man kann die Mikrometerschraube auch dazu verwenden, dass man einen Faden im *Gesichtsfelde des Fernrohrs* auf und nieder schraubt, und dadurch auf zwei verschiedene Lattenpunkte einstellt. Dieses geschieht bei dem *Meyerstein*schen Distanz-

messer. (*Hunäus*, „Die geometrischen Instrumente", Hannover 1864, S. 379 und 591, in mehreren Ausführungen in der Hannov. Sammlung.)

Die Schrauben-Distanzmesser sind einer grossen Genauigkeit fähig, wie schon *Stampfer* durch Versuche gezeigt hat. Diese Genauigkeit ist aber im freien Feld kaum zu erreichen, denn das ganze Verfahren leidet an dem Übelstand, dass die Latte so ruhig gehalten werden muss, dass sie zwischen der Einstellung auf den unteren und den oberen Zielpunkt (Zielscheibe) ihre Lage nicht verändert, was von freier Hand nicht genügend zu erreichen ist. Die Distanzmessung mit der Schraube nimmt ferner sehr viel *Zeit* in Anspruch, und ist deswegen wenig im Gebrauch der Feld- und Landmessung.

Genauigkeits-Verhältnisse.

Auch ohne die Konstruktion im einzelnen zu kennen, kann man bei allen Distanzmessern, welche auf dem Grundsatz des parallaktischen Winkels ε beruhen, über die erreichbare Genauigkeit einige allgemeine Sätze aussprechen. Jedenfalls handelt es sich entsprechend Fig. 5. um eine Gleichung von der Form:

Fig. 5.
Distanz-Dreieck.

$$E = \frac{b}{\varepsilon} \tag{8}$$

wenn ε in analytischem Masse gezählt ist.

Nun sind von vornherein zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich:

Fall 1) Winkel ε konstant und Basislänge b als veränderlich gemessen.

Fall 2) Basislänge b konstant und der Winkel ε veränderlich gemessen.

Der erste Fall findet statt bei dem *Faden-Distanzmesser*, den wir oben bei II. S. 555 nur im allgemeinen besprochen haben, und mit dem wir uns später in § 157. und § 161. ausführlicher zu beschäftigen haben werden.

Den zweiten Fall hat man bei den vorhin unter IV. und V. erwähnten Höhenwinkel- und Schrauben-Instrumenten, wenigstens innerhalb gewisser Grenzen.

Diesen zweiten Fall werden wir auch später bei Distanzmessern ohne Latte haben.

Wenn etwa ε und b in den *beiden* unterschiedenen Fällen *gleich* sind, dann ist es allerdings gleichgültig, ob man den Fall 1) oder 2) annehmen will, lässt man aber von da an die Entfernung wachsen, so muss der Fall 1) in den Vorteil kommen, weil hier mit wachsender Entfernung auch die Basis b, auf welche alles ankommt, wächst.

Alles dieses zeigt sich mathematisch, wenn man die Gleichung (8) nach b oder nach ε differentiert.

Im ersten Falle hat man die Funktion (8) nach b zu differentieren, also:

$$\text{Fall 1)} \qquad d\,E = \frac{1}{\varepsilon}\,d\,b \tag{9}$$

Der Lattenfehler $d\,b$ ist proportional der Entfernung E selbst anzunehmen, etwa $d\,b = \pm E\,\delta$, wo δ der Zielfehler in analytischem Winkelmass ist. Damit giebt (9):

$$\text{Fall 1)} \qquad d\,E = \pm\,\frac{\delta}{\varepsilon}\,E \tag{10}$$

Im zweiten Falle hat man die Funktion (8) nach ε zu differentieren, d. h.:

$$\text{Fall 2)} \qquad d\,E = -\frac{b}{\varepsilon^2}\,d\,\varepsilon \tag{11}$$

Hier kann man wieder, nach (8), $\frac{1}{\varepsilon} = \frac{E}{b}$ setzen, und indem man $d\,\varepsilon$ mit unbestimmtem Vorzeichen $= \pm\,\delta$ nimmt, hat man aus (11):

$$\text{Fall 2)} \qquad d\,E = \pm\frac{\delta}{b}\,E^2 \tag{12}$$

Man kann nun nach (10) und (12) allgemein aussprechen: Im ersten Falle, wenn ε konstant und l veränderlich gemessen ist, wächst der Distanzfehler $d\,E$ proportional der Entfernung E (und kann also z. B. in Prozenten der Entfernung E ausgedrückt werden). Im zweiten Falle, wenn l konstant ist und der parallaktische Winkel ε als veränderlich gemessen wird, wächst der Entfernungsfehler $d\,E$ proportional dem *Quadrat* der Entfernung E.

§ 157. Optische Theorie des Faden-Distanzmessers.

Nachdem der Grundsatz, auf dem der Faden-Distanzmesser beruht, schon in § 156. S. 555 im ganzen angegeben ist, haben wir nun zuerst die Einrichtung des Fernrohrs näher zu betrachten, und dann die Theorie zu entwickeln.

Fig. 1. Fig. 2.
Fadennetz des Distanzmesser-Fernrohrs.

Die Einrichtung des distanzmessenden Fernrohrs unterscheidet sich von der Einrichtung eines gewöhnlichen Theodolit-Fernrohrs (s. § 41.—45. S. 118—131) nur dadurch, dass an Stelle eines einfachen Fadenkreuzes (vgl. S. 119) ein Netz mit wenigstens zwei parallelen Horizontalfäden angebracht ist. Die gewöhnlichste Form eines solchen Netzes ist Fig. 1. mit einem gewöhnlichen Fadenkreuz, wozu noch zwei Fäden O und U parallel dem Horizontalfaden M hinzugefügt sind. Man kann mit diesen Fäden in zweifacher Weise Distanzen messen, nämlich mit dem ganzen Fadenabstand $O\,U = p$, oder mit dem halben Abstand $O\,M = M\,U = \frac{1}{2}\,p$.

Auch Fig. 2. hat im wesentlichen dieselbe Anordnung; statt eines Mittelfadens M sind zwei Fäden M' und M'' angenommen, damit keine Verwechslung der Fäden stattfinden kann.

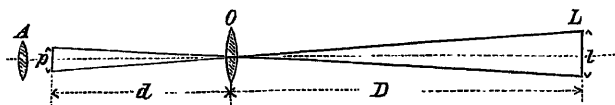
Nach dieser Vorbemerkung über das Fadennetz gehen wir zu der optischen Theorie über, und werden den (linear gemessenen) Parallelabstand p der Fäden von Fig. 1. in den nachfolgenden Figuren 3., 4. und 5. wieder finden.

Die optische Theorie gestaltet sich verschieden, je nach der Einrichtung des *Oculars*, und dem entsprechend werden wir im Folgenden drei verschiedene Fälle zu behandeln haben.

I. Einfaches Fernrohr.

An derjenigen Stelle des Fernrohrs, an welcher das Bild entsteht, sind zwei parallele Fäden im Abstand p aufgespannt, welche zusammen mit dem Lattenbild durch

das Okular A betrachtet werden. (Dieses Okular A geht in die Theorie nicht ein.) Wenn dann O das Objektiv mit der Brennweite f, und L die Latte ist, von welcher

Fig. 3.
Einfaches Fernrohr.

ein Stück l zwischen den Fäden gesehen wird, wenn ferner D und d die Abstände der Latte und der Fäden von dem Objektiv O sind, so hat man nach Fig. 3. zwei Gleichungen:

$$\frac{p}{d} = \frac{l}{D} \quad \text{und} \quad \frac{1}{D} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f} \tag{1}$$

Aus diesen beiden Gleichungen ist die veränderliche Entfernung d zu eliminieren; hiezu rechnet man:

$$\frac{1}{d} = \frac{l}{Dp} \quad , \quad \frac{1}{d} = \frac{1}{f} - \frac{1}{D} = \frac{D-f}{Df}$$

Diese beiden Gleichungen zusammen geben:

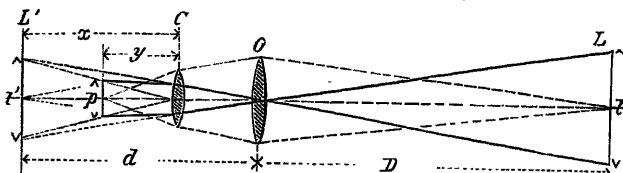
$$D - f = \frac{f}{p} l \tag{2}$$

Hiernach ist $D - f$ proportional l. $D - f$ ist der Abstand der Latte von dem vorderen Brennpunkte des Objektivs, und dieser Abstand (und nicht D selbst) ist also proportional dem Lattenabschnitt l.

Diese Gleichung (2) gilt nicht bloss für das einfache Fernrohr, für welches sie zunächst entwickelt worden ist, sondern auch für das *Ramsden*sche Fernrohr (§ 43. S. 128), weil die *beiden* Okularlinsen des *Ramsden*schen Fernrohrs in die Distanzmesser-Theorie gar nicht eingehen, ebenso wie in Fig. 3. beim einfachen Fernrohr die Okularlinse A ebenfalls zu der Gleichung (2) nichts beigetragen hat.

II. *Huyghens*sches *Fernrohr* (Fig. 4.)

Zwischen dem Objektiv O und dem durch p angedeuteten Fadennetz befindet sich eine weitere Linse C (Kollektiv-Linse), welche bei den Einstellungen auf verschiedene Zielweiten einen unveränderlichen Abstand y von dem Fadennetz behält.

Fig. 4.
*Huyghens*sches Fernrohr (y konstant).

Wenn die Kollektivlinse C nicht vorhanden, sondern nur das Objektiv O wirksam wäre, so würden die von der Latte L ausgehenden Strahlen ein Bild bei L' er-

zeugen, dessen Grösse l' mit der Lattengrösse l selbst und den beiden Entfernungen d und D die Gleichung giebt:

$$\frac{l'}{d} = \frac{l}{D} \tag{3}$$

Zugleich hat man, wenn f die Brennweite des Objektives ist, die Gleichung:

$$\frac{1}{D} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f} \tag{3a}$$

Infolge des Dazwischentrittes der Kollektivlinse C kommt aber das Bild l' in Wirklichkeit nicht zu Stande, sondern ein anderes Bild von der Grösse p; die beiden Bilder l' und p sind jedoch in Bezug auf die Linse C konjugiert, und geben deshalb Gleichungen von ähnlicher Form wie die vorstehenden (3) und (3a) nämlich zusammen, wenn f' die Brennweite der Kollektivlinse C ist:

$$\frac{l'}{x} = \frac{p}{y} \quad \text{und} \quad -\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f'} \tag{4}$$

Aus den 4 Gleichungen (3), (3a) und (4) sind die Grössen d, x und l' zu eliminieren. Man eliminiert zuerst d aus (3) und (3a), und erhält:

$$\frac{1}{d} = \frac{l}{l'}\frac{1}{D} = \frac{1}{f} - \frac{1}{D} = \frac{D-f}{Df}$$

$$D - f = \frac{f}{l'}\,l \tag{5}$$

Ebenso wird x aus den beiden Gleichungen (4) eliminiert:

$$\frac{1}{x} = \frac{p}{y\,l'} = \frac{1}{y} - \frac{1}{f'} = \frac{f'-y}{f'y}$$

$$\frac{1}{l'} = \frac{f'-y}{f'p} = \frac{1}{p}\left(1 - \frac{y}{f'}\right) \tag{6}$$

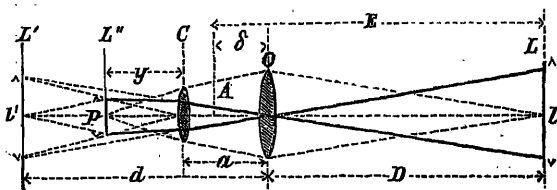
Nun geben die Gleichungen (5) und (6) zusammen:

$$D - f = \frac{f}{p}\left(1 - \frac{y}{f'}\right) l \tag{7}$$

III. Porros Fernrohr.

Das *Porro*sche Fernrohr, dessen Anordnung in Fig. 5. angedeutet ist, hat ebenso wie das *Huyghens*sche Fernrohr, zwischen dem Objektiv O und dem Faden-Netze L'' eine

Fig. 5.

*Porro*s Fernrohr (a konstant, y veränderlich).

Kollektivlinse C eingeschaltet, welche aber nun einen konstanten Abstand a von dem Objektiv behält, so dass beim Einstellen auf verschiedenen Zielweiten der Abstand y

gegen das Fadennetz sich ändert (während beim *Huyghens*schen Fernrohr umgekehrt y konstant und a veränderlich war).

Für die Theorie haben wir nun wieder zwei Paare von Gleichungen:

$$\text{Linse } O \text{ giebt:} \quad \frac{l'}{d} = \frac{l}{D} \quad \text{und} \quad \frac{1}{D} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f} \tag{8}$$

$$\text{Linse } C \text{ giebt:} \quad \frac{l'}{d-a} = \frac{p}{y} \quad \text{und} \quad -\frac{1}{d-a} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f'} \tag{9}$$

Aus diesen 4 Gleichungen sollen die Grössen l', d und y eliminiert werden. Wir eliminieren zuerst d aus (8):

$$\frac{1}{d} = \frac{l}{l'D} = \frac{1}{f} - \frac{1}{D} = \frac{D-f}{Df}$$

$$D - f = \frac{f}{l'} l \tag{10}$$

Ebenso wird y aus (9) eliminiert:

$$\frac{1}{y} = \frac{l'}{p(d-a)} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{d-a} = \frac{d-a+f'}{f'(d-a)}$$

$$\frac{1}{l'} = \frac{f'}{p} \frac{1}{d-a+f'} \tag{11}$$

Um hieraus d zu entfernen, hat man aus der zweiten Gleichung von (8):

$$d = \frac{Df}{D-f}$$

Damit wird der Nenner von (11) so geformt:

$$d - a + f' = \frac{Df}{D-f} - a + f' = \frac{D(f+f'-a) + f(a-f')}{D-f} \tag{12}$$

Nun geben (10), (11) und (12) zusammen:

$$D - f = \frac{ff'}{p} l \frac{D-f}{D(f+f'-a) + f(a-f')}$$

$$D = -\frac{f(a-f')}{f+f'-a} + \frac{ff'}{f+f'-a} \frac{1}{p} l \tag{13}$$

Um nun die Gleichungen (2), (7) und (13), welche wir für unsere drei Fälle I., II. und III. gefunden haben, unter einen Gesichtspunkt zu bringen, wollen wir noch statt der Entfernung D, welche von der Latte zu der Objektivmitte gezählt ist,

Fig. 6.

$E = D + \delta$, $D - f = E - c$.

eine Entfernung E von der Latte bis zu der Fernrohrmitte einführen, d. h. nach Fig. 5. und Fig. 6:

$$E = D + \delta$$

wobei δ etwa gleich der halben Fernrohrlänge oder meist rund $\delta = 0{,}5\,f$ gesetzt werden kann. Damit bekommen wir:

I. Einfaches Fernrohr (2) $$E = \delta + f + \frac{f}{p}\,l \tag{14}$$

II. *Huyghens*sches Fernrohr (7) $$E = \delta + f + \frac{f}{p}\left(1 - \frac{y}{f'}\right) l \tag{15}$$

III. *Porro*sches Fernrohr (13) $$E = \delta - \frac{f(a - f')}{f + f' - a} + \frac{f f'}{f + f' - a}\,\frac{1}{p}\,l \tag{16}$$

Diese drei Gleichungen haben eine gemeinsame Form:

$$E = c + k\,l \tag{17}$$

Hiezu muss man den Konstanten c und k für die drei betrachteten Fernrohr-Konstruktionen folgende Bedeutungen geben:

I. Einfaches u. *Ramsden*sches Fernrohr $$c = \delta + f = 1{,}5\,f \;,\quad k = \frac{f}{p} \tag{18}$$

II. *Huyghens*sches Fernrohr $$c = \delta + f = 1{,}5\,f \;,\quad k = \frac{f}{p}\left(1 - \frac{y}{f'}\right) \tag{19}$$

III. *Porro*sches Fernrohr $$c = \delta - \frac{f(a - f')}{f + f' - a} \;,\quad k = \frac{f f'}{f + f' - a}\,\frac{1}{p} \tag{20}$$

Betrachten wir zuerst die Werte c, so sind diese:

1) für das einfache (und *Ramsden*sche) und 2) für das *Huyghens*sche Fernrohr $= \delta + f$, d. h. etwa $= 1{,}5\,f$, in runder Zahl etwa $= 0{,}5$ Meter;

3) bei dem *Porro*schen Fernrohr ist $c = \delta - \dfrac{f(a - f')}{f + f' - a}$ und das kann $=$ *Null* gemacht werden; z. B. bei den von *Starke* in Wien hergestellten Fernröhren ist (nach einer Mitteilung von *Tinter*, in der „Zeitschr. d. österr. Ing.- und Arch.-Vereins 1873“, Heft III): $f = 345^{mm}$, $f' = 126^{mm}$, $a = 237^{mm}$, $\delta = 163{,}7^{mm}$ womit in der That nach (20) $c = 0$ wird.

Hierin, d. h. in $c = 0$, besteht die Haupteigenschaft des *Porro*schen Fernrohrs. Man hat denjenigen Punkt, von welchem aus die Entfernungen E den Lattenabschnitten l proportional sind, den *anallatischen* Punkt genannt; und das *Porro*sche Fernrohr hat also den Vorzug, dass der anallatische Punkt in der Fernrohr-*Mitte* liegt. Im übrigen jedoch, d. h. in Hinsicht auf Schärfe des Fernrohrbildes und Genauigkeit der Distanzmessung hat das *Porro*sche Fernrohr keinen Vorzug vor dem *Huyghens*schen oder *Ramsden*schen Fernrohr.

Anmerkung.

Man kann die Theorie des *Porro*schen Fernrohrs, welche wir in den vorstehenden Gleichungen (8)—(13) mit Fig. 5. unmittelbar entwickelt haben, auch mittelbar begründen, wenn man die Sätze über die Haupt- und Knotenpunkte für zwei Linsen, nach § 42. S. 125, als bekannt voraussetzt.

Wenn in Fig. 7. S. 564 zwei Linsen mit den Brennweiten f und f' zusammenwirken, so dass die Latte l ein Bild p liefert, so bestehen die Haupt- und Knotenpunkte H und H' welche mit den eingeschriebenen Massen folgende zwei Gleichungen liefern:

$$\frac{p}{d + v} = \frac{l}{D + u} \quad \text{und} \quad \frac{1}{d + v} + \frac{1}{D + u} = \frac{1}{f''} \tag{21}$$

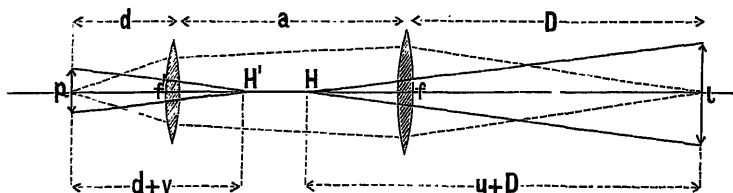
Wenn man hieraus $d+v$ eliminiert, so erhält man:

$$\frac{1}{d+v} = \frac{l}{(D+u)\,p} = \frac{1}{f''} - \frac{1}{D+u} = \frac{D+u-f''}{f''\,(D+u)}$$

$$D+u-f'' = \frac{f''}{p}\,l \tag{22}$$

Dabei haben nach S. 125, f'' und u folgende Bedeutungen:

$$f'' = \frac{f f'}{f+f'-a} \qquad u = \frac{a f}{f+f'-a} \tag{23}$$

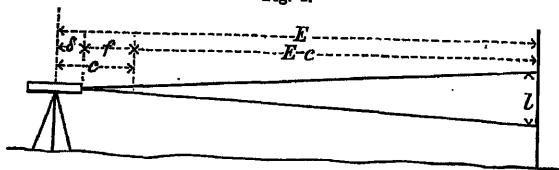
Fig. 7.

Setzt man dieses (23) in (22), so erhält man dieselbe Gleichung wie vorher (13). Die Grösse f'' nach (23) wurde früher (S. 125) die „äquivalente Brennweite“ des Systems der Linsen f und f' genannt; und in Hinsicht auf die Konstante k wirkt in der That das *Porro*sche Distanzmesser-Fernrohr wie ein einfaches Fernrohr mit der einzelnen Brennweite f''.

§ 158. Bestimmung der Konstanten des Faden-Distanzmessers.

Nach der im vorigen § 157. entwickelten Theorie handelt es sich immer um eine Gleichung von der Form:

$$E = c + k\,l \tag{1}$$

Nach Andeutung von Fig. 1. ist E die Entfernung der Latte von der Fernrohrmitte, und c ist eine kleine konstante Länge von höchstens 1^m; l ist das zwischen den

Fig. 1.

Distanzmesserfäden erscheinende Stück der Latte, und k ist eine Multiplikations-Konstante, welcher man am besten einen runden Zahlenwert, z. B. $k = 100$, geben wird.

Wir werden uns nun mit der Bestimmung der Konstanten c und k der Gleichung (1) beschäftigen, und zwar mit drei verschiedenen Fällen:

I. Bestimmung der Additions-Konstanten c.

Wenn man die optischen Verhältnisse eines Distanzmesser-Fernrohrs kennt, so ist die Bestimmung von c leicht zu machen. Für ein einfaches *Ramsden*sches und

*Huyghens*sches Fernrohr ist $c = f + \delta$ (nach (18) und (19) § 157. S. 563), wo f die Brennweite des Objektivs, und δ etwa die halbe Fernrohr-Länge ist, d. h. sehr nahe $\delta = 0{,}5\,f$, also $c = 1{,}5\,f$.

Die Objektiv-Brennweite f kann man jedenfalls für diesen Zweck hinreichend genau dadurch bestimmen, dass man mit der Objektiv-Linse ein scharfes Sonnenbild erzeugt, und dessen Abstand f von der Linse auf 1^{cm} genau misst. Oder beim *Ramsden*schen Fernrohr hat man einfach das Fernrohr auf unendliche Entfernung einzustellen, dann ist der Abstand des Faden-Netzes vom Objektiv gleich der gesuchten Brennweite f.

Bei unseren Hannoverschen Tachymetern mit *Huyghen*schen Okularen ist $f = 38^{cm}$, $\delta = 19^{cm}$, also $c = 57^{cm}$.

Kann man sich darauf verlassen, dass man ein richtiges *Porro*sches Fernrohr hat, so ist $c = 0$, und das ist der einfachste Fall.

Wenn man aber über die optische Natur des Fernrohrs etwa nicht im klaren ist, wenn man z. B. nicht sicher ist, ob ein angeblich *Porro*sches Fernrohr wirklich seinen anallatischen Punkt in der Fernrohr*mitte* hat, dann muss man c und k gemeinsam bestimmen, wie wir nachher beim Fall III. zeigen werden.

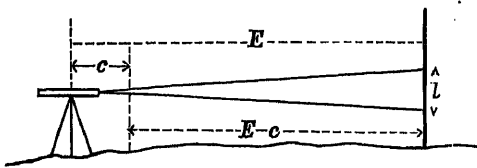
II. Bestimmung der Multiplikations-Konstanten k.

Wenn man die Linsen-Brennweiten und alle Dimensionen des Distanz-Fernrohrs genau wüsste, so könnte man nach den Formeln (18), (19), (20) § 157. S. 563 die Konstante k in jedem Falle berechnen; das wäre aber nicht genau, und ist nur etwa zur Klarmachung des Zusammenhangs zwischen k, f, f', p u. s. w. zum Unterricht zu empfehlen.

Die praktische Bestimmung von k geschieht immer durch Vergleichung unmittelbar gemessener Entfernungen E mit den entsprechenden Distanzmesser-Angaben, wie in Fig. 1. angedeutet ist.

Fig. 1.

In der nachfolgenden Tabelle wird ein Zahlen-Beispiel hiezu gegeben, für das Hannoversche Instrument I., mit $c = 0{,}57^{m}$. Die Anordnung wurde nach Fig. 1. gemacht, d. h. zuerst $c = 0{,}57^{m}$ von der Instrumentenmitte nach vorn abgesetzt und $E - c$ in runden Zahlen, $= 50^{m}, 100^{m}, 150^{m}, 200^{m}$ mit Messlatten abgemessen.

Auf der so eingeteilten Geraden wurde die Distanzlatte fünfmal hin und her geschickt, und dabei je viermal unabhängig abgelesen.

$E-c$	Latten-Ablesungen (1)	(2)	(3)	(4)	(5)	Mittel l	$\frac{100\,l}{E-c}$	v	v^2	
m	m	m	m	m	m	m				
50	0,501	0,501	0,501	0,502	0,500	0,5010	1,0020	−5	25	
100	1,000	1,000	1,000	1,001	1,002	1,0006	1,0006	+9	81	
150	1,501	1,503	1,501	1,500	1,502	1,5014	1,0009	+6	36	
200	2,005	2,007	2,002	2,005	2,005	2,0048	1,0024	−9	81	
						Summe	59		223	(2)
						Mittel	1,0015			(3)

$$k = \frac{100}{1{,}0015} = 99{,}85 \qquad (4)$$

Die hier durchgeführte Berechnung von k erklärt sich nahezu von selbst; besondere Begründung ist nur vielleicht nötig für die Bildung des *einfachen* Mittels aus den vier Werten $\frac{100\,l}{E-c}$; man könnte nämlich vielleicht daran denken, dass verschiedene Gewichte nach den verschiedenen Entfernungen zu nehmen wären, allein das ist nicht der Fall; allerdings die l selbst haben für verschiedene Entfernungen mittlere Fehler proportional den Entfernungen $E-c$, allein die Quotienten $\frac{l}{E-c}$ oder $\frac{100\,l}{E-c}$ sind wieder gleichgewichtig.

Gelegentlich haben wir auch noch eine Genauigkeitsberechnung in obiger Tabelle beigefügt, und finden daraus den mittleren Fehler *einer* Bestimmung von $\frac{100\,l}{E-c}$:

$$m_1 = \sqrt{\frac{223}{3}} = 8{,}6 \text{ letzte Einheiten, d. h. } = \pm 0{,}00086 \tag{5}$$

und den mittleren Fehler des Mittels 1,0015:

$$M = \frac{m_1}{\sqrt{4}} = 0{,}0004,$$

$$\text{also Mittel} = 1{,}0015 \pm 0{,}0004.$$

Die Umkehrung giebt:

$$k = 99{,}85 \pm 0{,}04 \tag{6}$$

Dieses letzte Ergebnis lässt sich in Worten so aussprechen:

Die Konstante ist $k = 99{,}85$, und nach dem mittleren Fehler zu urteilen, etwa innerhalb der Grenzen 99,81 und 99,89 unsicher bestimmt; die Konstante ist also kleiner als 100, denn die Abweichung von 100 beträgt 0,15 oder etwa das *Vier*fache des mittleren Fehlers 0,04. Es war Seitens des Mechanikers beabsichtigt gewesen, $k = 100$ zu machen, und diese Absicht ist also nicht völlig erreicht worden.

Welche Hilfsmittel man hat, um die Konstante $k = 99{,}85$ auf den runden Wert $k = 100$ zu stimmen, werden wir im folgenden § 159. kennen lernen.

III. Gemeinsame Bestimmung von k und c.

Wenn man, aus Unkenntnis der optischen Einrichtung des Fernrohrs, die kleine Konstante c nicht selbständig bestimmen kann, so muss man sie mit k zusammen durch eine Ausgleichung mit *zwei* Unbekannten nach der M. d. kl. Q. ermitteln, wobei wieder eine Reihe von Latten-Ablesungen l für gegebene sicher gemessene Entfernungen E als verfügbar angenommen werden soll.

Dabei besteht nach (17) § 157. S. 563 die Gleichung:

$$E = c + k\,l \tag{7}$$

Die Multiplikations-Konstante soll nahe $= 100$ sein, wir wollen deshalb setzen $k = 100 + y$ und zugleich $c = x$, also:

$$E = x + (100 + y)\,l \quad \text{oder} \quad 0 = x + l\,y + 100\,l - E.$$

Dieses kann sofort zu einer Fehlergleichung benützt werden:

$$v = x + l\,y + (100\,l - E) \tag{8}$$

oder

$$v = a\,x + b\,y + \lambda \tag{9}$$

wo

$$a = 1 \quad , \quad b = l \quad , \quad \lambda = 100\,l - E \tag{10}$$

(Das Absolutglied ist hier λ genannt, weil das sonst von uns für das Absolutglied einer Fehlergleichung gebrauchte Zeichen l hier bereits für die Beobachtung an der Distanzlatte gebraucht ist.)

Die Gleichung (9) kann insofern als Fehlergleichung gelten, weil $\lambda = 100\,l - E$ alle Eigenschaften einer Beobachtungsgrösse hat; allerdings ist zunächst l selbst die Beobachtung an der Distanzlatte; jedoch kann $100\,l$ auch als Beobachtungsgrösse gelten, indem sofort die Lattenwerte als Distanzen ($1^{cm} = 1^{m}$) gezählt werden, und die Werte E als anderweitig fehlerfrei gemessen zu betrachten sind. Die übrig bleibenden Fehler v werden hiedurch auch als Entfernungsfehler gezählt.

Was die *Gewichte* p der Fehlergleichungen (9) betrifft, so sind dieselben zu nehmen:

$$p = \frac{1}{l^2} \tag{11}$$

weil der mittlere Fehler einer Latten-Ablesung proportional der Entfernung E, also hinreichend genau auch proportional dem Lattenwert l ist.

Aus (10) und (11) kann man die allgemeine Form der Normalgleichungs-Coëfficienten bilden:

$$[p\,a\,a] = \left[\frac{1}{l^2}\right] \qquad [p\,a\,b] = \left[\frac{1}{l}\right] \qquad [p\,a\,\lambda] = \left[\frac{\lambda}{l^2}\right]$$

$$(n = \text{Anzahl der Beobachtungen}) \qquad [p\,b\,b] = n \qquad [p\,b\,\lambda] = \left[\frac{\lambda}{l}\right]$$

$$[p\,\lambda\,\lambda] = \left[\frac{\lambda^2}{l^2}\right]$$

Nach Ausrechnung dieser Coëfficienten hat man die zwei Gleichungen aufzulösen:

$$[p\,a\,a]\,x + [p\,a\,b]\,y + [p\,a\,\lambda] = 0$$
$$[p\,a\,b]\,x + [p\,b\,b]\,y + [p\,b\,\lambda] = 0$$

Alles Weitere soll an einem Beispiele gezeigt werden:

Ein Tachymeter, sogenanntes Instrument „Cleps“ (das wir in § 163. näher beschreiben werden), wurde auf 7 gut mit Messlatten abgemessenen Entfernungen E zwischen 25^{m} und 300^{m} geprüft, indem eine Distanzlatte in jeder Stellung von zwei Beobachtern je 4fach abgelesen wurde. Die Vergrösserung des Fernrohrs ist 25fach. Die Entfernungen E sind von der Instrumenten-Mitte an gezählt. Folgende Tabelle giebt die Beobachtungsmittel beider Beobachter, und das Gesamtmittel l.

Instrument Cleps Nr. 3625. 10. März 1888.

Num.	Entfernung E	Latten-Ablesungen Beobachter J.	Beobachter P.	Mittel l	$100\,l - E = \lambda$	$\frac{1}{l^2} = p$
1.	25^{m}	$0{,}2502^{m}$	$0{,}2500^{m}$	$0{,}2501^{m}$	$+0{,}01^{m}$	16,00
2.	50	0,5002	0,4998	0,5000	+ 0,00	4,00
3.	100	1,0012	1,0000	1,0006	+ 0,06	1,00
4.	150	1,5018	1,5015	1,5016	+ 0,16	0,44
5.	200	2,0042	2,0000	2,0021	+ 0,21	0,25
6.	250	2,5090	2,5025	2,5058	+ 0,58	0,16
7.	300	3,0044	3,0075	3,0060	+ 0,60	0,11

Ehe wir weiter gehen, machen wir die Bemerkung, dass der Beobachter *J.* im allgemeinen eine *grössere* Ablesung l hat, als der Beobachter *P.* Solche kleine konstante persönliche Fehler können bei dieser optischen Faden-Distanzmessung wohl vorkommen.

Die Weiterrechnung geht mit den Mitteln l, wie folgende zweite Tabelle zeigt:

Num.	p	a	b	λ	pab	$pa\lambda$	pbb	$pb\lambda$	$p\lambda\lambda$
1.	16,00	1,00	0,25	+ 0,01	4,00	0,16	1,00	0,04	0,002
2.	4,00	1,00	0,50	+ 0,00	2,00	0,00	1,00	0,00	0,000
3.	1,00	1,00	1,00	+ 0,06	1,00	0,06	1,00	0,06	0,004
4.	0,44	1,00	1,50	+ 0,16	0,67	0,07	1,00	0,11	0,011
5.	0,25	1,00	2,00	+ 0,21	0,50	0,05	1,00	0,10	0,011
6.	0,16	1,00	2,50	+ 0,58	0,40	0,09	1,00	0,23	0,054
7.	0,11	1,00	3,00	+ 0,60	0,33	0,07	1,00	0,20	0,040
Summen:	21,96				8,90	0,50	7,00	0,74	0,122

Normalgleichungen:

$$\underline{21,96\,x} + 8,90\,y + 0,50 = 0$$
$$\underline{7,00\,y} + 0,74 = 0$$
$$\underline{0,122}$$

Die Auflösung giebt:

$$\left.\begin{array}{lll} x = +0,041 & y = -0,158 & [\lambda\lambda.2] = 0,025 = [p\,v\,v] \\ \pm 0,021 & \pm 0,038 & \\ & k = 100 + y = 99,842 \pm 0,038 & m = \sqrt{\frac{0,025}{5}} = \pm 0,070 \end{array}\right\} \quad (12)$$

Die Distanz-Formel heisst also jetzt:

$$E = 0,04^m + 99,842\,l \tag{13}$$

Der kleine Wert von $c = x = 0,04^m$ mit dem sehr kleinen mittleren Fehler $\pm 0,02^m$ beweist, dass das Instrument allerdings genügend anallatisch ist, und dass man für alle praktischen Zwecke genügend $c = 0$ setzen kann.

Als weiteres praktisches Resultat von allgemeinem Interesse nehmen wir den mittleren Fehler nach (12), $m = \pm 0,070^m$. Das ist der mittlere Distanzfehler auf 100^m Entfernung (für das Gewicht $p = 1$). Indessen gilt dieser mittlere Fehler für eine Vergleichung, welche selbst das Mittel aus 8 Einzelablesungen war; es wird also der mittlere Fehler einer Distanzmessung

$$m_1 = 0,070\sqrt{8} = \pm 0,20^m \text{ auf } 100^m \tag{14}$$

oder wir können sagen, der mittlere Fehler *einer* Distanzmessung mit diesem Instrument beträgt $\pm 0,2\,\%$ der Distanz.

Als Rechenprobe und zum formellen Abschluss der vorstehenden Ausgleichung kann man auch noch die übrigbleibenden Fehler v berechnen nach der Formel:

$$v = 0,041 + 99,842\,l - E$$

wo l die beobachteten Latten-Abschnitte und $E = 25^m$, 50^m ... 300^m die gegebenen Entfernungen sind. Die hiernach berechneten 7 Werte v sind:

$$v = +0,01 \quad -0,04 \quad -0,06 \quad -0,04 \quad -0,06 \quad +0,22 \quad +0,17$$

und weiter giebt dieses $[p\,v\,v] = 0,024$, was mit $[\lambda\lambda.2] = 0,025$ nach (12) aus der Elimination genügend stimmt.

Anmerkung. Wie schon oben bei (10) S. 567 angedeutet wurde, ist die vorstehende Ausgleichung richtig, insofern $\lambda = 100\,l - E$ als *Beobachtungs*grösse gelten kann. Rein theoretisch bildet man aber die Fehlergleichungen dadurch, dass man die vorhandene Beziehung zwischen den Unbekannten und der Beobachtung nach letzterer auflöst, d. h. man hätte aus (7) S. 566 zu bilden:

$$l = -\frac{c}{k} + \frac{1}{k} E = x' + (0{,}01 + y')\,E$$

$$v = x' + E\,y + (0{,}01\,E - l)$$

Verfährt man hiernach und löst nachher wieder nach E auf, so bekommt man praktisch genommen *dasselbe*, was unsere mehr anschauliche Ausgleichung nach (9), (10) und (11) gegeben hat.

§ 159. Abstimmung des Distanzmessers auf $k = 100$ u. s. w.

Im vorigen § 158 haben wir gesehen, wie die beiden Konstanten c und k bestimmt werden können für die Gleichung:

$$E = c + k\,l \tag{1}$$

In unseren Beispielen S. 565 und S. 567 war k sehr nahe $= 100$, und dieses war nicht Zufall; man geht gewöhnlich darauf aus, $k = 100$ oder vielleicht auch $= 50$ oder $= 200$, oder sonst zu einer *runden* Zahl zu machen.

Ehe wir die verschiedenen Hilfsmittel betrachten, welche man hat, um $k = 100$ zu machen, oder allgemeiner, um die jeweilige Multiplikation mit k zu ersparen, müssen wir zuvor noch einiges über die kleine Konstante c sagen.

I. Die Additions-Konstante c.

1) Die Konstante c beträgt im Mittel etwa $0{,}5^m$, wohl höchstens $1{,}0^m$, und deswegen ist es in vielen Fällen angezeigt, diese kleine Konstante schlechthin zu vernachlässigen. Das geschieht z. B. unbedingt bei topographischen Aufnahmen im Massstab 1 : 25 000 bis zu 1 : 5 000, weil in so kleinen Massstäben sich eine Länge von $0{,}5^m$ bis $1{,}0^m$ überhaupt nicht mehr darstellen lässt. Je grösser aber der Massstab der Aufnahme wird, um so weniger darf man c vernachlässigen.

2) Man kann c zum Teil berücksichtigen, zum Teil vernachlässigen, indem man c aus der Formel (1) zwar fortlässt, aber dafür k etwas verändert, d. h. man setzt:

$$E = c + k\,l = \left(k + \frac{c}{l}\right) l = k'\,l \tag{2}$$

$$\text{wo} \qquad k' = k + \frac{c}{l}\,^{*)} \tag{3}$$

---

*) Man kann hiezu auch eine theoretische Rechnung anstellen: Wenn man die Änderung $k - k'$ so bemessen will, dass die entsprechende Fehlerquadratsumme $[p\,v\,v]$ ein Minimum wird, mit $p = \frac{1}{l^2}$ und $v = c + (k - k')\,l$, so muss genommen werden:

$$k' - k = \frac{c}{n}\left[\frac{1}{l}\right]$$

wenn n die Anzahl der in Betracht kommenden l ist, deren Reciprokensumme $= \left[\frac{1}{l}\right]$ ist. Mit der unteren Grenze $l = l_1$ und mit der oberen Grenze $l = l_2$ kann man setzen:

Nun wird man, um möglichst bequem zu rechnen, nicht etwa $k = 100$ machen wollen, sondern $k' = 100$, und das kann man machen für irgend einen *Mittel*wert von l, z. B. für $l = 0{,}5^m$ entsprechend einer mittleren Entfernung von 50^m. Sei weiter $c = 0{,}5^m$, so wird nach (3):

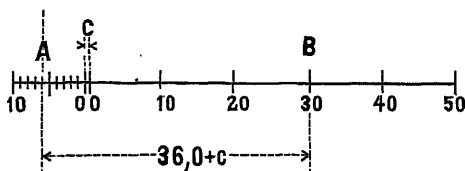
$$k' = 100 = k + \frac{0{,}5}{0{,}5} = k + 1{,}0 \qquad (4)$$

$$\text{oder} \quad k = 100 - 1{,}0 = 99{,}0 \qquad (5)$$

Dieses ist ein sehr einfaches Mittel; man stimmt (in der nachher anzugebenden Weise) den Distanzmesser auf $k = 99{,}0$ ab, und lässt dafür die kleine Konstante c fort.

3) Man lässt den ursprünglichen Wert k bestehen, schlägt aber jeder Ablesung in Gedanken die Konstante c zu.

4) Wenn man die Distanzmessungen auf einem Massstab abgreifen und in eine Karte eintragen will, was meist der Fall ist, so schaltet man in dem Massstabe das kleine Stück c ein, wie in Fig. 1. angedeutet ist. Man hat dann z. B. $AB = 36{,}0^m + c$.

Fig. 1.
Massstab 1 : 1000 mit der Konstanten c.

5) Wenn man eine Distanzlatte mit einem bestimmten Nullpunkte hat, auf welche immer ein Faden eingestellt wird, so kann man die Konstante c in der Lattenteilung dadurch berücksichtigen, dass man den Latten-Nullpunkt um ein kleines Stück $\frac{c}{k}$ verschiebt, so dass der erste Lattenteil um $\frac{c}{k}$ kleiner wird als alle übrigen. Z. B. für $k = 100$ und $c = 0{,}5^m$ müsste man den ersten Lattenteil um $0{,}5^{cm}$ kleiner machen als die folgenden. Dieses Hilfsmittel war früher viel im Gebrauch, z. B. bei den Münchener Distanzlatten; wenn man jedoch überhaupt keine besonderen Distanzlatten hat, sondern gewöhnliche Nivellierlatten mit metrischer Teilung anwendet, so ist die Nullpunktsverschiebung störend, zumal man dadurch gezwungen wird, überhaupt den einen Faden immer auf einen bestimmten Punkt zu stellen.

II. Die Multiplikations-Konstante k.

Um die Multiplikation $k\,l$ so bequem als möglich zu machen, kann man darauf ausgehen, $k = 100$ zu machen; es giebt jedoch auch noch einige andere Hilfsmittel, welche wir nachher kennen lernen wollen.

$$\frac{1}{n}\left[\frac{1}{l}\right] = \frac{1}{0{,}434}\,(log\, l_2 - log\, l_1)$$

z. B. mit $l_2 = 3{,}0$ und $l_1 = 0{,}2$ giebt dieses $= \frac{0{,}477 - (-0{,}699)}{0{,}434} = 2{,}7$, also $k' - k = 2{,}7\, c, = 1{,}3$, wenn $c = 0{,}5$; und man müsste $k' = 101{,}3$ für $k = 100$ nehmen, um innerhalb der Grenzen $l_1 = 0{,}1$ und $l_2 = 3{,}0$, d. h. innerhalb der Distanzen 10^m und 300^m die Weglassung von c möglichst unschädlich zu machen. Mit gutem Erfolge gelingt dieses nur innerhalb ziemlich enger Grenzen.

1) Stimmung des *Faden-Abstandes*, so dass $k = 100$ wird. Nach (18), (19), (20) § 157. S. 563 ist k jedenfalls abhängig von dem Parallel-Abstande p der Fäden (vgl. Fig. 1. § 157. S. 559), und wenn man diesen Abstand p veränderlich und durch Richte-Schrauben stimmbar macht, so hat man allerdings damit ein Mittel in der Hand, um k innerhalb gewisser Grenzen auf jeden beliebigen Wert, also auch $k = 100$ zu bringen. Man kann das ganz versuchsweise thun; man stellt nämlich eine Latte in die Entfernung $E - c = 100^m$, und stimmt dann mit den Richteschrauben der Parallelfäden, den Abstand p so, dass gerade ein Lattenstück $1^m = 100^{cm}$ zwischen den Fäden erscheint.

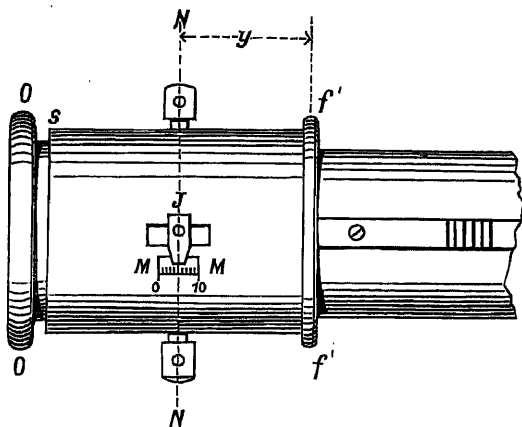
Beim einfachen und *Ramsden*schen Fernrohr hat man kein anderes Hilfsmittel, um $k = 100$ zu machen, dagegen beim *Huyghens*schen und *Porro*schen Fernrohr hat man ein feineres Mittel, zu dem wir nun übergehen.

2) Stimmung der Linsen-Abstände, so dass $k = 100$ wird. Wir betrachten zuerst ein *Huyghens*sches Fernrohr, für welches nach (19) § 157. S. 563 die Gleichung gilt:

$$k = \frac{f}{p}\left(1 - \frac{y}{f'}\right) \tag{6}$$

Dabei ist y der Abstand zwischen dem Faden-Netze und der Kollektivlinse (vgl. Fig. 4. S. 560).

Diesen Abstand y, welcher im Laufe der Distanzmessung selbst konstant bleiben muss, kann man nun zur Stimmung von k sehr fein benützen. Die hiezu nötige Einrichtung des Okulars zeigt Fig. 2. $f'f'$ bedeutet das Kollektiv und NN die Ebene des Fadennetzes; es ist also y der erwähnte Abstand des Fadennetzes vom Kollektiv. Das Okular O hat bei s den nötigen Spielraum zur Einstellung auf deutliches Sehen des Fadennetzes NN. Auch y hat einen Spielraum von $2-3^{mm}$, wobei der mit dem Fadennetz verbundene Zeiger J auf einem kleinen in Halbmillimeter geteilten Massstab MM verschoben bezw. eingestellt wird; oder es wird die Veränderung von y auf MM unmittelbar gemessen. Nun macht man bei verschiedenen Stellungen des Zeigers J die Bestimmung der Konstanten k in der Weise, wie früher in § 158. S. 565 angegeben wurde.

Fig. 2.
*Huyghens*sches Distanzenmesser-Okular.
Veränderung von y zur Stimmung für $k = 100$.

(Hannov. Sammlung.)

Als Beispiel geben wir für $E - c = 100^m$, die Latten-Ablesungen l (als Mittel aus je mehreren Einzel-Ablesungen):

Zeiger J	$3{,}0 = 1{,}5^{mm}$	$4{,}0 = 2{,}0^{mm}$	$5{,}0 = 2{,}5^{mm}$	$6{,}0 = 3{,}0^{mm}$	(7)
Lattenwert l	$1{,}025^m$	$1{,}010^m$	$0{,}992^m$	$0{,}976^m$	
$k = \frac{E-c}{l} = \frac{100}{l}$	$= 97{,}5$	$= 99{,}0$	$= 100{,}8$	$= 102{,}4$	

Man sieht, dass $k = 100$, oder $l = 1{,}000^m$ zwischen die Zeigerstellungen $J = 4{,}0$ und 5,0 fallen würde, und die Einschaltung giebt hiefür:

$$J = 4{,}0 + \frac{0{,}010}{0{,}018} 1{,}0 = 4{,}56 \tag{8}$$

Nun stellt man den Zeiger auf $J = 4{,}56$, macht etwa damit einen Probe-Versuch, und wenn genügend genau $l = 1{,}000^m$ erhalten wird, so stellt man den Zeiger J, und damit das Fadennetz $N N$ mit einer hiezu vorhandenen Schraube *fest* und hat damit den Distanzmesser auf $k = 100$ gestimmt.

Nachher, d. h. im Laufe der Messungen, darf natürlich nun y nicht mehr verändert werden; und das etwa für verschiedene Augen weiter nötige Einstellen des Okulars O auf deutliches Sehen des Fadennetzes $N N$ geschieht nur mit dem Spielraume bei s.*)

Wenn man den Distanzmesser nicht auf $k = 100$, sondern etwa auf $k = 99{,}5$ abstimmen will (um c damit näherungsweise zu berücksichtigen) so hat man nach (7) zu stellen:

$$J = 4{,}0 + \frac{0{,}5}{1{,}8} 1{,}0 = 4{,}28 \tag{9}$$

Die Einstellungen des Zeigers J auf dem kleinen Massstab $M M$ muss man bei der Anordnung von Fig. 2. durch Drücken von freier Hand machen. Unsere neueren Instrumente haben eine feinere Einstell-Vorrichtung mit einer Schraube, deren geteilter Rand auch die Zeigerwerthe für y schärfer giebt.

Beim *Porro*schen Fernrohr wird die Stimmung auf $k = 100$ nach demselben Grundsatz wie beim *Huyghens*schen Fernrohr gemacht, nur handelt es sich bei *Porro* nicht um die Änderung des Abstandes y zwischen Fadennetz und Kollektiv, sondern um Änderung des Abstandes a zwischen Objektiv und Kollektiv, denn es ist nach (20) § 157. S. 563:

$$k = \frac{f f'}{f + f' - a} \frac{1}{p} \tag{10}$$

Die *Porro*schen Fernröhre haben daher für die Änderung von a eine ähnliche Einrichtung, wie für y in vorstehender Fig. 2. Alles wird durch Versuche, nötigenfalls wiederholte Versuche, erreicht.

3) Ein weiteres Hilfsmittel, zwar nicht k selbst $= 100$ zu machen, aber doch die Multiplikation zu ersparen, besteht in der Anlage eines verzerrten Massstabes zum Abstechen der Entfernungen.

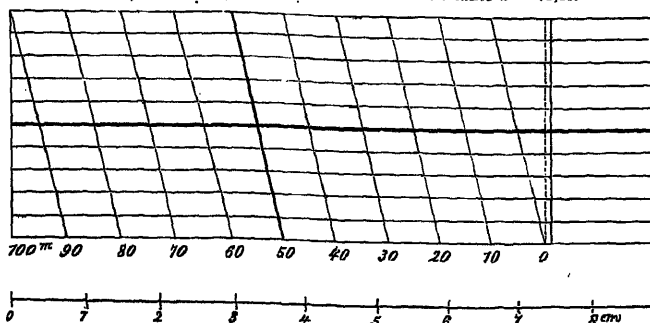
In Fig. 3. S. 573 haben wir einen solchen Massstab gezeichnet, für den ganz zufälligen unrunden Wert $k = 73{,}16$. Statt einen Wert l mit 73,16 zu multiplizieren und das Produkt auf einem gewöhnlichen Massstab abzumessen, misst man l selbst auf dem Massstab mit der Einheit 73,16 ab, was offenbar zu demselben Ziele führt. In Fig. 3. ist ausserdem auch die kleine Konstante c ebenso wie in Fig. 1. S. 570 berücksichtigt.

4) Man kann auch die Distanzlatte selbst, statt nach gewöhnlichem Masse, nach der Masseinheit $\frac{1}{k}$ teilen, und kann dann mit einem Distanzmesser, der die Konstante k

---

*) Es giebt zahlreiche Distanz-Fernröhre mit *Huyghens*schen Okularen, bei welchen das Okular O *ohne* Spielraum s fest eingesetzt ist, und die Einrichtung zum deutlichen Sehen durch willkürliches Verschieben des Fadennetzes in Längsschlitzen bewirkt werden soll. Dieses ist verkehrt und giebt leicht Distanzfehler von 1 — 2 %.

hat, geradezu Entfernungen ablesen. Hat z. B. ein Distanzmesser $k = 66{,}67$, so muss an der Latte $1{,}5^m = 100^m$ Entfernung genommen werden.

Fig. 3.
Distanzmesser-Massstab 1 : 1000 für die Konstante $k = 73{,}16$.

Dieses im Grundgedanken einfache Mittel wurde früher sehr allgemein angewendet, es ist aber von allen vorhandenen Hilfsmitteln das beschwerlichste. Man kann die Lattenteilung hiezu für ein einzelnes Instrument ganz versuchsweise machen, indem man die Latte auf 100^m, 200^m u. s. w. gemessene Entfernung stellt (mit Rücksicht auf die Konstante c) und dann die Teilstriche einweist. Besser aber wäre es, die Konstante k zuerst mittelst einer gewöhnlichen Latte zu ermitteln, und die Teilungseinheit dann genau zu berechnen.

5) Die Multiplikation mit k kann auch mit dem Rechenschieber gemacht werden, worüber später in § 164. in Verbindung mit der Reduktion auf den Horizont, das Nötige gesagt werden soll.

6) Auch Hilfstafeln, welche man zur Distanz- und Höhenberechnung bei geneigten Zielungen benützt, können zugleich auch die Werte k und c eines besonderen Instrumentes berücksichtigen.

Unsere *„Hilfstafeln für Tachymetrie, Stuttgart, J. B. Metzler, 1880“*, geben in der Einleitung die nötige Anleitung hiezu.

§ 160. Geneigte Ziellinien.

Die im bisherigen beschriebene Distanzmessung beruht auf der Annahme, dass die Ziellinien nach der Latte nahezu horizontal sind, und dabei wird die Latte selbst vertikal gestellt.

Wenn man es mit *geneigten* Zielungen zu thun hat, wird zuerst die Frage entstehen, wie man dann die Latte stellen soll? Es sind zwei Arten der Lattenstellung im Gebrauch: 1) Lattenstellung rechtwinklig zur Ziellinie, und deswegen bei geneigten Zielungen schief, und 2) Lattenstellung lotrecht (vertikal).

1) *Schiefe Lattenstellung, rechtwinklig zur Ziellinie* (Fig. 1. Seite 574).

Wenn die Ziellinie den Winkel α mit der Horizontalen macht, so wird der Lattenablesung l die schiefe Entfernung E' entsprechen nach derGleichung:

$$E' = k\,l \tag{1}$$

und die wagrechte Entfernung E findet sich daraus:

$$E = E' \cos\alpha = k\,l\cos\alpha \tag{2}$$

2) *Lotrechte Lattenstellung* (Fig. 2.).

Das Stück l der lotrecht gehaltenen Latte entspricht einem Lattenwert l' rechtwinklig zur Ziellinie, wobei ist:

$$l' = l \cos \alpha \tag{3}$$

Zu diesem Lattenwert l' gehört eine schiefe Entfernung E':

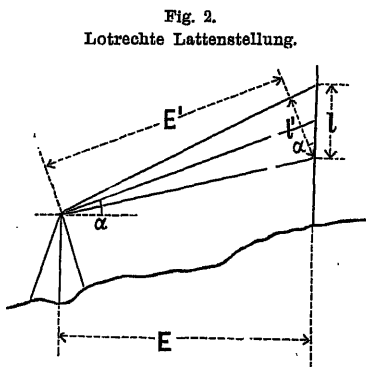
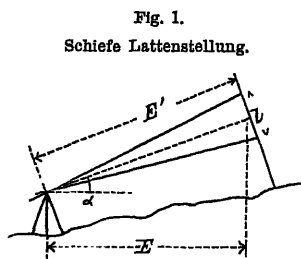
$$E' = k l' = k l \cos \alpha \tag{4}$$

Die schliesslich verlangte wagrechte Entfernung E ergiebt sich hieraus:

$$E = E' \cos \alpha = k l \cos^2 \alpha \tag{5}$$

Da $k l$ die Entfernung für wagrechte Ziellinie ist, hat man für eine Ziellinie mit der Neigung α nach (4) und (5) nun die zwei Verfahren, dass die Latten-Ablesung l bei schiefer Lattenstellung mit $\cos \alpha$ und bei lotrechter Lattenstellung mit $\cos^2 \alpha$ zu multiplizieren ist, um die Reduktion auf die Wagrechte zu erlangen.

Fig. 1.
Schiefe Lattenstellung.

Fig. 2.
Lotrechte Lattenstellung.

Als *Hilfsmittel* zur Erlangung einer gewissen Lattenstellung hat man für *lotrechte* Stellung (Fig. 2.) eine Dosen-Libelle, angehängtes Lot, oder auch nur Augenmass; für die *schiefe* Stellung, rechtwinklig zur Ziellinie (Fig. 1.), dagegen hat man ein kleines Diopter oder auch nur ein Zielbrettchen, welches in mittlerer Instrumentenhöhe an der Latte rechtwinklig angebracht ist; der Lattenträger muss nun an Abhängen stets die Latte so neigen, dass er, durch das Diopter zielend, das Distanzmesser-Fernrohr sehen kann.

Wenn wir die beiden hier beschriebenen Lattenstellungen (Fig. 1. und Fig. 2.) vergleichen wollen, so haben wir zuerst zu sagen, dass die schiefe Stellung (Fig. 1.) zu theoretisch genaueren Ergebnissen führt als die lotrechte Stellung (Fig. 2.), *wenn* angenommen wird, dass zwischen der wirklichen Lattenstellung und der Stellung, welche die Latte haben soll, in beiden Fällen *gleiche* Abweichung besteht.

Wir werden dieses durch die nachfolgenden Entwicklungen (17) und (18) S. 578 und S. 579 ausführlicher zeigen; es ist aber wohl auch ohne Rechnung leicht zu begreifen, *wenn* die Latte ebenso scharf in ihrer schiefen Stellung (Fig. 1.) erhalten werden kann, als man eine Latte lotrecht halten kann, dass dann die unvermeidlichen Schwankungen bei Fig. 1. weniger schädlich sind als bei Fig. 2.

Allein diese Annahme wird meist nicht zutreffen; die schiefe Lattenstellung wird im allgemeinen fehlerhafter sein als die lotrechte, und jedenfalls ist die lotrechte Stellung für den Lattenhalter viel bequemer.

In vielen Fällen, Topographie u. s. w., stellt man die Latte ohne besondere Richtemittel schlechthin auf den Boden, wie sie gerade steht, d. h. ungefähr lotrecht; und dann ist die Rechnung jedenfalls nach Fig. 2. zu führen.

Betrachtet man andererseits die genauesten Fälle, nämlich Lattenhaltung mit einem Stativ oder wenigstens mit 1 oder 2 Streben, welche neuerdings für schiefe Stellung empfohlen werden, so sieht man, dass solche Streben u. s. w. nötig sind, wenn die Neigung einigermassen bedeutend wird, um die Latte überhaupt noch zu halten; wenn man Streben und ähnliche Hilfsmittel zugleich mit einer Dosen-Libelle anwendet, so kann man die lotrechte Stellung so genau erreichen, dass ihr Fehler verschwindend wird.

Je mehr man aber das ganze Verfahren durch solche Hilfsmittel verfeinert, umsomehr muss man fürchten, an Handlichkeit und Bequemlichkeit, welche hier so sehr wichtig sind, zu verlieren.

Die lotrechte Lattenstellung (Fig. 2. S. 574) mit mehr oder weniger scharfen Versicherungsmitteln der Lotrichtung, ist zur Zeit die in der Praxis am meisten gebräuchliche.

Genauere Reduktions-Formeln.

Die Reduktions-Formeln (2) S. 573 und (5) S. 574 beruhen in mehr als einer Beziehung auf Näherungen, und obgleich diese Näherungen fast immer zulässig sind, müssen wir doch, um ein sicheres Urteil zu haben, die schärferen Formeln hier entwickeln.

Bei schiefer Lattenstellung (Fig. 1. S. 574) kommt zu dem Hauptgliede $E = k\,l \cos\alpha$ noch ein kleiner Wert $z \sin\alpha$ hinzu, wenn z der untere Lattenteil, vom Boden bis zum Mittelfaden, ist, indem um diesen Betrag $\pm z \sin\alpha$ der obere Lattenteil sich aus der Lotrechten gegen das Instrument hin oder davon weg bewegt, wenn $\pm \alpha$ die Zielneigung ist, man hat also für die Distanzformel $c + k\,l$:

$$E = (c + k\,l) \cos\alpha \pm z \sin\alpha \tag{6}$$

Bei lotrechter Lattenstellung verlangt die kleine Konstante c der Distanzformel eine besondere Behandlung; wenn nämlich für wagrechte Zielung eine Gleichung gilt $E = c + k\,l$, so gilt für geneigte Zielung:

$$E = c \cos\alpha + k\,l \cos^2\alpha \tag{7}$$

Da auch der Faktor $\cos^2\alpha$ nur auf einer Näherung beruht, gehen wir mit Fig. 3. zu der Entwicklung einer schärferen Formel über.

Fig. 3.

In Fig. 3. ist angenommen, dass die Mittelzielung den Höhenwinkel α habe, und dass der distanzmessende Winkel $= \varepsilon$ sei; dann ist der Höhenwinkel für die obere Ziellinie $= \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$ und der Höhenwinkel für die untere Ziellinie $= \alpha - \frac{\varepsilon}{2}$, und das giebt, mit den übrigen in Fig. 3. eingeschriebenen Bezeichnungen:

$$l = E\,tang\left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right) - E\,tang\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$l = E\frac{tang\,\alpha + tang\,\frac{\varepsilon}{2}}{1 - tang\,\alpha\,tang\,\frac{\varepsilon}{2}} - E\frac{tang\,\alpha - tang\,\frac{\varepsilon}{2}}{1 + tang\,\alpha\,tang\,\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$l = E\frac{2\,tang\,\frac{\varepsilon}{2} + 2\,tang^2\,\alpha\,tang\,\frac{\varepsilon}{2}}{1 - tang^2\,\alpha\,tang^2\,\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$l = 2\,E\,\frac{tang\,\frac{\varepsilon}{2}}{cos^2\,\alpha}\,\frac{1}{1 - tang^2\,\alpha\,tang^2\,\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$E = \frac{l}{2}\,cotg\,\frac{\varepsilon}{2}\,cos^2\,\alpha\left(1 - tang^2\,\alpha\,tang^2\,\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Wenn $\alpha = 0$ ist, soll $E = k\,l$ sein, also:

$$cotg\,\frac{\varepsilon}{2} = 2\,k$$

$$E = k\,l\,cos^2\,\alpha\left(1 - tang^2\,\alpha\left(\frac{1}{2\,k}\right)^2\right)$$

$$E = k\,l\,cos^2\,\alpha - \frac{l}{4\,k}\,sin^2\,\alpha \tag{8}$$

Das zweite Glied stellt hier den Fehler vor, welcher begangen wird, wenn man bei dem ersten Gliede $k\,l\,cos^2\,\alpha$ stehen bleibt. In etwas anderer Form geschrieben ist dieses Fehlerglied:

$$\delta\,E = \frac{E}{4\,k^2}\,sin^2\,\alpha$$

Für $k = 100$ und $E = 100^m$ berechnet man hiernach:

$\alpha = 0$	$\delta\,E = 0$
$\alpha = 20°$	$\delta\,E = 0{,}0003^m$
$\alpha = 40°$	$\delta\,E = 0{,}001^m$
$\alpha = 60°$	$\delta\,E = 0{,}002^m$

Diese Fehler sind so klein, dass man das zweite Glied der Gleichung (8) nie zu berücksichtigen braucht.

Einfluss eines Aufstellungsfehlers der Latte.

Unter Bezugnahme auf Fig. 4. Seite 577 betrachten wir wieder eine Distanzmessung mit einer Neigung α der Mittelzielung. Wenn hiebei $2\,\varepsilon$ der distanzmessende Winkel ist, so sind die Neigungen der beiden äusseren Ziellinien bzw. $\alpha + \frac{\varepsilon}{2}$ und $\alpha - \frac{\varepsilon}{2}$. Die Latte sei gegen die Vertikale um den Winkel δ rückwärts geneigt.

Bei richtig vertikal stehender Latte sei die Ablesung am unteren Faden $= z_1$ und am oberen Faden $= z_2$, und bei schief stehender Latte habe man unten z_2' und oben z_2'.

Wir betrachten nun das Dreieck mit den drei Winkeln δ, γ und γ', und finden:

$$\gamma' = 90^\circ + \left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2} - \delta\right) \qquad \gamma = 90^\circ - \left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right) \tag{9}$$

$$\frac{z_2'}{z_2} = \frac{\sin\gamma}{\sin\gamma'} = \frac{\cos\left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\cos\left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2} - \delta\right)} \tag{10}$$

Da ε und δ klein sind, entwickelt man nach dem *Taylor*schen Satze:

$$\cos\left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \cos\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\sin\alpha - \frac{\varepsilon^2}{8}\cos\alpha = \cos\alpha\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\,tang\,\alpha - \frac{\varepsilon^2}{8}\right)$$

entsprechend: $$\cos\left(\alpha + \left(\frac{\varepsilon}{2} - \delta\right)\right) = \cos\alpha\left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2} - \delta\right) tang\,\alpha - \frac{\left(\frac{\varepsilon}{2} - \delta\right)^2}{2}\right)$$

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{\varepsilon}{2} - \delta\right) tang\,\alpha - \frac{\left(\frac{\varepsilon}{2} - \delta\right)^2}{2}} = 1 + \left(\frac{\varepsilon}{2} - \delta\right) tang\,\alpha + \frac{\left(\frac{\varepsilon}{2} - \delta\right)^2}{2} + \left(\frac{\varepsilon}{2} - \delta\right)^2 tang^2\alpha + \ldots$$

$$\frac{z_2'}{z_2} = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\,tang\,\alpha - \frac{\varepsilon^2}{8}\right)\left(1 + \left(\frac{\varepsilon}{2} - \delta\right) tang\,\alpha + \frac{\left(\frac{\varepsilon}{2} - \delta\right)^2}{2} + \left(\frac{\varepsilon}{2} - \delta\right)^2 tang^2\,a\right)$$

Fig. 4.
Lattenschiefe δ.

Wenn man diese beiden Klammern mit Vernachlässigung höherer Glieder ausmultipliziert, so findet man:

$$\frac{z_2'}{z_2} = 1 - \delta\,tang\,\alpha + \frac{\delta^2}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\,\delta + \delta^2\,tang^2\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\,\delta\,tang^2\,\alpha$$

Hieraus mit Zusammenfassung des vierten und des sechsten Gliedes:

$$z_2' = z_2 - z_2\,\delta\,tang\,\alpha + z_2\frac{\delta^2}{2} + z_2\,\delta^2\,tang^2\,\alpha - z_2\frac{\varepsilon\,\delta}{2\cos^2\alpha} \tag{11}$$

Nun gilt eine ganz ähnlich gebaute Gleichung auch für die untere Ziellinie;

man braucht nur $-\frac{\varepsilon}{2}$ an Stelle von $\frac{\varepsilon}{2}$ zu setzen, um die entsprechende Gleichung für z_1' und z_1 zu haben, d. h.:

$$z_1' = z_1 - z_1\,\delta\, tang\,\alpha + z_1 \frac{\delta^2}{2} + z_1\,\delta^2\, tang^2\,\alpha + z_1 \frac{\varepsilon\,\delta}{2\,cos^2\alpha} \tag{12}$$

Bei der gewöhnlichen Art der Beobachtung kann man annehmen, dass für den Oberfaden in (11) S. 577 und für den Unterfaden in (12) die Lattenschiefe δ *dieselbe* sei; denn wenn auch die Latte während der Messung etwas schwankt, so kann man doch immer einen Faden auf einen scharfen Punkt, etwa auf 1,000ᵐ der Latte stellen, und hier festhalten, während man am anderen Faden abliest.

Nun kann man die Gleichungen (11) und (12) abziehen, und wenn man dabei setzt:

$$z_2 - z_1 = l \qquad z_2' - z_1' = l' \tag{13}$$

so bekommt man:

$$l' = l - l\,\delta\, tang\,\alpha + l \frac{\delta^2}{2} + l\,\delta^2\, tang^2\,\alpha - (z_1 + z_2)\frac{\varepsilon\,\delta}{2\,cos^2\,\alpha}$$

Im letzten Gliede kann man setzen:

$$D = k\,l\,cos^2\,\alpha = \frac{l}{\varepsilon}\,cos^2\,\alpha \quad \text{und} \quad \frac{z_1 + z_2}{2} = z \tag{14}$$

damit wird:

$$\frac{l'}{l} = 1 - \delta\, tang\,\alpha + \frac{\delta^2}{2} + \delta^2\, tang^2\,\alpha - \frac{z\,\delta}{D} \tag{15}$$

Aus l und aus l' wird die richtige Entfernung D und die falsche Entfernung D' berechnet:

$$D = k\,l\,cos^2\,\alpha \quad , \quad D' = k\,l'\,cos^2\,\alpha.$$

Man hat daher auch aus (15):

$$\frac{D'}{D} = 1 - \delta\, tang\,\alpha + \frac{\delta^2}{2} + \delta^2\, tang^2\,\alpha - \frac{z\,\delta}{D}$$

$$D' = D - D\,\delta\, tang\,\alpha + D\frac{\delta^2}{2} + D\,\delta^2\, tang^2\,\alpha - z\,\delta \tag{16}$$

Dieses ist die Fehlerformel, auf welche wir ausgegangen sind; dieselbe gilt jedoch nach Fig. 4. S. 577 zunächst nur für aufwärts geneigte Ziellinien, d. h. α positiv, und für rückwärts geneigte Latte, δ positiv.

Um auch andere Fälle zu berücksichtigen, kann man (16) so schreiben:

$$D' - D = \pm D\,\delta\, tang\,\alpha + \left(D\frac{\delta^2}{2} + D\,\delta^2\, tang^2\,\alpha\right) \pm z\,\delta \tag{17}$$

Die beiden mittleren Glieder bleiben stets positiv; der Fehler $D' - D$ wird also im allgemeinen nicht gleich wahrscheinlich positiv oder negativ, sondern vorwiegend positiv sein, d. h. die falsche Distanz D' wird leichter zu gross sein als zu klein.

Dieses würde nicht hindern, aus (17) auch einen *mittleren* Fehler zu berechnen (vgl. Band I. § 6. S. 14), der mittlere Gesamtfehler hat aber hier weniger praktische Bedeutung als die nähere Betrachtung der mittleren Teilfehler, von denen der erste $D\,\delta\, tang\,\alpha$ in (17) am bedeutendsten ist.

Wir wollen jedoch zuerst das letzte Glied $\pm z\,\delta$ in (17) betrachten; dieses ist die Vor- oder Rückwärts-Neigung desjenigen Lattenpunktes, der in der Mittelhöhe z nach (14) von der Mittelfaden-Zielung getroffen wird. Wegen der Kleinheit von δ wird dieses letzte Glied $z\,\delta$ sehr wenig ausmachen.

Auch die zwei anderen Glieder zweiter Ordnung in (17), welche den Faktor δ^2 haben, sind sehr klein, und es bleibt nur das erste Glied $D\,\delta\,tang\,\alpha$ von Belang übrig. Indessen bieten auch noch die anderen Glieder Interesse; wenn man nämlich $\alpha = 0$ setzt, so wird:

$$(D' - D)_0 = D\,\frac{\delta^2}{2} \pm z\,\delta \tag{18}$$

Dieses ist auch der Fehler, welcher an der Entfernung E' in Fig. 1. S. 574 begangen wird, wenn nun mit δ derjenige kleine Fehlerwinkel bezeichnet wird, welchen die Latte in Fig. 1. S. 574 gegen ihre zur Mittelzielung rechtwinklige Soll-Stellung macht.

Wir haben also in den Formeln (18) und (17) die theoretische Fehlerbestimmung für die beiden Lattenstellungen schief zur Ziellinie und lotrecht, und da zeigt die Vergleichung von (18) und (17) auf einen Blick, dass die schiefe Stellung mit Formel (18) die günstigere ist, weil das Hauptglied $D\,\delta\,tang\,\alpha$ von (17) in (18) fortgefallen ist.

Allein, wie wir schon ohne Rechnung auf Seite 574 bemerkt haben, gilt dieses nur dann, *wenn* die Lattenrichtungs-Unsicherheiten δ für beide Fälle (17) und (18) *dieselben* sind, und das wird im allgemeinen nicht der Fall sein.

Betrachten wir nach dieser Vergleichung zwischen (18) und (17) nun die Gleichung (17) für sich, so braucht man nur das Hauptglied $D\,\delta\,tang\,\alpha$ auszurechnen, weil dieses die anderen weit überwiegt; dasselbe giebt, in der angedeuteten Näherung, den Distanzfehler $D' - D = D\,\delta\,tang\,\alpha$ oder $100\,\delta\,tang\,\alpha$ in $^0/_0$ von D.

Hiernach ist folgendes Täfelchen zur Übersicht berechnet:

Distanzfehler $D' - D$ wegen Lattenschiefe. (19)

Lattenschiefe		Neigung der Ziellinie α					
		0°	5°	10°	20°	30°	45°
δ	$\delta\varrho$	%	%	%	%	%	%
1:100	1° 34′	0,0	0,1	0,2	0,4	0,6	1,0
1:50	1° 9′	0,0	0,2	0,4	0,7	1,2	2,0
1:25	2° 18′	(0,0)	0,3	0,7	1,5	2,3	4,0

Der hier angenommene letzte Wert $\delta = 1:25$ oder rund 2° kann etwa die Unsicherheit der Lattenaufstellung von freier Hand, ohne Richte-Hilfsmittel, bedeuten, und der erste runde Wert $\delta = 1:100$ oder 0° 34′ wird wohl immer noch grösser sein, als der Aufstellungsfehler mit Dosen-Libelle, aber Haltung von freier Hand.

Wendet man ein Latten-*Stativ* oder Streben an, so kann man die Lotstellung so genau machen, dass der Einfluss von δ verschwindend wird.

§ 161. Genauigkeit des Faden-Distanzmessers.

Das Grund-Fehlergesetz für die Distanzmessung zwischen zwei festen Fäden haben wir bereits in § 156. als Fall 1) behandelt; es lautet nach (10) S. 558:

$$\delta E = \frac{\delta}{s}\,E \tag{1}$$

wo δE der mittlere Fehler der gemessenen Entfernung E, ε der distanzmessende (parallaktische) Winkel und δ der mittlere Zielfehler für beide Fäden ist. (Für *einen* Faden wäre also entsprechend $\delta_1 = \delta : \sqrt{2}$.)

Statt ε wollen wir in (1) die Multiplikations-Konstante k einführen, $k = 1 : \varepsilon$, also:

$$\delta E = k \, \delta E \tag{2}$$

Hier ist δ in analytischem Masse zu nehmen; nimmt man als Grenzfall $\delta = 1''$; d. h. in der Formel $\delta = 1'' : 206\,265''$, und setzt man zugleich $k = 100$, so wird nach (2):

$$\frac{\delta E}{E} = \frac{100}{206\,265} = 0{,}0005 \text{ oder } 0{,}05\,\%. \tag{3}$$

Wenn es also gelingt, den Zielfehler an beiden Fäden zusammen auf $1''$ herunter zu bringen (also an einem Faden nur $1 : \sqrt{2} = 0{,}7''$), und wenn man die Konstante $k = 100$ nimmt, so kann man Distanzmessungen auf etwa $0{,}05\,\%$ genau machen.

Wie wir nachher sehen werden, ist das die äusserste, je zu erreichende Genauigkeitsgrenze.

Aus den zwei Formeln (1) und (2) sieht man auch, dass es für die Genauigkeit günstig ist, die Konstante k klein, oder den Gesichtswinkel ε gross zu machen.

Der am meisten gebrauchte Werte $k = 100$ und $\varepsilon = 0^\circ\,34'\,23''$ ist hauptsächlich wegen der bequemen Multiplikation mit der runden Zahl $k = 100$ beliebt. Für kürzere Entfernungen könnte man wohl noch $k = 50$ (mit $\varepsilon = 1^\circ\,8'\,45''$) anwenden, was im Vergleich mit $k = 100$, doppelte Genauigkeit gäbe.

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen zu Genauigkeits-*Versuchen* übergehend, können wir eine schon früher bei der Bestimmung von k in § 158. (2) bis (6) S. 566 angestellte Berechnung mittlerer Fehler hier nochmals benützen. Wir haben dort in (5) S. 566 gefunden, dass der mittlere Fehler einer Bestimmung von $\frac{100\,l}{E-c}$ den Wert $\pm 0{,}00086$ hatte. Dabei ist aber zu beachten, dass eine solche Bestimmung das arithmetische Mittel von 5 Einzelablesungen war; wir müssen daher, wenn wir allgemein durch Vorsetzen des Zeichens δ einen mittleren Fehler bezeichnen, hiernach setzen:

$$\delta\left(\frac{100\,l}{E-c}\right) = 0{,}00086\,\sqrt{5} = \pm\,0{,}00192 = \pm\,0{,}192\,\% \tag{4}$$

Dieses ist sofort der mittlere Fehler einer Distanzmessung in Teilen der Entfernung, denn wegen $k = 100$ ist $100\,l = E$, und $E - c$ kann hier $= E$ gesetzt werden, und es gilt $E - c$ oder E hiebei als fehlerfrei; die Gleichung (4) kann also so geschrieben werden:

$$\frac{\delta E}{E} = \pm\,0{,}00192 \text{ oder } 0{,}192\,\% \tag{5}$$

Ein ähnliches Neben-Ergebnis hat uns auch die Ausgleichung in (14) § 158. S. 568 für das *Porro*-Fernrohr Fig. 3. § 163. geliefert, nämlich ebenfalls einen mittleren Fehler von $0{,}20^m$ auf 100^m, und nach diesen zwei Versuchen können wir schon mit einiger Zuverlässigkeit sagen, dass ein Faden-Distanzmesser, mit $k = 100$, die Entfernungen mit einem mittleren Fehler von etwa $0{,}2\,\%$ oder $1 : 500$ giebt.

Eine andere Art von Genauigkeits-Bestimmungen erhalten wir dadurch, dass wir die Zielung auf *dieselbe* Lattenstellung mehrfach wiederholen. So liessen wir zu einem Genauigkeitsversuche auf einer von 30^m zu 30^m abgemessenen 300^m langen Geraden, die Latte *fünf*mal hin- und hergehen, und lasen bei jedem Hin- oder Hergang alle 10 Lattenstellungen unabhängig ab. Z. B. für $D = 120^m$ wurde folgendes erhalten:

$D = 120^m$		l	v	v^2	
	Hingang	$l = 1{,}685^m$	$v = -1{,}4^{mm}$	$v^2 = 1{,}96$	
	Hergang	1,683	+ 0,6	0,36	
	Hingang	1,685	− 1,4	1,96	$\delta l = \sqrt{\frac{19{,}20}{4}}$
	Hergang	1,685	− 1,4	1,96	
	Hingang	1,680	+ 3,6	12,96	$= \pm 2{,}19^{mm}$ (6)
	Mittel	1,6836	0,0	19,20	

Dieser Versuch mit je 10 Lattenstellungen, und teils 5fachem, teils 4fachem Hin- und Hergang wurde an 4 Tagen unabhängig wiederholt, so dass die in der nachfolgenden Tabelle (7) angegebenen 40 Werte m erhalten wurden. Das Fernrohr (Karlsr. Sammlung Nr. 15) hatte 25fache Vergrösserung. Der oben beispielshalber ausgerechnete Wert $\delta l = \pm 2{,}19^{mm}$ erscheint in folgender Tabelle, unter III mit $D = 120^m$, wodurch auch alles andere genügend erklärt ist.

Nr.	D	Mittlerer Latten-Ablesungsfehler δl I	II	III	IV	Mittel δl	$\frac{\delta l^{mm}}{D^m}$
	m	mm	mm	mm	mm	mm	
1.	30	0,50	0,55	0,45	0,58	± 0,52	0,0177
2.	60	1,00	0,67	0,00	1,59	1,00	0,0167
3.	90	0,58	2,23	1,80	2,73	1,99	0,0221
4.	120	2,06	0,89	2,19	3,91	2,51	0,0209
5.	150	0,41	6,73	4,56	5,38	4,88	0,0325
6.	180	5,00	5,48	4,18	8,17	5,90	0,0328
7.	210	2,50	7,42	6,12	8,21	6,45	0,0307
8.	240	5,78	4,47	13,51	8,37	8,75	0,0365
9.	270	13,15	8,36	(20,00)	13,80	11,55	0,0427
10.	300	8,17	8,94	7,42	12,58	9,49	0,0316

(7)

Die Mittelwerte δl sind quadratische Mittel, z. B. das erste:

$$\sqrt{\frac{0{,}50^2 + 0{,}55^2 + 0{,}45^2 + 0{,}58^2}{4}} = \pm 0{,}52.$$

Es ist nun augenscheinlich, dass die Quotientenwerte $\frac{\delta l}{D}$ *nicht* konstant sind, sondern mit wachsendem D selbst zunehmen. Dieses ist eine bekannte Erscheinung, welche sich durch manches erklären lässt, z. B. durch Luftzittern und dadurch, dass die Lattenfelder (Latte Fig. 3. S. 376), welche hauptsächlich auf Entfernungen bis zu 100^m berechnet sind, bei 200^m und 300^m undeutlich werden, u. s. w.; auch Schwankungen der *von freier Hand* gehaltenen Latte können mitwirken. Mag nun der Grund liegen wo er will, für die Verhältnisse unserer der Praxis entsprechenden Versuche besteht das Wachsen des Zielfehlers.

Wir haben die Quotienten in der letzten Spalte der Tabelle (7) durch folgende Anschlussformel dargestellt:

$$\frac{\delta l^{mm}}{D^m} = 0{,}0148 + 0{,}00826 \frac{D^m}{100} \quad (8)$$

oder für δl und D in Metern:

$$\frac{\delta l}{D} = 0{,}0000148 + 0{,}00000826 \frac{D}{100} \quad (9)$$

Multipliziert man dieses mit ϱ'', so bekommt man den mittleren Zielfehler in Sekunden:

$$\frac{\delta l}{D}\varrho = \delta = 3{,}05'' + 1{,}70'' \frac{D}{100} \tag{10}$$

Multipliziert man (9) mit $k = 100$, so erhält man den mittleren relativen Distanzfehler für $k = 100$:

$$\frac{\delta D}{D} = 0{,}00148 + 0{,}000826 \frac{D}{100} \tag{11}$$

Nach (10) und (11) berechnet man zur Übersicht die folgende Tabelle:

Entfernung D	Zielfehler δ	Distanzfehler für $k = 100$ δD	$100 \frac{\delta D}{D}$	
0^m	$\pm 3{,}0''$	. .	$\pm 0{,}15$ %	(12)
50	3,9	$0{,}10^m$	0,19	
100	4,8	0,23	0,23	
200	6,4	0,62	0,31	
300	8,2	1,20	0,40	

Der Zielfehler δ gilt für *beide* Fäden, man hätte also für *einen* Faden nur $3{,}0 : \sqrt{2} = 2{,}1''$ u. s. w.

Nach diesen eigenen Versuchen zitieren wir noch zwei Versuchsreihen von *Helmert* und *Stambach.*

Helmert hat in der „Zeitschr. für Verm. 1874“, S. 325—334, 1875, S. 359—362 und in der „Zeitschr. des österr. Ingenieur- und Architekten-Vereins 1875“, S. 154—157, Genauigkeitsuntersuchungen mit einem Tachymeter von *Starke* mitgeteilt. Dieser Tachymeter hat die *Porro*sche Konstruktion, Fernrohr nur 29^{cm} lang, 35^{mm} Objektivöffnung, 30 fache Vergrösserung, Konstante $k = 200$, die Neigung der Ziellinien gegen den Horizont betrug im Mittel 6°, die Distanzen waren zwischen 30^m und 550^m, die Resultate werden schliesslich zusammengefasst in der Formel:

$$(\delta D)^2 = 0{,}20 + \frac{1}{60}\left(\frac{D}{100}\right)^4 \tag{13}$$

wobei alle Masse in Metern genommen sind. Das konstante Glied 0,20 wird durch Lattenschwankungen erklärt. Dieser Formel entsprechen folgende Zahlenwerte:

$D =$	$\delta D =$			
50^m	$\pm 0{,}45^m = \pm 0{,}9$ %	von D		(14)
100^m	$\pm 0{,}5$ m	0,5 %	„ „	
200^m	$\pm 0{,}7$ m	0,35 %	„ „	
300^m	$\pm 1{,}2$ m	0,4 %	„ „	
400^m	$\pm 2{,}1$ m	0,5 %	„ „	

Stambach teilt in der „Zeitschr. für Verm. 1875“, S. 183—188, 13 Versuche mit, angestellt mit einem Instrument von *Kern* mit 24 facher Vergrösserung und der Konstanten $k = 99{,}54$. Die Entfernungen waren zwischen 42^m und 103^m und die Zielneigungen mit einer Ausnahme zwischen 0° und 10°. Nachdem die ursprünglich mit $k = 100$ berechneten Distanzen auf $k = 99{,}54$ reduziert waren, ergab sich ein durchschnittlicher Distanzfehler von 0,18 % oder ein mittlerer Fehler von 0,25 % (nach *Helmerts* Neuberechnung, „Zeitschr. für Verm. 1875“, S. 360).

Die im vorstehenden mitgeteilten Genauigkeitsangaben beziehen sich auf Instrumente, welche in optischer Beziehung nahezu gleichwertig sind, welche sich aber durch die Grösse der Konstanten k unterscheiden.

Nach (2) ist der mittlere Distanzfehler proportional k. Wir reduzieren hiernach die teilweise mit verschiedenen k gefundenen mittleren Fehler auf die Konstante $k = 100$, und erhalten folgende Zusammenstellung:

Beobachter	Distanz D	Mittlerer Fehler δD	Konstante k	$\frac{100}{k}\,\delta D$
Helmert	100^m	$\pm 0{,}50^m$	200	$\pm 0{,}25^m$
Stambach	100^m	$\pm 0{,}25^m$	100	$\pm 0{,}25^m$
Jordan	100^m	$\pm 0{,}23^m$	100	$\pm 0{,}23^m$

(15)

Man findet also in Übereinstimmung, dass für kleinere Entfernungen von etwa 100^m und mit Anwendung der Distanzmesser-Konstanten $k = 100$, der mittlere Distanzmesser-Fehler $\pm 0{,}25^m$ oder $^1/_4\,\%$ der Entfernung beträgt. Hiebei ist eine nur geringe Neigung der Ziellinien gegen den Horizont vorausgesetzt.

Wenn die vorstehenden Mittelwerte als der Praxis entsprechend angesehen werden können, so ist doch unter günstigen Umständen die Faden-Distanzmessung einer noch erheblich grösseren Genauigkeit fähig, wie schon daraus geschlossen werden kann, dass der Zielfehler auf 300^m Entfernung nach unserer Tabelle (12) $\delta = \pm 8{,}2''$ oder für *einen* Faden $\delta_1 = 8{,}2 : \sqrt{2} = \pm 5{,}8''$ für ein Fernrohr mit 25facher Vergrösserung entschieden zu gross ist, wenn man es mit klarer Luft und scharfen, festen Zielpunkten zu thun hätte.

Wir haben hier eine schöne Versuchreihe zu erwähnen, welche *R. Wagner* in der „Zeitschrift für Vermessungswesen 1886“, S. 49—60, S. 81—90 und S. 97—104 veröffentlicht hat. Das Fernrohr hatte 27^{mm} Öffnung, 34^{cm} Brennweite, *Ramsden*sches Okular mit 25facher Vergrösserung, Konstante $k = 100$. Die Latte war in Decimeter und Centimeter geteilt, und hatte für den einen Faden eine scharfe Null-Marke. Die Latte wurde rechtwinklig zur Ziellinie gestellt, und in jeder Stellung durch zwei Streben gestützt. Im allgemeinen wurden die „günstigsten äusseren Umstände“ aufgesucht. Eine ausführlich vorgelegte Versuchsreihe giebt 24 Ablesungen auf wechselnde Entfernungen zwischen 97^m und 103^m, woraus der mittlere Zielfehler $\delta = \pm 1{,}29''$ berechnet wird. Solcher Versuche sind 18 angestellt, mit Entfernungen zwischen 50^m und 500^m, und aus allem zusammen ergab sich ein mittlerer Zielfehler:

$$\delta = \pm 1{,}18'' \text{ oder } \delta_1 = 1{,}18 : \sqrt{2} = 0{,}8'' \text{ für 1 Faden.}$$

Der mittlere Distanzmessungs-Fehler für 100^m Entfernung ist hiernach für $k = 100$, $\delta D = 10000 \times 1{,}18 : \varrho'' = 0{,}057^m$ oder $0{,}057\,\%$. Dieses ist nur etwa $^1/_4$ des mittleren Fehlers nach *Helmert, Stambach, Jordan* [s. o. (15)], und das scheint in Verbindung mit früherem, zu folgendem allgemeinem Ausspruch zu berechtigen:

Die Faden-Distanzmessung ist einer grossen Genauigkeit fähig. Der mittlere Fehler kann auf $0{,}05\,\%$ — $0{,}1\,\%$ herabgebracht werden, aber nur, wenn die „günstigsten äusseren Umstände“, Feststellung der Latte durch *Streben**), u. s. w. und ein sehr guter Beobachter vorhanden sind.

---

*) Eine Latte mit einer Strebe ist in dem späteren § 163. Fig. 7. S. 597 dargestellt.

Unter mittleren Verhältnissen (z. B. ohne Streben) hat man in der Ebene auf etwa 0,25 % mittleren Fehler zu rechnen, und im Gebirge mit steilen Zielungen, wenn man die Lattenstellung einem gewöhnlichen Gehilfen ohne besondere Überwachung überlässt, steigt der mittlere Entfernungsfehler wohl auf 1 %.

Anhang.

Scharfe Einstellung des Okulars.

Eine Nebenfrage soll zum Schluss noch beantwortet werden, nämlich die Frage, ob eine ungenaue Einstellung des Okular-Auszuges einen merklichen Fehler an der Distanzmessung hervorbringen kann?

In Folge der bedeutenden sogenannten Akkomodation des Auges kann man nämlich wohl eine Lattenablesung machen, wenn auch das Fadennetz nicht genau denjenigen Abstand vom Objektiv hat, den es nach der Theorie haben sollte.

Setzen wir ein einfaches Fernrohr voraus, so gilt nach (1) § 157. S. 560 mit Fig. 3. S. 560 die Gleichung:

$$l = \frac{p}{d} D \tag{16}$$

Dabei ist d der Abstand des Fadennetzes vom Objektiv; und eben dieses d soll nach der vorstehenden Überlegung mit einer gewissen Einstellungs-Unsicherheit behaftet sein, welche mit $\pm \delta d$ bezeichnet sei. Durch Differentiieren von (16) findet man:

$$\delta l = -\frac{p D}{d^2} \delta d \tag{17}$$

Hiebei ist genähert $D = k l$, also auch $\delta D = k \delta l$, das giebt:

$$\frac{\delta D}{D} = -\frac{p \delta d}{d^2} k \tag{18}$$

Weiter kann man genügend genau $d = f$ setzen, und dann ist $d : p = f : p = k$, und indem δl als $\pm$ genommen wird, hat man dann:

$$\frac{\delta D}{D} = \pm \frac{\delta d}{f} \tag{19}$$

Um die Unsicherheit $\pm \delta d$ der Okular-Einstellung zu bestimmen, haben wir einen Versuch in der Weise angestellt, dass die Okular-Röhre mit einer Millimeter-Teilung versehen wurde, deren Stellung an einem Zeiger z jedesmal abgelesen wurde, wenn eine Latteneinstellung gemacht war. Die Latte wurde hiezu auf einer abgemessenen Geraden 5 mal hin und her geschickt, und die Mittel der je 5 Zeiger-Ablesungen sind in folgender Tabelle als beobachtet z' aufgeführt, während die zuhörigen z durch Ausgleichung erhalten sind.

Entfernung D	Okular-Auszug z'	z	v	Entfernung D	Okular-Auszug z'	z	v
10^m^	3,0^mm^	2,8^mm^	— 0,2^mm^	120,5^m^	26,5^mm^	26,3^mm^	— 0,2^mm^
15	11,3	11,6	+ 0,3	150,5	26,3	26,7	+ 0,4
20	15,8	15,9	+ 0,1	180,5	27,3	26,9	— 0,4
25	18,2	18,4	+ 0,2	210,5	27,0	27,2	+ 0,2
30,5	19,7	20,2	+ 0,5	240,5	27,1	27,3	+ 0,2
30,5	20,1	20,2	+ 0,1	270,5	27,5	27,4	— 0,1
60,5	24,4	24,3	— 0,1	300,5	27,8	27,5	— 0,3
90,5	25,5	25,6	+ 0,1	∞	27,4	28,3	+ 0,9

Die hier sogleich mit aufgeführten Werte z wurden durch eine Ausgleichung gewonnen, welche auf die Formel führte:

$$\frac{1}{D} + \frac{1}{520,7 - z} = \frac{1}{492,4} \quad \text{oder} \quad z = 520,7 - \frac{492,4\, D}{D - 492,4}$$

Dieser Ausgleichung entsprechen auch die in der Tabelle eingesetzten übrigbleibenden Fehler v, deren Quadratsumme $= 1,81$ ist. Da jeder als beobachtet eingeführte Wert z' das Mittel aus 5 gleichartigen unabhängigen Einzel-Einstellungen ist, haben wir den mittleren Fehler *einer* solchen Einstellung:

$$\delta\, d = \sqrt{5} \sqrt{\frac{1,81}{14}} = 0,80^{mm}$$

Setzt man dieses in (19) ein, und nimmt dazu in runder Zahl die Objektivbrennweite $= 300^{mm}$, so wird:

$$\frac{\delta\, D}{D} = \pm\, 0,0027 \text{ oder rund } 0,3\,\%.$$

Dieses ist ein Fehlerbetrag, welcher neben den übrigen Fehlern nicht zu vernachlässigen ist. Man kann diesen Fehler unschädlich machen, wenn man vor jeder Latten-Ablesung die Okular-Auszugsteilung auf die ausgeglichenen Werte z scharf einstellt. Unsere bisherigen Versuche haben eine Wirkung in dem erwarteten Sinne gezeigt. Entscheidende Versuche wären noch zu machen.

§ 162. Distanzmesser ohne Latte.

I. Basislineal mit zwei Fernröhren.

I. Das einfachste, seit Jahrhunderten immer wieder von Zeit zu Zeit versuchte Prinzip eines Distanzmessers ohne Latte ist das Basislineal mit zwei Fernröhren. Dieses ist in Fig. 1. angedeutet; $AB = b$ ist das Basislineal, P der entfernte Punkt, dessen Entfernung E bestimmt werden soll, und zwar durch den Winkel ε, den die zwei Ziellinien AA' und BB' gegeneinander bilden; oder es ist ε der Winkel zwischen AA' und der Parallelen AA'' zu BB'.

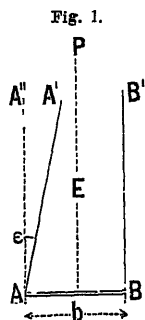
Fig. 1.

Aus b und ε berechnet man:

$$E = \frac{b}{\varepsilon} \text{ bezw. } \frac{b}{\varepsilon}\,\varrho \tag{1}$$

Das Fehlergesetz hiefür haben wir bereits in (12) § 156. S. 559 entwickelt, nämlich:

$$\delta\, E = \frac{\delta}{b}\, E^2 \text{ bezw. } = \frac{\delta}{\varrho''}\, \frac{E^2}{b} \tag{2}$$

Setzt man hier als Grenzfall $\delta = 1''$ und $b = 1^m$ so bekommt man:

Fehlerverhältnisse für $b = 1^m$ und $\delta = \pm 1''$.

Entfernung E	Parallaxe $\varepsilon = \frac{b}{E}\varrho$	Mittlerer Fehler δE	$100\,\frac{\delta E}{E}$
50^m	1° 8′ 45″	$\pm 0{,}012^m$	0,024 %
100	34′ 23″	0,048	0,048
200	17′ 11″	0,19	0,097
500	6′ 52″	1,21	0,24
1000	3′ 26″	4,85	0,48
2000	1′ 43″	19,4	0,97
5000	0′ 41″	121,2	2,42

(3)

Wenn man nun die hier gemachte Annahme, dass der mittlere Parallaxenfehler nur $\delta = \pm 1''$ sei, erfüllen könnte, so wäre das ganze Verfahren für viele Zwecke ein sehr gutes; z. B. eine Entfernung von 1000^m ohne Entsendung einer Latte oder irgend welche Vorbereitungen, durch einfaches Zielen, mit einem mittleren Fehler von rund 5^m oder 0,5 % zu bestimmen, das wäre für Feld- und Landmessung, für militärische und viele andere Zwecke höchst willkommen, auch nur die Hälfte oder ein Viertel dieser Genauigkeit zu erreichen, wäre schon wertvoll; und solche theoretische Fehler-Überlegungen scheinen seit Jahrhunderten bis heute die „Erfinder" von Parallaxen-Distanzmessern mit zwei Fernröhren geleitet zu haben.

Die älteste uns bekannt gewordene genauere Nachricht hierüber betrifft das „*Pantometrum Paceccianum seu instrumentum novum pro elicienda ex una statione distantia loci inaccessa*, erfunden vom Grafen *Pacecco ob Ucedos*", beschrieben von *P. Mayer*, Mannheim 1767. (*S. Johann Tobias Maeyer*, „Gründlicher und ausführlicher Unterricht zur praktischen Geometrie". Göttingen 1816. II. S. 331 und *Netto*, „Handbuch der gesammten Vermessungskunde", Berlin 1820. I. S. 213.)

Dieses Pantometrum besteht aus 2 im Abstand von $1-2^m$ verbundenen Fernröhren.

Ferner ist hiebei zu erwähnen ein Distanzmesser von *Breithaupt* vom vorigen Jahrhundert; derselbe besteht aus einer als Basis dienenden Schiene von 1^m Länge, deren jedes Ende ein Fernrohr trägt. (Dieses Instrument befindet sich im Gewerbemuseum in Kassel.) Aus neuerer Zeit kann genannt werden *Hermanns* und *Kürten* Entfernungsmesser, für ganz Preussen patentierte neue Erfindung (s. „Zeitschr. für Verm. 1876" S. 443 u. 455).

Eine zusammenfassende Mitteilung über solche und andere Instrumente gab *Schell*, „Distanzmesser mit der Basis an dem Instrumente". Wiener Sitzungsberichte 75. Band. S. 145—161, Abdruck in *Carl*s Repertorium 1878. S. 455—470.

Nach *Roskiewicz* hat *Starke* ein Instrument mit $1{,}518^m$ langem Basislineal und 2 an dessen Enden angebrachten Fernröhren mit Mikrometerschrauben konstruiert. Die Konstanten wurden aus Versuchsmessungen bestimmt. Genauigkeit:

Distanz	*mittlerer Fehler*
500^m	$\pm\ 1{,}9^m = 1 : 263$
1000	$7{,}7 = 1 : 130$
2000	$30{,}8 = 1 : 65$
3000	$69{,}2 = 1 : 43$
4000	$123{,}0 = 1 : 33$
5000	$192{,}2 = 1 : 26.$

Vor kurzem hat sich auch ein solches Instrument von *Cerebotani* gezeigt, bei welchem die Parallaxe ε durch eine an sich nicht unzweckmässige Hebel-Übersetzung gemessen wird. Wir haben hierüber in der „Zeitschrift f. Verm. 1884", S. 389—396 berichtet.

Diesem Instrumente wurde eine wissenschaftliche Untersuchung zu Teil, über welche in der „Zeitschrift für Instrumentenkunde, 1886" S. 77 und S. 125 berichtet wurde (vgl. auch „Zeitschrift f. Verm. 1886" S. 129 und S. 214).

Die zwei Fernröhre mit 20facher Vergrösserung im Abstand von 1^m bilden mit einem Stahlgestell einen Apparat von 17,5 Kilogramm Gewicht. Der mittlere Parallaxenfehler wurde $\delta = \pm 2{,}5''$ gefunden.

Diese Versuche und Berechnungen sind insofern von Wert, als sie die Anschauung bestätigt haben, dass auf diesem Weg für Feld- und Landmessung nichts zu gewinnen ist.

II. Theodolit mit excentrischem Fernrohr.

Der Theorie nach zu der soeben beschriebenen Gattung gehörend, aber praktisch doch verschieden, ist der Theodolit mit excentrischem Fernrohr zu nennen, denn damit kann man, das Fernrohr durchschlagend und in zwei Lagen messend, die Parallaxe bestimmen, welche zu der zweifachen Excentricitäts-Basis gehört. Z. B. in Fig. 2. S. 167 hätte man 2φ und 2ψ als Parallaxen für die beiden Zielpunkte A und B. Wenn man einen guten Theodolit mit bedeutender Excentricität des Fernrohrs ohnehin hat, kann wohl der Fall eintreten, dass man ihn so zu gewissen Zwecken mit Vorteil brauchen kann. Die Fehlertheorie ist dieselbe wie oben bei (1) bis (3).

III. Reflexions-Distanzmesser.

Ein Haupt-Übelstand des Basislineals mit *zwei* Fernröhren, nämlich die unbedingt *feste* Aufstellung, kann vermieden werden, wenn man die zwei Lichtstrahlen, welche von dem fernen Punkte nach beiden Basis-Endpunkten gehen, durch Reflexion vereinigt, ebenso wie es beim Spiegelsextanten oder dem Winkelspiegel geschieht.

Dieser Gedanke wurde im Jahre 1802 von dem k. k. Oberlieutenant *Fallon* in der „Monatlichen Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde", Gotha 1802, 6. Band, S. 246—252 dargelegt, und seit jener Zeit haben Verschiedene hiernach Versuche angestellt (s. „Zeitschr. f. Verm. 1887", S. 217 u. ff.).

Wir geben das mathematische Prinzip und die Beschreibung eines Versuchsmodells in den umstehenden Fig. 2. und Fig. 3. S. 588.

In Fig. 2. ist L die 1 Meter lange Basisschiene, auf welcher eine Alhidade A mit grossem Spiegel S angebracht ist. Der Drehpunkt der Alhidade befindet sich in der Mitte von S. Rechts ist ein Fernrohr F auf der Schiene L rechtwinklig befestigt, und vor demselben ist der kleine Spiegel s ebenfalls fest auf L und schief gegen die Fernrohr-Richtung angebracht. Ein entfernter Punkt P sendet Licht sowohl auf den grossen Spiegel S, und von da durch doppelte Reflexion auf dem Wege $P S s F$ in das Fernrohr F, als auch direkt über den kleinen Spiegel s hinweg in das Fernrohr F. Oder kurz: die ganze Einrichtnng ist diejenige des gewöhnlichen Spiegelsextanten. Die Alhidade A hat eine Armlänge r, gemessen von dem Drehpunkt in S bis zu der Teilung, auf welcher die Drehung abgelesen wird (am rechten Ende von Fig. 2., wo eine gewöhnliche Brems- und Mikrometer-Vorrichtung nebst Lupe angedeutet ist). Das Ganze ist m Schwerpunkt bei Q unterstützt.

Fig. 2.
Reflexions-Distanzmesser.

(Hannov. Sammlung.)

Fig. 3.
[illegible] Reflexions-[illegible]

Betrachten wir nun Fig. 3., welche zum Teil dieselben Bezeichnungen wie Fig. 2. wieder enthält, so wird es sich darum handeln, eine Beziehung zwischen der zu messenden Entfernung E und der Ablesung $n - i$ an der Alhidade herzustellen.

Ist die unmittelbare Alhidaden-Ablesung $= n$, so führen wir mit der Differenz $n - i$ sofort auch die Ablesung i ein, welche der Alhidadenstellung für unendliche Entfernung E entspricht, oder kurz: i ist der Wert, den man beim Sextanten den Indexfehler nennt.

Für unendlich grosses E nimmt der linksseitige Lichtstrahl die Lage $B'S$ an, und der Alhidadenarm, welcher sich mit dem Spiegel S dreht, habe hiefür die Lage SB, während SA zu SP gehört. Die beiden Alhidadenlagen SB und SA schliessen also den Winkel $\frac{\varepsilon}{2}$ ein, welchen auch die beiden Spiegel S und s miteinander bilden, denn für unendliche Punktentfernung, d. h. für den linksseitigen Strahl B' sind beide Spiegel S und s parallel. Dass aber der Spiegelwinkel, welcher mit $\frac{\varepsilon}{2}$ bezeichnet ist, wirklich die Hälfte der Parallaxe ε ist, (wie vom Sextanten bekannt ist), kann unmittelbar aus der Figur 3. eingesehen werden, nämlich:

$$\varepsilon + 2\gamma + (180^\circ - 2\beta) = 180^\circ$$

und
$$\frac{\varepsilon}{2} + 90^\circ + \gamma + 90^\circ - \beta = 180^\circ.$$

Ist nun b die Länge des Basislineals, r die Länge des Alhidadenarms, $n - i$ die vom Indexfehler befreite Alhidadenablesung und E die zu bestimmende Entfernung, so hat man:

$$b = E\varepsilon \quad , \quad n - i = r\frac{\varepsilon}{2}$$

also:
$$E = \frac{b\,r}{2\,(n-i)} \tag{4}$$

Damit ist das Prinzip mechanisch und mathematisch genügend dargelegt. Einige Versuche über Genauigkeit haben wir in der „Zeitschr. für Verm. 1887“, S. 225 und S. 561 mitgeteilt, vgl. „Zeitschr. für Instrumentenkunde 1888“, S. 143.

IV. Okular-Auszug des Fernrohrs.

Es ist schon mehrfach der Versuch gemacht worden, die Okular-Verschiebung eines Fernrohrs zum Distanzmessen zu verwenden. Es ist anzuführen:

Distanzmesser von *Emsmann*. *Poggendorff*s „Annalen“ 124. Band (1865), S. 337—343 und *Carl*s „Repertorium der physikalischen Technik“ I. Band, S. 242—247.

Distanzmesser von *Merz*. *Carl*s „Repertorium“ I. Band (1865), S. 248—251.

Veranlasst durch Begutachtung eines hierauf bezüglichen Patentgesuches, und um zugleich den Einfluss der Okulareinstellung auf die Faden-Distanzmessung zu untersuchen, haben wir den am Schluss von § 161. S. 585 erwähnten Versuch gemacht, aus welchem sich ergab, dass die mittlere Unsicherheit einer Okular-Einstellung $= \pm\, 0{,}8^{mm}$ war.

Wenn man die Grösse d des Okular-Auszuges zur Messung einer Zielweite D benützen will, so hat man hiezu die Gleichung:

$$\frac{1}{D} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f}$$

Wenn man nach D und nach d differentiiert und die Änderungen mit $\pm\,\delta D$ und $\pm\,\delta d$ bezeichnet, so bekommt man:

$$\frac{\delta D}{D^2} \pm \frac{\delta d}{d^2} = 0 \quad , \quad \delta D = \pm \frac{D^2}{d^2}\,\delta d.$$

Man kann wohl genähert $d = f$ setzen, also ist:

$$\delta D = \frac{D^2}{f^2}\,\delta d \tag{5}$$

Der mittlere Fehler δd wurde oben $= \pm\, 0{,}8^{mm}$ gefunden, bei Zielpunkten von verschiedener Beleuchtung wird man aber wohl eine noch grössere Unsicherheit der Einstellung bekommen, wir nehmen deswegen in runder Zahl $\delta d = \pm\, 1^{mm} = 0{,}001^{m}$. Nimmt man hiezu ein möglichst langes Fernrohr, d. h. $f = 1^{m}$, so wird:

$$\varDelta D = 0{,}001\, D^2 = 10\left(\frac{D}{100}\right)^2 \tag{6}$$

womit berechnet wird:

Gemessene Entfernung	$D = 5^{m}$	10^{m}	50^{m}	100^{m}	200^{m}	300^{m}	400^{m}
Mittlerer Fehler	$\varDelta D = 0{,}025^{m}$	$0{,}1^{m}$	$0{,}25^{m}$	10^{m}	40^{m}	90^{m}	160^{m}

Um das Prinzip der Okularverschiebung für Distanzmessung brauchbar zu machen, müsste man ein Fernrohr mit sehr grosser Brennweite (10^m—50^m) konstruieren, wobei die Brennweitenlänge durch zahlreiche Reflexionen in kleinem Raum untergebracht werden könnten.

V. *Distanzmesser in weiterem Sinne.*

Man hat häufig für militärische und andere Zwecke kleine Grundlinien von etwa 50—100^m mit Bändern u. dergl. gemessen und darauf eine Art von Triangulierung gegründet.

Von Mess-Einrichtungen dieser Art erwähnen wir hier das *Bauernfeind*sche Distanzmessungs-Prisma, welches in *Bauernfeind*s „Elemente der Vermessungskunde“ 6. Aufl. 1. Band S. 192 und S. 395 beschrieben ist. Dieses Prisma ist *nahezu* rechtwinklig gleichschenklig, hat aber nicht einen Winkel von 90° zwischen den gleichen Schenkeln, sondern einen Winkel φ, welcher etwas kleiner als 90° ist. (Das Prisma hat also *nahezu* die Form unserer Fig. 2. S. 11.) Die Anwendung dieses Prismas zur Distanzmessung besteht darin, dass ein langgestrecktes gleichschenkliges Dreieck gebildet wird, dessen Basis unmittelbar gemessen oder abgeschritten wird, und dessen beide Basiswinkel gleich dem genannten Winkel φ sind. Zwischen der Basis und den Langseiten des Dreiecks besteht ein konstantes Verhältnis (etwa 1 : 100), folglich bekommt man die Langseiten sofort als das entsprechende Vielfache der Basis. Übrigens kann man solche mittelbare Distanz-Bestimmungen viel freier mit gewöhnlichen Winkel-Messinstrumenten, z. B. mit Spiegelsextanten machen, indem man rasch eine Art von Triangulations-Messung ausführt und für die Berechnung eine Tabelle anlegt. Ein passend zugerichteter *Rechenschieber* dürfte sich noch mehr als eine Tabelle empfehlen.

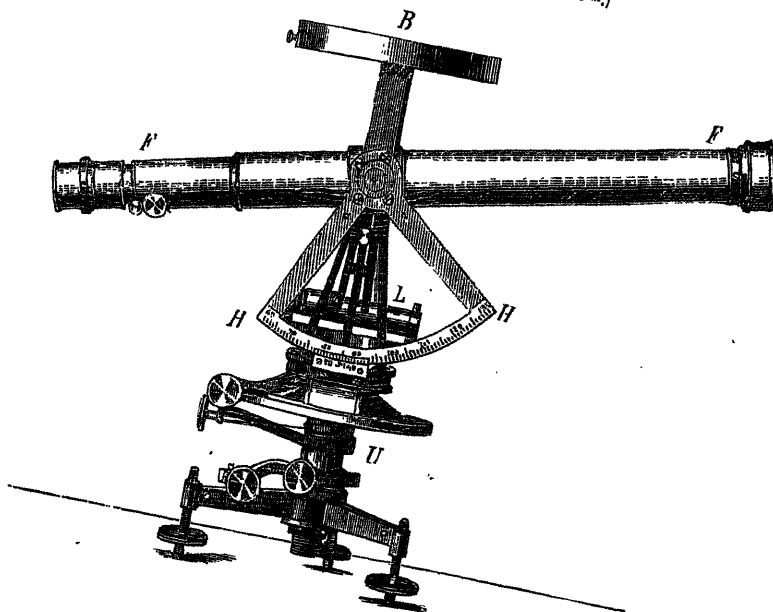
Kapitel XIV.

Tachymetrie.

§ 163. Tachymeter-Theodolite.

Unter *Tachymeter* versteht man einen Theodolit, welcher ausser der Einrichtung zum Messen von Lagewinkeln und Höhenwinkeln noch mit einem Distanzmesser und mit einem Kompass versehen ist. Da es bei einem „Tachymeter“ weniger auf grosse Genauigkeit, als auf „schnelle Messung“ ankommt, so sollen die einzelnen Teile eines Tachymeters weniger fein, als vielmehr kräftig und handlich gearbeitet sein. Z. B. genügt es häufig, wenn die Kreisteilungen und die Libellen einzelne Minuten noch angeben. Manche Tachymeter-Theodolite leisten in Bezug auf Winkelmessung so viel als ein gewöhnlicher guter Theodolit, und machen dann die Anschaffung eines solchen neben dem Tachymeter überflüssig; ob dieses nützlich ist, kommt auf die Umstände an.

Da wir die Theodolitmessungen im allgemeinen bereits früher in Kapitel VI. S. 134—186 beschrieben haben, haben wir jetzt unter Vorführung verschiedener Tachymeter auf S. 591—594 nur noch das zu behandeln, was diese Instrumente von gewöhnlichen Theodoliten unterscheidet, oder sonst besonders ausgeprägt ist.

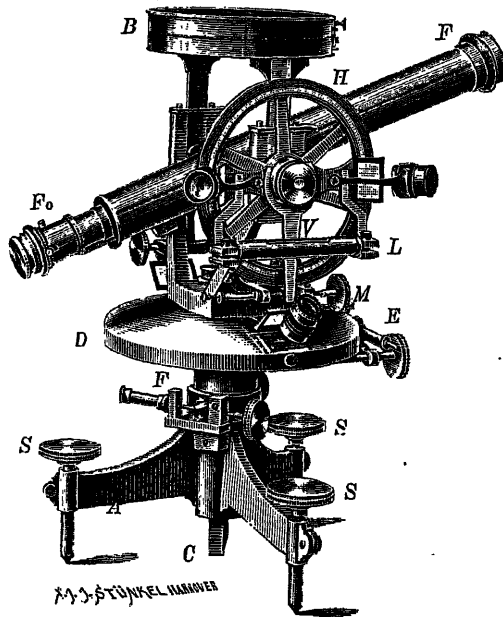
Fig. 1.
Einfacher Tachymeter mit Höhen-Sektor und Büchsen-Kompass.
(Massstab 1 : 5, Fernrohrlänge = 50cm.)

(Karlsruher Sammlung.)

Dieses Instrument wurde mit Benützung der Bestandteile einer *Reichenbach*schen Kippregel für unsere Karlsruher Sammlung konstruiert. Das Untergestell *U* hat die gewöhnliche Theodolit-Anordnung mit doppeltem Vertikal-Axensystem. Das 50cm lange Fernrohr hat 48cm Objektiv-Brennweite, 39mm Öffnung, *Huyghens*sches Okular mit 30facher Vergrösserung. Die Fäden sind fest. Die Distanzmesser-Konstante ist = 71,29. Das Fernrohr *F* kann wegen seiner Länge nicht unmittelbar durchgeschlagen werden; es wird aber mit Ausheben aus den Lagern ausnahmsweise durchgeschlagen. Der Höhenkreisbogen *HH* ist mit dem Fernrohr fest verbunden, geht mit ihm auf und nieder, ein Nonius unten an dem Bogen giebt Ablesung von Zenit-Distanzen auf etwa 1′ genau, ohne Lupe. Die Alhidaden-Längs-Libelle *L* muss bei jeder Höhenwinkel-Messung einspielen. Zum allgemeinen Einstellen ist eine Dosen-Libelle in der Mitte angebracht. Der Indexfehler des Höhen-*Sektors* kann durch Durchschlagen nicht eliminiert oder bestimmt werden, sondern verlangt besondere Behandlung nach Fig. 5., Fig. 5a oder Fig. 6. (S. 595—596).

B ist ein oben aufgesetzter Büchsen-Kompass, etwas hochbeinig gestellt, wegen der Erhebung des Fernrohrs *F*.

Fig. 2.

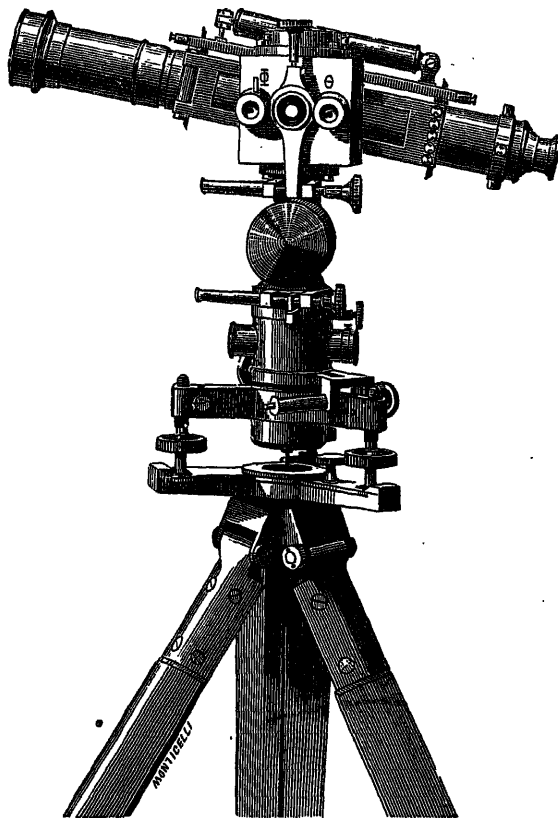
Tachymeter mit Höhenkreis und Büchsen-Kompass.

(Fernrohrlänge $= 38^{cm}$, Durchmesser des Horizontalkreises $= 18^{cm}$).

(Hannov. Sammlung; Mechaniker *Randhagen.*)

Das ganze Untergestell dieses Instrumentes ist dasselbe, wie bei dem gewöhnlichen Theodolit Fig. 1. S. 141. Das Axen-System ist doppelt, mit Hemmung und Mikrometer sowohl bei F als bei E. Der Höhenkreis ist mit dem Fernrohr fest verbunden, und hat eine besondere Libelle L mit Hebel V und Einstellschraube M, wie schon beim Höhenwinkelmessen S. 414—415 angegeben wurde. Zum allgemeinen Horizontalstellen ist in der Mitte eine Dosen-Libelle angebracht. Das Fernrohr ist ziemlich lang, um gute Distanzmessung zu erhalten; Brennweite $= 38^{cm}$.

Das *Huyghens*sche Okular F_0 mit 20facher Vergrösserung hat die Einrichtung zum Stimmen der Konstanten k, welche schon in § 159. Fig. 2. S. 571 beschrieben wurde. Oben ist ein Büchsen-Kompass aufgesetzt wie bei Fig. 1. S. 591.

Der Höhenkreis giebt an zwei Nonien mit Lupen 30″ abzulesen, der Horizontalkreis 20″, so dass man auch kleine Triangulierungen mit dem Instrumente machen kann.

Fig. 3.
Tachymeter Cleps nach Porro.
(Fernrohrlänge = 85cm).

(Hannov. Sammlung.)

Dieses italienische Instrument hat die Eigentümlichkeit, dass der Horizontalkreis und der Höhenkreis beide sehr *klein* sind; sie haben nur Durchmesser von 5^{cm} und sind in den viereckigen Kasten eingeschlossen, welcher bei Φ und Θ Okular-Öffnungen für die etwa 25fach vergrössernde Mikroskope hat, mit denen jene zwei Kreischen abgelesen werden. Das Mikroskop Φ wirkt hiebei auf den Horizontalkreis durch Prismen-Reflexion. Die Kreise sind unmittelbar in Zehntel-Centesimalgrade geteilt, und werden mit einem Faden nach Zehnteln hievon, also $0{,}01^{\circ}$ ($= 0{,}54'$), schätzungsweise abgelesen (vgl. die früheren Bemerkungen S. 132 und S. 152 unten). Diese kleinen Kreise geben so eine gute Genauigkeit, aber nur bei guter Beleuchtung. Das Fernrohr hat die *Porro*sche Konstruktion und ist in Bezug auf die Instrumentenmitte anallatisch.

Das Gesichtsfeld hat fünf Fäden, wie nebenstehende Fig. 3a. zeigt. Bei 100^m Zielweite sieht man $ab = a_1 b_1 = 100^{cm}$, $a a_1 = b b_1 = 60^{cm}$, $a_1 b_1 = 40^{cm}$, es ist also $k = 100$ für ab und für $a_1 b_1$, und $k = 250$ für $a_1 b$.

Fig. 3a.

In dem unteren cylindrischen Teile des Instrumentes befindet sich eine durchgehende cylindrische Röhre, welche einen Röhren-Kompass enthält. (Einiges Weitere hierüber s. „Zeitschr. f. Verm. 1888“, S. 152—155).

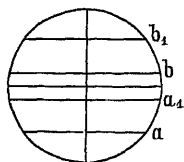



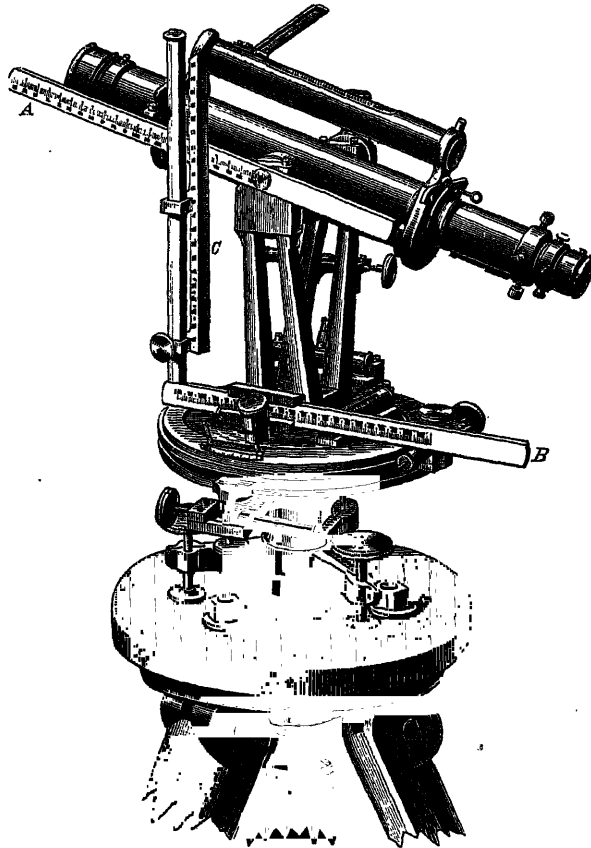
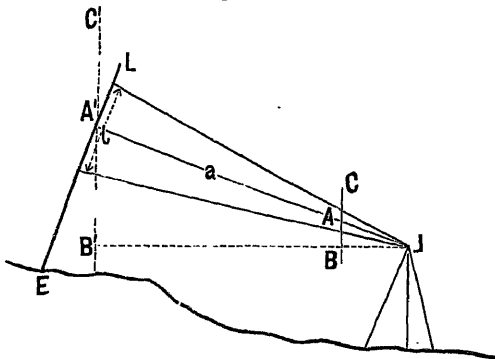
Fig. 4.
Schiebe-Tachymeter nach *Kreuter*, bzw. *Wagner*.

(Hannov. Sammlung; Mechaniker *Ertel & Sohn*, bzw. *Meyerstein*.)

Fig. 4a.

Dieses Instrument wirkt zunächst als Theodolit mit gewöhnlichem Horizontalkreis. Das Fernrohr ist mit Distanzfäden versehen, und wird mit einer Latte EL gebraucht, welche nach Fig. 4a. jeweils rechtwinklig zur Ziellinie JA' gestellt wird.

Die Neigungen der Ziellinie werden nicht an einem Höhenkreis, sondern an der lotrechten Teilung C des Tachymeters gemessen; und ausserdem sind an dem Tachymeter noch zwei Distanz-Teilungen, eine

schiefe Teilung A und eine wagrechte Teilung B vorhanden, und man kann mit den drei Teilungen A, B und C, welche den Geraden JA', JB' und $B'A'$ von Fig. 4a. S. 594 entsprechen, unmittelbar am Tachymeter die Entfernungen und Höhen einstellen, bzw. ablesen, in folgender Weise:

Man habe mit dem Distanzmesser an der Distanzlatte $A'L$ die schiefe Entfernung a abgelesen, dann stellt man diese auf der schiefen Tachymeter-Fernrohr-Teilung A ein, indem man die lotrechte Teilung C mit ihrer Kante bis zu dem Striche a heranschiebt. Dann kann man an den Teilungen B und C (Fig. 4. S. 594) zwei Masse JB und BA (Fig. 4a. S. 594) ablesen, welche den Naturmassen JB' und $B'A'$ proportional sind, also verjüngt gemessene Horizontal-Entfernung und Höhe sind.

Höhen-Sektor.

Wenn man nicht einen ganzen Höhenkreis, sondern wie bei dem Tachymeter (Fig. 1. S. 591) nur einen Höhen*bogen* hat, so kann man den Indexfehler nicht durch Durchschlagen bestimmen oder eliminieren.

Fig. 5.
Messung von A nach B.

Fig. 5a.
Messung von B nach A.

Man kann dann etwa wie beim Nivellier-Instrument S. 349 und S. 350 verfahren, indem man dabei den Nonius des Höhenbogens auf 90° stellt.

Oder kann man gegenseitige Höhenwinkel messen, wie in Fig. 5. und Fig. 5a. angedeutet ist.

Man wählt hiezu zwei Fest-)unkte A und B aus (etwa 100m 'on einander entfernt). Man stellt las Instrument über A auf, misst ie Instrumentenhöhe i_1 ab, und .berträgt diese Höhe i_1 auf einem tab in der Höhe $k_1 = i_1$ nach B.)ieses wird mit Vertauschung von l und B wiederholt, wobei wieder $_2 = i_2$ sein muss. Hat man nun n ersten Falle die Zenit-Distanz $_1$ nach der Marke k_1 gemessen, ıd im zweiten Falle die Zenit-Distanz z_2 nach der Marke k_2, so muss sein:

$$z_1 + z_2 = 180°$$

ıd der hier etwa sich zeigende Widerspruch ist der doppelte Indexfehler. Wenn an z. B. findet: $z_1 = 88° 46'$ $z_2 = 91° 2'$

ist: $z_1 + z_2 = 179° 48' = 180° - 12'$

:er es ist die Summe $z_1 + z_2$ um 12' zu klein, und jede einzelne Zenit-Distanz ist n 6' zu klein, also die Index-Korrektion $= + 6'$, weshalb nun so zu rechnen ist:

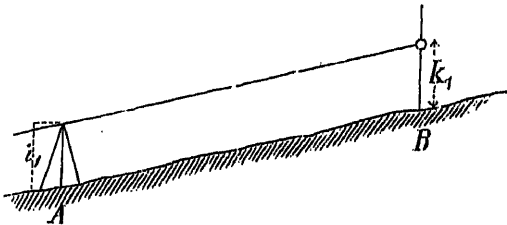
	von A nach B	von B nach A
Gemessene Zenit-Distanzen:	$z_1 = 88° 46'$	$z_2 = 91° 2'$
Verbesserung:	$+ \quad 6'$	$+ \quad 6'$
Verbesserte Zenit-Distanzen:	$88° 52'$	$91° 8'$
Höhenwinkel:	$+ 1° 8'$	$- 1° 8'$

Zu noch weiterer Verdeutlichung ist Fig. 6. gezeichnet, wobei die Höhen i_1, k_1, i_2, k_2 von Fig. 5. und Fig. 5a. sämtlich als *gleich* angenommen sind.

Fig. 6.
Gegenseitige Zenit-Distanzmessung.

Will man den Indexfehler nicht in Rechnung bringen, sondern wegschaffen, so rechnet man die vom Indexfehler befreite Zenit-Distanz aus, und stellt dann den Nonius so, dass er, während das Fadenkreuz den betreffenden Zielpunkt deckt, und die Libelle einspielt, jene verbesserte Zenit-Distanz zeigt. Im Falle des vorstehenden Beispiels hat man, während das Instrument in *B* steht, den Nonius so zu stellen bzw. zu verschieben, dass er die berechnete wahre Zenit-Distanz 91° 8′ zeigt.

Obgleich man sich in dieser oder auch noch in manch anderer Weise wohl helfen kann, wenn man nicht einen Vollkreis, sondern nur einen Sektor für die Höhenwinkel hat, so ist doch der Sektor mit der Unmöglichkeit, den Indexfehler jederzeit zu bestimmen, eine dauernde Quelle von Widerwärtigkeiten, weshalb ein Vollkreis wie in Fig. 2. S. 592 jedenfalls zu empfehlen ist.

Distanz-Latten.

Im Anschluss an die Tachymeter-Theodolite beschreiben wir sogleich auch die zugehörigen Distanz-Latten, welche auf Seite 597 in Fig. 7., 8. und 9. abgebildet sind.

Zunächst kann jede Nivellierlatte Fig. 7. S. 597 (vgl. die frühere Fig. 3. S. 376) geradezu als Distanzlatte verwendet werden. Wenn die Distanzmesser-Konstante $k = 100$ ist, so zählt 1 Centimeter der Latte = 1 Meter Entfernung u. s. w. Da jedoch die *Nivellier*latten gewöhnlich nur bis 50^m Entfernung, höchstens bis 100^m Entfernung gebraucht werden, die Distanzlatten dagegen bis $200—300^m$, und in der Topographie sogar bis 600^m, so ist die Felder-Einteilung oder Bezifferung doch bei Distanzlatten häufig anders zu wählen als bei Nivellierlatten. Den entschiedensten Gegensatz zur Nivellierlatte zeigt die Distanzlatte Fig. 8. S. 597, welche bei der topographischen Abteilung der Landes-Aufnahme im Gebrauche ist; dieselbe hat *keine Bezifferung*, sondern nur Felder-Einteilung nebst zwei roten Querstäben *R* und *R′*, welche das Hauptmass 100^m angeben. Die Gesamtlänge dieser Latte ist 3^m, sie wirkt also (mit $k = 200$) bis 600^m Entfernung, und die Entfernung zwischen den Fäden wird an den Feldern abgezählt.

Diese Latten werden lotrecht gebraucht. Die Latte Fig. 7. S. 597 hat schon als Nivellierlatte eine hinten anzuschraubende Dosen-Libelle zum Vertikalstellen; bei der Topographie wird die Latte Fig. 8. S. 597 ohne ein solches Hilfsmittel schlechthin von freier Hand lotrecht gestellt.

Endlich zeigt noch Fig. 9. S. 597 die Einrichtung zum Schiefstellen einer Latte nach einer Mitteilung von *Helferich* in der „Zeitschr. f. Verm. 1880“, S. 252. Mit Hilfe des Diopters *cd* zielt der Lattenträger nach dem Instrument, und stellt mit der Strebe *ab* die Latte so schief fest, dass die Ziellinie *cd* des Diopters das Tachymeter-Instrument treffend erhält.

Fig. 7.
Nivellierlatte
als Distanzlatte
für $k = 100$.

Fig. 8.
Distanzlatte
mit Felder-Teilung
ohne Bezifferung
$k = 200$.

Massstab = 1 : 5 der natürl. Grösse.

Topogr. Abteilung der
Landes-Aufnahme.

(Hannov. Sammlung.)

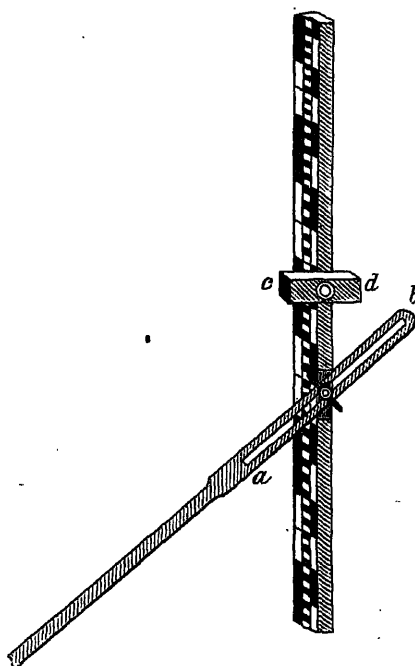
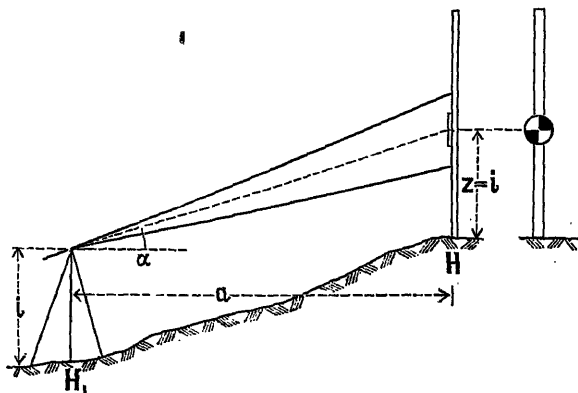
Fig. 9.
Distanzlatte für die Stellung rechtwinklig
zur Ziellinie.
cd Diopter, rechtwinklig zur Latte,
ab Strebe zum Feststellen.
Massstab etwa 1 : 10 der natürl. Grösse.

Zielscheibe. Zur Ausrüstung der Latte gehört noch eine Zielscheibe von etwa 10—20^{cm} Durchmesser, welche jeweils in der Instrumentenhöhe i an der Latte angeschraubt wird, wie in Fig. 10. mit $z = i$ angedeutet ist. Auf diese Scheibe wird jedesmal der Mittelfaden des Fernrohrs eingestellt, ehe der Höhenwinkel α abgelesen wird, welchen man zur Höhenberechnung braucht.

Fig. 10.
Instrumentenhöhe i, Zielscheibe in der Höhe z.

Wenn nun H_1 die Höhe des Instrumenten-Fusspunktes ist (etwa H_1 über N. N.), und H die Höhe des Latten-Fusspunktes, so hat man nach Andeutung von Fig. 1. zuerst allgemein:

$$H = H_1 + a \tan \alpha + i - z, \tag{1}$$

wenn aber $z = i$ genommen wird, so ist einfacher:

$$H = H_1 + a \tan \alpha \tag{2}$$

Offenbar ist es das einfachste, $z = i$ zu nehmen, was man nötigenfalls auch ohne Scheibe machen kann, indem man am Instrumente i abmisst, z. B. $i = 1{,}44^m$, und dann den Mittelfaden auf den Strich 1,44 der Latte stellt. Bei einfachen Zügen, ohne Nebenpunkte, ist das das einfachste für je *eine* Rückzielung und *eine* Vorzielung; wenn dagegen *viele* Zielungen von einem Stand aus genommen werden sollen, so lohnt es sich wohl, für die Dauer eines Standes, $z = i$ mit der Scheibe zu stellen.

Wir haben statt dessen auch schon so verfahren, dass für die Dauer einer ganzen Aufnahme z *konstant*, etwa $z = 2^m$, gestellt wurde. Misst man dann auf jedem Stande i ab, so ist auch $i - z$ für den einzelnen Standpunkt konstant, und man rechnet dann zuerst $H_1 + i - z$ aus, und dann:

$$H = (H_1 + i - z) + a \tan \alpha \tag{3}$$

Es sollte dadurch bezweckt werden, dass der Höhenwinkel α, welcher auf die Zielscheibe gemessen, zur *Höhen*berechnung nötig ist, zugleich auch möglichst dem zur *Reduktion auf den Horizont* (für $\cos^2 \alpha$) nötigen Winkel α gleich werde. Indessen kommt es bei der Horizont-Reduktion ($\cos^2 \alpha$) auf 10′—20′ im Winkel α meist nicht an, so das man den Reduktionswinkel α wohl nicht besonders aufzuschreiben braucht, sondern dafür einfach den für die Höhe gültigen Winkel α nimmt, auch wenn beide α nicht völlig gleich sind. Wo es (bei sehr steilen Zielungen) besonders darauf an-

kommt, kann man immer bei diesen beiden Höhenwinkeln α *besonders* dafür sorgen, dass sie nahezu gleich werden, oder man kann sie ausnahmsweise getrennt messen.

Wenn man hier einführt, dass die horizontale Entfernung a selbst nicht unmittelbar, sondern durch den Faden-Distanzmesser bestimmt wird, so hat man nach (5) § 160. S. 574:

$$a = k\, l \cos^2 \alpha$$

also:

$$a \tan \alpha = k\, l \cos \alpha \sin \alpha = \frac{1}{2}\, k\, l \sin 2\, \alpha$$

Damit wird die vorhergehende Gleichung (2):

$$H = H_1 + \frac{1}{2}\, k\, l \sin 2\, \alpha \qquad (4)$$

Vergleichungen verschiedener Tachymeter.

Die verschiedenen Vorzüge und Nachteile der auf Seite 591, 592, 593 und 594 dargestellten vier Tachymeter-Instrumente werden sich nur im Zusammenhang mit den im nächsten § 164. zu beschreibenden Hilfsmitteln für Distanz-Reduktion und Höhenbestimmung endgültig vergleichen lassen; indessen einige Gesichtspunkte zu solcher Vergleichung werden sich auch jetzt schon gewinnen lassen.

Da die Frage des Höhen-*Sektors* oder Höhen-*Vollkreises* bereits oben S. 595 erörtert ist, ist zwischen unseren zwei Instrumenten Fig. 1. S. 591 und Fig. 2. S. 592 kein wesentlicher Unterschied mehr; nur etwa die besondere Libelle L für den Höhenkreis ist bei Fig. 2. S. 592 als günstig hervorzuheben, und zugleich bei Fig. 3. S. 593 und Fig. 4. S. 594 als fehlend zu erwähnen, denn die bei diesen zwei letzteren Instrumenten auf *dem Fernrohr selbst* fest angebrachte Libelle ist für Höhenwinkel nicht ebenso gut wie die unten feste, bzw. mit besonderer Einstellschraube versehene Libelle.

Der Kompass ist in Fig. 1. S. 591 und Fig. 2. S. 592 als aufgesetzter *Büchsen*-Kompass angeordnet; bei Fig. 3. S. 593 ist ein *Röhren*-Kompass beigegeben, und bei Fig. 4. S. 594 fehlt der Kompass. Einen Kompass halten wir bei allen „Tachymeter"-Instrumenten für nötig. Der Röhren-Kompass von Fig. 3. S. 593 giebt zwar die *einzelne* Ablesung schärfer als der Büchsen-Kompass; im ganzen kommt man aber über eine Genauigkeit von etwa 0,1° bei solchen Instrumenten doch nicht hinaus; weshalb uns der gewöhnliche Büchsen-Kompass, wobei alles offen liegt, lieber ist als der mehr komplizierte Röhren-Kompass. Das hängt noch damit zusammen, dass der Röhren-Kompass nur mittelbar, zum Orientieren des Horizontalkreises gebraucht werden kann, was immer einige Zeit in Anspruch nimmt, und nur bei sehr vielen darauffolgenden Zielungen sich lohnt; dagegen bei wenigen Zielungen, etwa bei nur je *zwei* in einem Zuge, liest man viel besser geradezu an der Nadel selbst ab, was man braucht, statt vorher den Kreis zu orientieren und dann am Kreise abzulesen. Auch für die *Prüfung* der Magnetnadel ist die volle Büchsen-Teilung von 0°—360° günstiger als die nur wenige Grade umfassende Teilung eines beigegebenen Röhren-Kompasses.

Die Kreis-Ablesungen sollen bequem auf *einen* Blick geschehen. Wir haben daher bei Fig. 1. S. 591 grobe Teilungen, ohne Lupe, auf etwa 1′ genau; bei Fig. 2. S. 592 sind wir zur Lupe zurückgekehrt. Die Teilungen sind aber doch so kräftig, und die Lupen mit so grossem Gesichtsfeld, dass die Ablesungen, auch im Dunkel des Waldes u. s. w., rasch und bequem gehen.

Die feinen Kreischen des italienischen „Cleps"-Instrumentes Fig. 3. S. 593 können nach unserer Ansicht keine Vorteile bieten; zudem werden sie bei schwacher Beleuchtung, im Walde u. s. w., kaum abzulesen sein.

Der *Schiebe-Tachymeter* Fig. 4. S. 594 unterscheidet sich wesentlich von den drei vorhergehenden. Der Gedanke, die Entfernung und die Höhe an zwei Massstäben geradezu zum Ausdruck zu bringen, ist von zwei Seiten nahezu gleichzeitig verwirklicht worden, wie aus zwei Schriften zu ersehen ist:

1) Patentiertes Quotier-Instrument für generelle Aufnahmen, in koupiertem Terrain, von *Franz Kreuter*, Ingenieur, Wien 1874,
2) *C. Wagners* Tachygraphometer, beschrieben von *Tinter* in der „Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Vereins 1876", Heft V—VIII; desgleichen mitgeteilt von *O. Fennel* in der „Zeitschr. f. Verm. 1878", S. 57—77.

In folgender Fig. 11. haben wir den Oberteil des *Fennel-Wagner*schen Tachymeters bzw. Tachygraphometers, nach der Mitteilung in der „Zeitschr. f. Verm. 1878", S. 59 dargestellt. Dieser Oberteil kann *entweder* auf ein theodolitartiges Untergestell gesetzt werden und giebt dann eine Einrichtung ähnlich wie Fig. 4. S. 594 *oder* er kann auf dem Messtisch gebraucht werden.

Obgleich die Einrichtung im ganzen schon bei Fig. 4. S. 594 beschrieben wurde, geben wir zur Übersicht hier zu Fig. 11. nochmals die theoretische Fig. 12.

Fig. 11.
Wagner-Fennels Tachygraphometer.

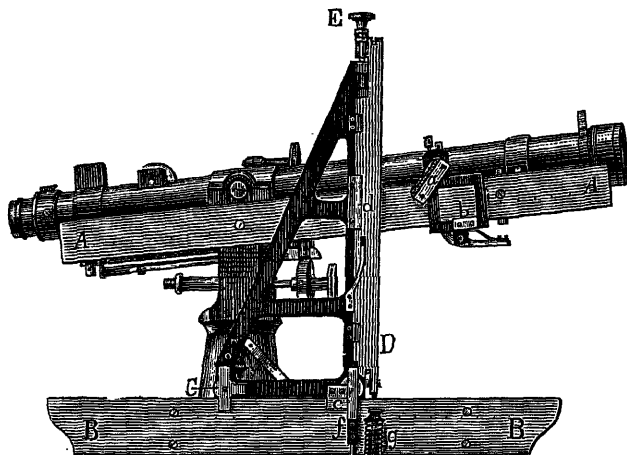



Fig. 12.

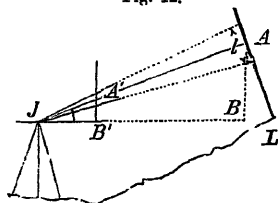



Fig. 11.		Fig. 12.
Lineal AA'	entspricht	der Ziellinie $JA'A$
Lineal BB'	„	der Horizontalen $JB'B$
Massstab DE	„	der Vertikalen $B'A'$
Entfernung Ab	„	der Ablesung l oder $JA = kl$.

Als Instrumenten-Erklärung ist zu Fig. 11. noch zu bemerken:

b ein Nonius zum Einstellen der Distanz-Teilung auf AA.

a ein mit *b* beweglicher, zugleich drehbarer, Nonius zum Anschlagen an den Höhenmassstab DE.

CDE Projektionswinkel, mit Höhen-Massstab DE, welcher der Höhe nach verschiebbar ist und bei *d* auf bestimmte Höhe gestellt werden kann. Wenn AA parallel BB ist, so zeigen die Nonien *a* und *d* gleich.

c Nonius zum Ablesen der horizontalen Entfernung an dem Lineal BB.

f Verbindungsstück zwischen dem Projektionswinkel CDE und dem Lineal BB.

g eine Hülse mit Spiralfeder-Spannung zum Niederdrücken einer Nadel und Einstechen der Entfernung auf den Messtisch.

Die Vergleichung der Schiebe-Tachymeter mit den Kreis-Tachymetern scheint sich so zu stellen:

Der Schiebe-Tachymeter, welcher geradezu die Horizontalentfernung und die Höhe an einer horizontalen und an einer vertikalen Teilung abzulesen gestattet, hat den Vorzug der Unmittelbarkeit und Anschaulichkeit und des Wegfalls von Berechnungen.

Andererseits ist es ein Übelstand, dass man dabei die Latte unbedingt *schief*, rechtwinklig zur Ziellinie stellen muss. Mag man unter Umständen diese Stellung ihrer selbst willen wählen, so ist doch gegenüber den Kreis-Tachymetern, bei welchen man in der Latten-Stellung freie Hand hat, der *Zwang* schiefer Stellung misslich (vgl. „Zeitschr. f. Verm. 1878", S. 76).

Wenn auch für die Einzellattenpunkte die Höhenskale ausreichend ist, so wird man mit einem solchen Instrument doch oft in Verlegenheit kommen, wenn man zu Anschlüssen, auf weitere Entfernungen u. s. w., trigonometrische Höhen messen will; für solche Zwecke müsste das Instrument, um allgemein brauchbar zu sein, einen *Höhenkreis* neben den Schiebeskalen doch haben.

Die Feld-Arbeitszeit wird durch die Schiebeskalen zu sehr in Anspruch genommen, denn es geht im Felde rascher und bequemer, einen Höhenwinkel an einem kräftig geteilten Kreise auf 1′ abzulesen, als eine Entfernung einzustellen und dann noch zwei Skalen abzulesen.

§ 164. Verschiedene Hilfsmittel für $cos^2 \alpha$ und $1/2 \, sin \, 2 \alpha$.

Für lotrechte Lattenstellung hat man nach (5) § 160. S. 574 die Gleichung:

$$a = k \, l \, cos^2 \alpha \qquad (1)$$

wo a die horizontale Entfernung, α der Neigungswinkel, l das an der lotrechten Latte abgelesene Stück und k die Distanzmesser-Konstante ist. Nennt man den Höhen-Unterschied h, zwischen der Fernrohrmitte und dem Zielpunkte des Mittelfadens an der Latte, so ist:

$$h = a \, tang \, \alpha = k \, l \, cos \, \alpha \, sin \, \alpha \qquad (2)$$

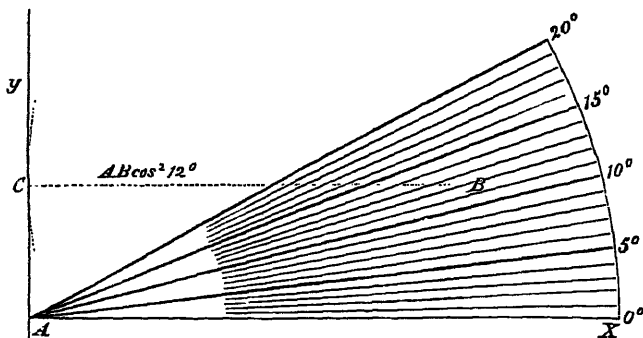
$$h = \frac{1}{2} k \, l \, sin \, 2 \alpha \qquad (3)$$

Die zwei Funktionen $\cos^2 \alpha$ und $\frac{1}{2} \sin 2\alpha$ sind es nun, welche uns zu beschäftigen haben, und wir haben die verschiedenen Hilfsmittel kennen zu lernen, welche man zum raschen Ausrechnen der Formeln (1) und (2) hat.

Graphische Hilfsmittel.

Zur Bestimmung von $l \cos^2 \alpha$ haben wir in Fig. 1. ein von uns konstruiertes Strahlen-Diagramm.

Fig. 1.

Strahlen-Diagramm für $l \cos^2 \alpha$ (alte Teilung).

Von einem Punkte A aus sind verschiedene Strahlen $A - 0°$, $A - 5°$, $A - 10°$ u. s. w. gezogen, jedoch nicht unter den Winkeln 5°, 10° u. s. w., welche den Strahlen beigeschrieben sind, sondern unter gewissen anderen Winkeln, welche so bestimmt werden: Wenn an einem Strahle AB ein Winkel α beigeschrieben ist, so sei der wirkliche Winkel $BAX = x$ bestimmt durch die Gleichung:

$$\cos x = \cos^2 \alpha \tag{4}$$

dann ist $BC = AB \cos x = AB \cos^2 \alpha$. Dieses giebt folgende Anwendung: Man nimmt $AB = l$ in den Zirkel, sticht B auf dem Strahle mit der Bezifferung α fest, dann beschreibt man mit dem linken Zirkelfuss einen flachen Bogen, welcher bei C berührend an AY anliegt. Damit kann man BC abnehmen, ohne den eigentlichen Berührungspunkt C zu kennen, und damit hat man das gesuchte $BC = l \cos^2 \alpha$.

Die Beziehung zwischen x und α ist durch die Gleichung (4) grundsätzlich bestimmt; da jedoch α und x kleine Winkel sind, ist die Gleichung (4) zur Ausrechnung nicht geeignet; eine schärfere Rechnung bekommt man, indem man setzt:

$$1 - \cos x = 1 - \cos^2 \alpha$$

dann ist
$$2 \sin^2 \frac{x}{2} = \sin^2 \alpha, \text{ also: } \sin \frac{x}{2} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{2}} \tag{5}$$

Zum scharfen Auftragen der Strahlen rechnet man wohl besser noch $\tan g\, x$ aus, wie folgende zwei Täfelchen zeigen:

$\cos x = \cos^2 \alpha$ *für alte Teilung:*

α	x	$tang\, x$	α	x	$tang\, x$	α	x	$tang\, x$
0°	0° 0′	0,0000	10°	14° 6′	0,2513	20°	27° 59′	0,5315
1	1 25	0,0247	11	15 30	0,2775	21	29 21	0,5625
2	2 50	0,0494	12	16 55	0,3040	22	30 43	0,5942
3	4 14	0,0742	13	18 18	0,3308	23	32 5	0,6267
4	5 39	0,0990	14	19 42	0,3581	24	33 26	0,6601
5°	7° 4′	0,1240	15°	21° 5′	0,3857	25°	34° 47′	0,6944
6	8 29	0,1491	16	22 29	0,4138	26	36 7	0,7296
7	9 53	0,1743	17	23 52	0,4424	27	37 27	0,7659
8	11 18	0,1997	18	25 15	0,4715	28	38 47	0,8033
9	12 42	0,2254	19	26 37	0,5012	29	40 6	0,8420
10	14 6	0,2513	20	27 59	0,5315	30	41 25	0,8819

$\cos x = \cos^2 \alpha$ *für neue Teilung:*

α	x	$tang\, x$	α	x	$tang\, x$	α	x	$tang\, \alpha$
0°	0° 0¯	0,0000	10°	14° 11¯	0,2254	20°	28° 05	0,4715
1	1 41	0,0222	11	15 52	0,2487	21	29 42	0,4982
2	2 83	0,0445	12	16 92	0,2722	22	30 80	0,5254
3	4 24	0,0667	13	18 32	0,2960	23	32 16	0,5531
4	5 66	0,0891	14	19 72	0,3200	24	33 53	0,5814
5°	7° 07¯	0,1115	15°	21° 11¯	0,3444	25°	34° 89¯	0,6104
6	8 48	0,1340	16	22 51	0,3690	26	36 24	0,6400
7	9 89	0,1566	17	23 90	0,3941	27	37 59	0,6703
8	11 30	0,1794	18	25 28	0,4194	28	38 94	0,7013
9	12 71	0,2023	19	26 67	0,4452	29	40 28	0,7332
10	14 11	0,2254	20	28 05	0,4715	30	41 61	0,7659

Hiernach lässt sich das Strahlen-Diagramm Fig. 1. S. 602 gross und scharf auftragen (bzw. lithographieren), dazu ist auch der nötige Massstab beizugeben.

Auch die Höhen kann man graphisch bestimmen, denn der Gleichung $h = a \tan \alpha$ entspricht einfach ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a und h und dem Winkel α. Da jedoch die Höhenwinkel α meist *klein* sind, und die Höhen h meist verhältnismässig genauer gewünscht werden als die Entfernungen a, so pflegt man die Zeichnung für $h = a \tan \alpha$ mit *überhöhten* Werten h' anzulegen.

So ist die nachfolgende Zeichnung Fig. 2. S. 604 mit 10facher Überhöhung gemacht.

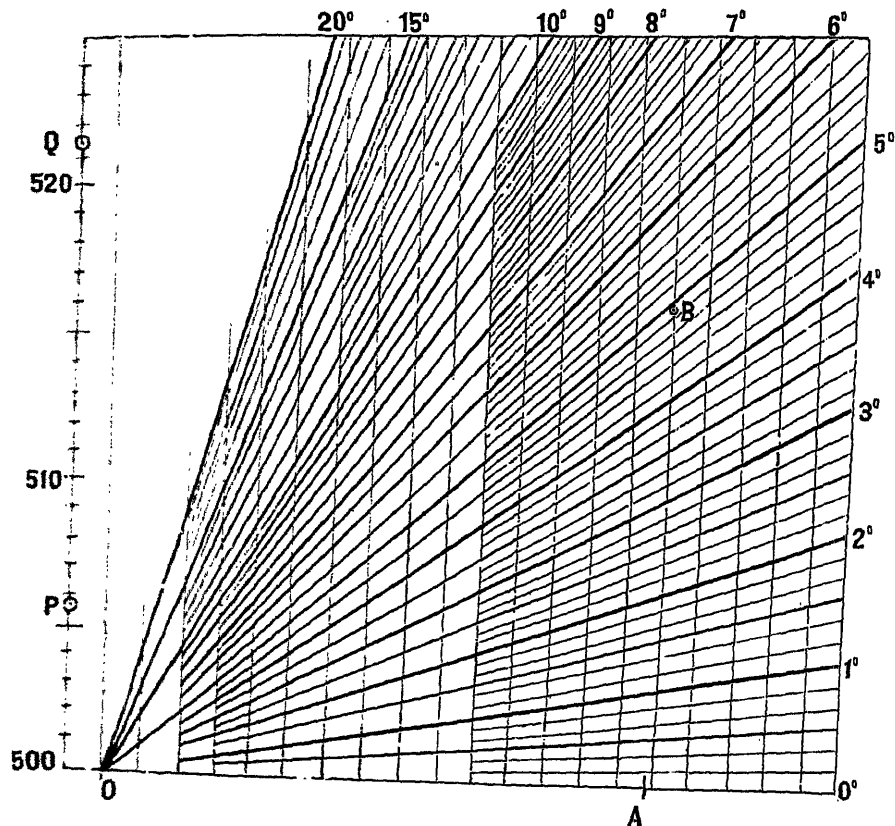
Wenn hiernach in Fig. 2. S. 604, $OA = a$ eine Horizontal-Entfernung ist, zu welcher ein Höhenwinkel α gehört, so erhält man den Wert $10\, OA \tan \alpha$, wenn man in der Ordinate von A hinauf geht bis zu dem Strahl, welcher die Bezifferung α trägt, d. h. von A nach B, und damit ist:

$$AB = 10\, OA \tan 4° 55'.$$

Diesen Längenwert kann man auf der linkseitigen Teilung von Fig. 2. in einen Zahlenwert umsetzen.

Fig. 2.

Strahlendiagramm für $h = a \tan \alpha$.

Wagrechter Massstab 1 : 2500, Höhenmassstab 1 : 250. Überhöhung 10 fach.

Man kann hiebei auch die Instrumentenhöhe i und die Zielhöhe z berücksichtigen und zugleich die Höhen über N. N. bestimmen.

Man hat hiezu nach Fig. 10. und Gleichung (3) § 163. S. 598:

$$H = (H_1 + i - z) + a \tan \alpha \tag{6}$$

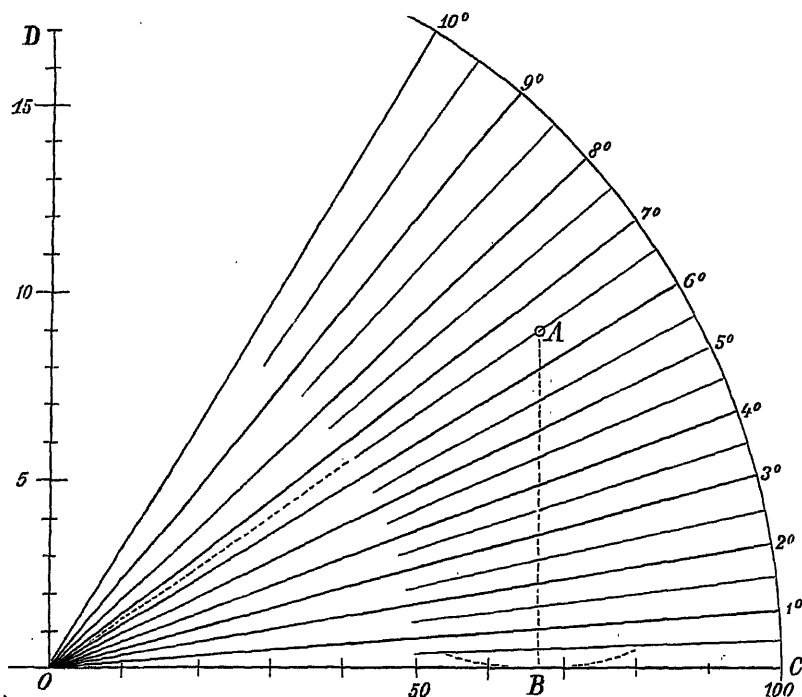
Man rechnet zuerst $H_1 + i - z$ aus und trägt es im Punkte P Fig. 2 auf, und wenn dann noch $PQ = a \tan \alpha$ (bezw. $= 10\, a \tan \alpha$) gemacht wird, so giebt Q in Fig. 2. offenbar geradezu die nach (6) zu bestimmende Höhe H über N. N. entsprechend der Angabe H_1 über N. N. Dass man hiebei z *konstant* haben kann, haben wir schon bei (1) und (3) § 163. S. 598 erwähnt.

Bei dem soeben beschriebenen Verfahren mit Fig. 2. ist vorausgesetzt, dass man die *wagerechten* Entfernungen a zur Verfügung habe. Wenn dieses nicht der Fall ist,

sondern die Lattenablesungen l selbst benützt werden sollen, so kann die nächste Zeichnung Fig. 3. benützt werden.

Fig. 3.

Strahlendiagramm für $h = \frac{1}{2}\, k\, l\, sin\, 2\,\alpha$.

Wagrechter Massstab = 1 : 100, Höhenmassstab = 1 : 20, Überhöhung = 5 fach

Das Diagramm Fig. 3. giebt die Funktion $\frac{1}{2}$ *sin* 2α in der Weise, dass z. B. wird:

$$A B = \tfrac{1}{2}\, O A\, sin\, 2 \times 6^\circ\, 30'$$

jedoch mit 5facher Überhöhung. Man nimmt also die unmittelbar abgelesene Distanz OA in den Zirkel, sticht dieselbe auf dem Strahl 6° 30′ ab, entnimmt dann, ebenfalls mit dem Zirkel, unter Befahren eines kurzen Bogens, die Höhe AB, welche man auf dem seitlich angebrachten Höhenmassstab entweder geradezu abmessen, oder wie in Fig. 2. sofort zu der Standpunkts-Konstanten $H_1 + i - z$ graphisch addieren kann.

Wenn die Multiplikations-Konstante k des Distanzmessers nicht = 100, sondern irgend eine nicht runde Zahl ist, so nimmt man $O A$ von einem entsprechend abgeänderten Massstab ab, oder man kann auch k in den Höhenmassstab verlegen.

Wenn man das Diagramm Fig. 3. auf stärkere Neigungen, bis zu 20°, anwenden will, so muss man auf starke Überhöhung des Ordinatenmassstabes verzichten, während das erste Diagramm Fig. 2. S. 604 jede beliebige Überhöhung haben kann.

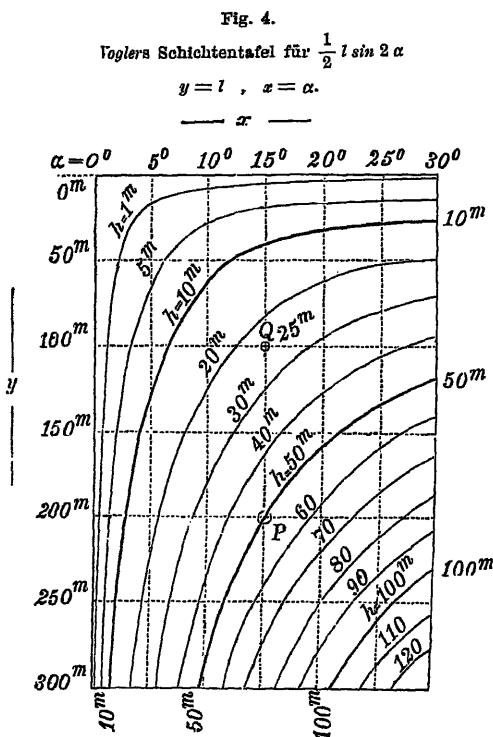
Ein graphisches Hilfsmittel von allgemeiner Bedeutung, welches sich auch auf den vorliegenden Fall anwenden lässt, sind *Schichtentafeln.*

Eine Anwendung hievon auf die Funktionen $l \cos^2 \alpha$ und $\frac{1}{2} l \sin 2\alpha$ giebt *Vogler* „Anleitung zum Entwerfen graphischer Tafeln, Berlin 1877" S. 156 und S. 158 mit Tafel V. und Tafel VI.

Wir haben *Voglers* zweite Schichtentafel in nachfolgender Fig. 4. verkleinert dargestellt. Um z. B. $\frac{1}{2} l \sin 2\alpha$ für $l = 200^m$ und $\alpha = 15°$ zu bestimmen, sucht

Fig. 4.

Voglers Schichtentafel für $\frac{1}{2} l \sin 2\alpha$

$y = l$, $x = \alpha$.

man links $y = l = 200^m$ und oben $x = \alpha = 15°$; von den so erhaltenen zwei Punkten fährt man parallel x und y zusammen, auf den Punkt P. Dieser Punkt P liegt auf der Schichtenlinie $h = 50^m$, folglich ist $\frac{1}{2} l \sin 2\alpha = \frac{1}{2} 200 \sin 30° = 50{,}0^m$.

In dieselbe Klasse von Vorrichtungen wie die Diagramme gehört auch das in Fig. 5. S. 607 verkleinert dargestellte Schiebebrett von Ingenieur *Teischinger* („Zeitschr. des österr. Ing.- und Arch.-Vereins 1883", Heft 4, „Zeitschr. für Instrumentenkunde 1884," S. 92—95 und „Zeitschr. des Hannov. Ing.- und Arch.-Vereins 1884", S. 462, und 1885, S. 215.)

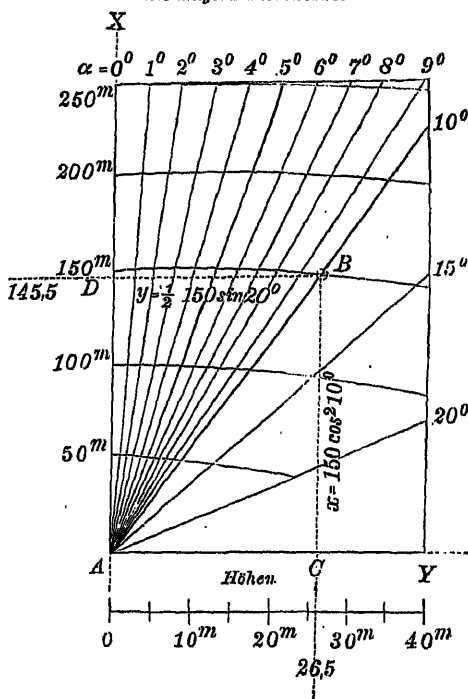
Für irgend einen Punkt B ist:

$$x = BC = l \cos^2 \alpha \quad , \quad BD = y = v\,h = \frac{v}{2} l \sin 2\alpha.$$

Dabei ist v ein willkürlich angenommenes Überhöhungsverhältnis für y (in Fig. 5. ist $v = 4$)

$$A\,B = \sqrt{x^2 + y^2} = l\, cos^2 \alpha \sqrt{1 + v^2\, tang^2 \alpha}$$

$$tang\; X\,A\,B = \frac{y}{x} = v\; tang\; \alpha.$$

Fig. 5.
Teischingers Schiebebrett.

(Hannov. Sammlung.)

Um z. B. für $\alpha = 10°$ und $l = 150°$ die Horizontalentfernung x und die Höhe y zu bestimmen, sucht man den Punkt B auf dem Schnitt des Strahles für 10° und der Kurve für 150°, projiziert B parallel x und y (mit einer Reisschiene) und hat damit $A\,D = x$, $D\,B = y$.

I. Logarithmische Rechenschieber.

Nachdem wir schon in § 31. S. 92—94 den gewöhnlichen Rechenschieber beschrieben haben, mit welchem man Produkte $a\,b$, Quotienten $a : b$ und auch Werte $a\,b : c$ u. s. w. ausrechnen kann, ist es klar, dass man einen solchen Schieber auch für $l\, cos^2 \alpha$, $0{,}5\, l\, sin\, 2\, \alpha$ u. s. w. einrichten kann.

Der erste solche Schieber wurde von Prof. *Wild* in Zürich 1843 konstruiert (Mechaniker *Kern* in Aarau), 22cm lang. *Porro* und *Moinot*, später *Werner*, machten 50cm lange Schieber, welche auf Metall, Holz und Papier ausgeführt wurden. Nach einem *Werner*schen Schieber (von *Ostheimer* in Wien, Papier auf Holz) unserer

Fig. 6.
Tachymetrischer Rechenschieber von *Werner*.
(Der Länge nach auf ein Drittel verkürzt.)

Sammlung, haben wir die vorstehende Fig. 6. angefertigt. Dieselbe zeigt die richtige Breite, aber nur ein Drittel der Länge, und die wichtigsten Teilstriche.

Der Hauptkörper (das Lineal) hat zwei übereinstimmende Teilungen A und A', genau ebenso wie der gewöhnliche Schieber (S. 92), d. h. die Teilungen A und A' geben die Logarithmen der Zahlenreihe 1, 2, 3, 4 . . . oder 10, 20, 30, 40 . . . oder 100, 200, 300, 400 . . . 1000. Zwischen diesen Teilungen A und A' bewegt sich der Schieber, welcher in obenstehender Zeichnung etwas nach links herausgezogen dargestellt ist. Der Schieber hat zwei Teilungen, oben B für $\frac{1}{2}\sin 2\alpha$ und unten C für $\cos^2\alpha$. Als Nullpunkt und Einstellpunkt der beiden Schieberteilungen gilt der Punkt Z (mit zwei Pfeilen), welcher die $\cos^2\alpha$-Teilung bei $\alpha = 0°$, und die $\frac{1}{2}\sin 2\alpha$-Teilung bei $\alpha = 5° 46'$ trifft. Letzteres hat seinen Grund darin, dass $\frac{1}{2}\sin 2(5° 46') = 0{,}1$ ist; benützt man also den Zeiger Z

wie wenn er bei 1,0 stünde, so bekommt man stets 10 ($^1/_2\,sin\,2\,\alpha$) statt $^1/_2\,sin\,2\,\alpha$, was aber insofern gleichgültig ist, als die Stellung des Decimal-Kommas ohnehin besonderer Überlegung überlassen ist. (Ein zweiter Zeiger Z' steht bei 0° 34′, weil $^1/_2\,sin\,1^\circ\,8' = 0{,}01$.)

Beispiel: Man wünscht 150 cos^2 15° und $^1/_2$ 150 sin 2 (15°). Man stelle den Strich Z des Schiebers auf 150 des Lineals (oben und unten), dann liest man unten bei 15° ab: 140 und oben bei 15° liest man 375, das man aber in 37,5 verwandelt, d. h. man hat für $l = 150$ und $\alpha = 15^\circ$ gefunden: $l\,cos^2\,\alpha = 140$ und $^1/_2\,l\,sin\,2\,\alpha = 37{,}5$.

Wenn man noch eine Multiplikations-Konstante k dabei hat, so dass man ausrechnen soll: $k\,l\,cos^2\,\alpha$ und $^1/_2\,k\,l\,sin\,2\,\alpha$, so bringt man einen *besonderen* Zeiger Z'' an, so dass $Z\,Z'' = log\,100 - log\,k$, wie in Fig. 6. S. 608 mit $k = 75$ zu sehen ist. Man benützt dann überall diesen Zeiger Z'' wie vorher den Zeiger Z (oder Z').

II. Zahlen-Tafeln.

Es ist schon mehrfach versucht worden, die Funktionen $l\,cos^2\,\alpha$ und $^1/_2\,l\,sin\,2\,\alpha$ für verschiedene Werte von l und von α in Zahlentafeln darzustellen; die meisten Tafeln dieser Art verlangten aber Einschaltung oder Zusammensetzung.

Die ausführlichsten, bis jetzt vorhandenen Tafeln sind die von uns herausgegebenen „Hilfstafeln für Tachymetrie von Dr. *W. Jordan*, Stuttgart, J. B. Metzler, 1880". 243 Seiten für die Entfernungen von 10^m bis 250^m in dreierlei Abstufungen, wie aus den Probeseiten zu ersehen ist, welche wir zur Veranschaulichung des ganzen, auf Seite [40]—[43] des Anhangs abgedruckt haben. Bei kleinen Entfernungen braucht man offenbar die Höhenwinkel weniger genau als bei grossen Entfernungen; bei kleineren Entfernungen kommen aber viel grössere Höhenwinkel vor als bei grossen Entfernungen. Die Tafeln haben deswegen folgende Einrichtung:

	von 10^m bis 100^m	von 100^m bis 175^m	von 175^m bis 250^m
Höhenwinkel α	von 0° bis 30°	von 0° bis 20°	von 0° bis 10°
Intervall $\Delta\,\alpha$	3′	2′	1′

Der Gebrauch der Tafeln ist nun höchst einfach, wenn z. B. $l = 175^m$ und $\alpha = 11^\circ\,20'$ vorliegt, so giebt die Tafel (Probeseite Seite [42] des Anhangs) 175 $cos^2\,\alpha = 168{,}2^m$ und 175 ($^1/_2\,sin\,2\,\alpha$) $= 33{,}72^m$.

Es fragt sich nun, welche Genauigkeit die Tafeln geben, wenn *ohne Interpolation* immer nur nach dem *nächst*liegenden l oder α gerechnet wird. Hiezu haben wir die nachstehenden 4 Täfelchen gebildet, welche die Differenzen je zweier aufeinander folgender Tafelwerte a oder h in Hinsicht auf l und α geben. (Die folgenden 4 Täfelchen geben also gewissermassen die 4 Differentialquotienten von a und h nach l und α.)

Bestimmung der Genauigkeit der Hilfstafeln für Tachymetrie.

Änderung des Tafelwertes $a = l\,cos^2\,\alpha$

für $\Delta\,l$						für $\Delta\,\alpha$					
α	50^m	100^m	150^m	200^m	250^m	α	50^m	100^m	150^m	200^m	250^m
0°	$1{,}0^m$	$1{,}0^m$	$1{,}0^m$	$1{,}0^m$	$1{,}0^m$	0°	$0{,}0^m$	$0{,}0^m$	$0{,}0^m$	$0{,}0^m$	$0{,}0^m$
5	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	5	0,1	0,2	0,3	0,2	0,3
10	1,0	1,0	0,9	1,0	1,0	10	0,1	0,3	0,4	0,4	0,5
20	0,8	0,9	0,9			20	0,2	0,5	0,6		
30	0,8	0,7				30	0,3	0,5			

Mittel $d_l = 0{,}95^m$, $\frac{d_l}{4} = 0{,}25^m$ Mittel $d_\alpha = 0{,}25^m$, $\frac{d_\alpha}{4} = 0{,}06^m$

$$\sqrt{0{,}25^2 + 0{,}06^2} = 0{,}26^m.$$

Änderung des Tafelwertes $h = \frac{1}{2} l \sin 2\alpha$:

für Δl | für $\Delta \alpha$

α	50^m	100^m	150^m	200^m	250^m	α	50^m	100^m	150^m	200^m	250^m
0°	0,00^m	0,00^m	0,00^m	0,00^m	0,00^m	0°	0,04^m	0,08^m	0,07^m	0,06^m	0,07^m
5	0,08	0,08	0,09	0,08	0,09	5	0,04	0,07	0,07	0,06	0,07
10	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17	10	0,04	0,07	0,06	0,06	0,07
20	0,32	0,32	0,32			20	0,03	0,06	0,06		
30	0,43	0,43				30	0,02	0,05			

Mittel $d_l = 0{,}15^m$, $\frac{d_l}{4} = 0{,}04^m$ Mittel $d_\alpha = 0{,}06^m$, $\frac{d_\alpha}{4}\, 0{,}015^m$

$$\sqrt{0{,}04^2 + 0{,}015^2} = \pm\, 0{,}04^m$$

Die Entfernungen l sind hiebei gleichförmig verteilt: 50^m, 100^m, 150^m, 200^m, 250^m, die Höhenwinkel ungleichförmig: 0°, 5°, 10°, 20°, 30°, weil die starken Neigungen, wenn sie überhaupt vorkommen, seltener sind, als die Neigungen zwischen — 10° und + 10°.

Wenn nun in einer Gruppe eine durchschnittliche Differenz zweier aufeinander folgender Tafelwerte $= d$ ist, so kann man den mittleren Fehler für Vernachlässigung aller Interpolationsrechnung, nahe $= \frac{d}{4}$ setzen, weil $\frac{d}{2}$ der *grösste* hiebei mögliche Fehler ist. Da ferner die Fehler-Einflüsse für Δl und $\Delta \alpha$ unbestimmte Vorzeichen haben, so kann der mittlere Gesamtfehler für Eingang nach *zwei* Argumenten ohne Interpolation, $= \sqrt{\left(\frac{1}{4}\, d_l\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\, d_\alpha\right)^2}$ gesetzt werden, und in diesem Sinne haben wir aus dem obigen:

Mittlerer Entfernungsfehler $= \pm\, 0{,}26^m$

Mittlerer Höhenfehler $= \pm\, 0{,}04^m$

Damit ist bewiesen, dass es ein grosses Gebiet von Fällen und Anwendungen giebt, in welchen diese Genauigkeit teils vollauf genügt, teils hinreichend und genügend ist. Namentlich der mittlere Höhenfehler von $\pm\, 0{,}04^m$ ist für Feldpunkte ohne *Fest*legung immer ganz genügend.

Wenn der mittlere Entfernungsfehler $\pm\, 0{,}26^m$ für Pläne in grossem Massstab (1 : 1000 oder 1 : 500) zu gross sein sollte, so hat man ein sehr einfaches Mittel, um den Hauptfehlerteil, welcher von l selbst herrührt, fast ganz unschädlich zu machen: man schlägt nämlich den Überschuss von l über die nächste ganze Zahl auch an $l \cos^2 \alpha$ im Kopfe wieder zu, was nicht wohl als Interpolations-Rechnung betrachtet werden kann.

Die bisherige Beschreibung des Gebrauchs der tachymetrischen Tafeln bezieht sich auf den einfachen Fall, dass in der Formel $c + kl$ die Multiplikations-Konstante $k = 100$ und die Additions-Konstante $c = 0$ sei; man kann jedoch, mit einer einfachen Umrechnung der Kopfüberschriften, die Tafeln auch für beliebige andere Werte c und k einrichten; dieses ist in der den Tafeln beigegebenen Erläuterung näher beschrieben, und die Umrechnung ist für die Fälle $c = 0$ und $c = 5$, sowie $k = 99{,}0$ bis $101{,}0$ in der am Schlusse der tachymetrischen Tafeln beigegebenen „Korrektionstafel" mitgeteilt.

Was über die *Genauigkeit* der tachymetrischen Tafeln früher für $k = 100$ und $c = 0$ gesagt worden ist, gilt auch noch nach der Umrechnung für irgend welche

andere c oder k (k nahezu $= 100$), sofern man nur immer mit dem *nächstliegenden* l oder α in der Tafel eingeht.

In Betreff der Genauigkeit im ganzen könnte noch eine Vergleichung mit den übrigen Hilfsmitteln (Diagrammen, Rechenschiebern u. s. w.) angestellt werden. Wir unterlassen das aber hier, weil dabei zu viele Nebenumstände mit in Frage kommen, und weil die Rechenschieber, Diagramme u. s. w. leicht deswegen an Genauigkeit überschätzt werden, weil man deren Fehler nicht so scharf angeben kann, wie die Fehler im Gebrauche gedruckter Tafeln.

Schluss-Vergleichung.

Nachdem über die tachymetrischen Haupt-Instrumente bereits am Schlusse von § 163. S. 601 Einiges zur Vergleichung gesagt worden ist, können wir jetzt, mit Zuziehung der verschiedenen Hilfsmittel für $cos^2 \alpha$ und $\frac{1}{2} \sin 2 \alpha$, welche mit und neben den Haupt-Instrumenten gebraucht werden, die Vergleichungen etwas allgemeiner fassen.

Jedoch lassen sich die gegenseitigen Vorzüge und Nachteile der verschiedenen tachymetrischen Verfahren nicht wohl unter *einen* Gesichtspunkt bringen. Ausser der Genauigkeit und Geschwindigkeit ist der Umstand von Gewicht, ob der Apparat mit dem Theodolit bzw. mit einem Kompass, oder mit dem Messtische in Verbindung gebracht werden soll, und in letzterem Falle, ob die Zeichnung der Horizontalkurven im Felde oder erst später im Zimmer geschehen soll.

Die Höhen im Felde auszurechnen, auf den Messtisch zu schreiben, und dann nach Massgabe dieser Höhenzahlen und des Anblicks der Natur die Kurven endgültig im Felde zu zeichnen, ist ein Verfahren, welches von Vielen als Ideal gepriesen wird, während nach unseren Erfahrungen der zweckmässigste Vorgang darin besteht, dass man die Punkte im Felde gut auswählt, für unregelmässig wechselnde Bodenformen nach Augenmass Kurven im Handriss zeichnet, die endgültigen Linien aber später zu Hause nach Profilen *konstruiert* (vgl. den späteren § 170.). Bei dieser Anschauung verlieren nun alle diejenigen Hilfsmittel, welche dazu dienen sollen, die Horizontal-Entfernungen und Höhen *im Felde selbst* zu gewinnen, an Bedeutung; insbesondere dürfte die Ausrechnung der Höhen über N. N. im Felde selbst, von zweifelhaftem Werte sein. Oft hat man die Höhen über N. N. der Standpunkte im Felde noch nicht, oder doch nur genähert (z. B. *vor* dem Abschlusse eines Zuges), und dann unterlässt man das Ausrechnen der Höhen im Felde am besten ganz.

Von den graphischen Hilfsmitteln haben wir das Diagramm für $cos^2 \alpha$ (Fig. 1. S. 602) lange angewendet, sowie auch das Höhen-Diagramm (Fig. 2. S. 604).

Die logarithmischen Rechenschieber (welche durch *Wild* und *Moinot* in die Tachymetrie eingeführt wurden) haben wesentlich zur Verbreitung dieses Messverfahrens selbst beigetragen, und in der That sind diese Schieber in mancher Hinsicht ein gutes Hilfsmittel für den fraglichen Zweck.

Als störenden Umstand haben wir jedoch immer die Ungleichförmigkeit der cos^2-Skale empfunden. Zwischen 0° und 5° kann man kaum interpolieren; man hat hier immer das Gefühl, dass die Reduktion zwar kaum von Belang ist, dass man aber auch nicht im stande ist, die kleine Reduktion wenigstens richtig anzubringen.

Unbequem ist auch der Umstand, dass bei Winkeln unter 0° 30′ die ins Unendliche auslaufende Teilung für die Höhen versagt, weshalb man für diese häufig ge-

brauchte Stelle eine Aushilfe mit $\sin \alpha = \frac{\alpha}{\varrho}$ braucht. Auch das Stellen des Decimal-Kommas (z. B. ob eine Ablesung 248 in 24,8^m oder in 2,5^m umzusetzen ist) enthält eine gewisse Unbequemlichkeit und wohl auch eine Fehlerquelle.

Seit Herausgabe der Hilfstafeln für Tachymetrie (vgl. Anhang Seite [40]—[43]) haben wir im allgemeinen die übrigen Hilfsmittel nicht mehr benützt, sondern die Tafeln ausschliesslich angewendet.

Indessen kann es bei solchen Vergleichungen kein objektives Urteil geben, wie z. B. aus einer Controverse hierüber in der „Zeitschr. d. Hannov. Ing.- u. Arch.-Vereins 1885", S. 215—224 hervorgeht; persönliches Gutdünken wird oft den Ausschlag geben.

Wer sich ein eigenes Urteil bilden will, wird am besten selbst vergleichende Versuche anstellen.

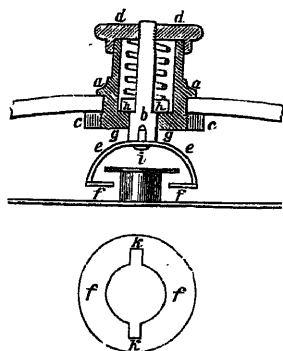
§ 165. Der Kompass.

Der Kompass ist ein Instrument, mit welchem man absolute Richtungen bestimmen kann. Der Hauptbestandteil desselben ist die Magnetnadel, d. h. ein magnetisch gemachter Stahlstab, welcher, in der Mitte frei schwebend aufgehängt, in horizontalem Sinne sich in eine gewisse Richtung stellt.

Wir beschreiben hier verschiedene Formen des Kompasses, welche in der Feld- und Landmessung gebraucht werden.

I. Der Büchsen-Kompass.

In den Tachymeter-Zeichnungen von § 163. Fig. 1. S. 591 und Fig. 2. S. 592 sind oben aufgesetzte Büchsen-Kompasse angedeutet. Das cylindrische Gehäuse eines solchen hat einen Durchmesser von 10^{cm}—15^{cm} und eine Höhe von 1,5^{cm}; in der Mitte befindet sich eine vertikale Spitze, auf welcher die Magnetnadel (aus einem Stahlstab bestehend) mittelst eines Achat-Hütchens schwebend aufgehängt ist. Am Rande des Gehäuses befindet sich eine Teilung in ganze Grade, deren Bezifferung (im Gegensatz zur Bezifferung eines Theodolits) nicht von links nach rechts, sondern *von rechts nach links* geht; dieses giebt wachsende Ablesungen für die Drehung des Instrumentes von links nach rechts.

Fig. 1.
Ausrückung der Magnet-Nadel.

Zur Schonung der vertikalen Nadelspitze und des die freie Aufhängung vermittelnden Achat-Hütchens besteht eine Ausrückung der Magnetnadel, wodurch die Berührung des Hütchens mit der Spitze immer aufgehoben werden soll, wenn das Instrument nicht zur Messung gebraucht wird.

Diese Ausrückung kann verschieden angeordnet sein; beispielshalber zeigt Fig. 1. eine zweckmässige Anordnung der Ausrückung, welche Mechaniker *Hahn* in der „Zeitschr. f. Verm. 1875", S. 188 mitgeteilt hat. Durch Drehung der Mutter *d d* wird das Nadelhütchen mittelst des Bügels *e e* schön senkrecht gehoben.

An einem Kompass-Instrument dürfen keine *Eisen*teile angebracht werden; die Federn können (statt aus Stahl) aus gehämmertem Messing oder Neusilber bestehen. Auch das Stativ ist in dieser

Beziehung besonders zu behandeln, doch braucht man nicht gar zu ängstlich zu sein, z. B. haben eiserne Fussspitzen desselben, da sie etwa 1,5^m unter dem Instrument symmetrisch gegen dessen Mitte sich befinden, wenig Einfluss.

Die Prüfung eines Büchsen-Kompasses bezieht sich zuerst auf die Empfindlichkeit der Nadel; man bringt bei feststehendem Instrument die Nadel durch Annähern von Eisen zum Schwingen, und sieht zu, ob sie immer wieder dieselbe Ruhelage (auf etwa 0,2° genau) einnimmt. Ist dieses nicht der Fall, so kann der Fehler an ungenügender magnetischer Kraft oder an Reibung in der Aufhängung liegen, und kann entsprechend verbessert werden.

Von grosser Bedeutung ist die nach allen Seiten symmetrische Anordnung der Aufhängevorrichtung. Man macht die hierauf bezügliche Untersuchung gemeinsam mit der Prüfung, ob das Instrument genügend eisenfrei ist, und zwar dadurch, dass man mit dem Kompasse die Azimute verschiedener Strahlen peilt, deren gegenseitige Winkel man ausserdem mit einem Theodolite misst, es sollen dann die Azimut-Differenzen mit den Theodolit-Winkeln übereinstimmen. Wenn der Kompass mit einem Theodolit unmittelbar verbunden ist, wie bei unseren Tachymetern (Fig. 1. und Fig. 2. S. 591—592), so gestaltet sich diese Untersuchung sehr einfach, indem man mit Hilfe der Limbus-Teilung des Theodolits den Kompass etwa von 10° zu 10° oder von 20° zu 20° durch den ganzen Kreis dreht, und zusieht, ob die Nadel hiebei immer denselben Winkel durchläuft

Wir geben im Folgenden ein Beispiel einer solchen Untersuchung, wodurch zugleich noch auf einen andern Umstand aufmerksam gemacht wird. Wenn man nämlich bei gut horizontal gestelltem Instrument den Kompass vorsichtig dreht, so bleibt die Nadel fast ganz ruhig, und gestattet sofort Ablesung, sobald die Drehung beendigt ist; die Reibung der Nadel in der Aufhängung hat aber einen konstanten Fehler in der Einstellung der Nadel zur Folge, welchen man alsbald bemerkt, wenn man die Drehung im umgekehrten Sinne vornimmt.

Die Zahlen der folgenden Tabelle wurden dadurch gewonnen, dass die Theodolit-Alhidate auf 0°, 20°, 40° ... der Theodolit-Teilung eingestellt wurde, die entsprechenden Ablesungen an der Nadel sind mit I bezeichnet. Nachher wurde die Aufeinanderfolge umgekehrt, indem der Theodolit auf 360°, 340°, 320° ... eingestellt wurde, wobei die Nadel-Ablesungen II sich ergaben. Die Nadel-Ablesungen sind an beiden Nadelenden gemacht, es sind jedoch der Übersichtlichkeit wegen sofort die Mittel eingesetzt.

Limbus	Nadel I	Nadel II	II—I	Limbus	Nadel I	Nadel II	II—I
0°	14,3°	15,2°	+ 0,9°	180°	193,7°	194,1°	+ 0,4°
20	34,0	35,0	+ 1,0	200	213,8	214,2	+ 0,4
40	53,8	54,8	+ 1,0	220	233,9	234,5	+ 0,6
60	74,4	75,2	+ 0,8	240	253,9	254,9	+ 1,0
80	94,1	94,3	+ 0,2	260	273,8	274,5	+ 0,7
100	113,9	114,2	+ 0,3	280	294,1	294,2	+ 0,1
120	133,3	134,1	+ 0,8	300	314,3	314,5	+ 0,2
140	153,6	153,9	+ 0,3	320	333,2	333,7	+ 0,5
160	174,4	174,7	+ 0,3	340	353,8	354,1	+ 0,3
					Mittel 3,91°	4,45°	+ 0,54°

Die Differenz der Ablesungen bei der Vor- und Rückdrehung beträgt also 0,54°, oder der konstante Trägheitsfehler der Nadel beträgt 0,27°, während der mittlere unregelmässige Ablesungsfehler höchstens ± 0,1° sein kann.

Man soll daher die Vorsicht anwenden, bei wichtigen Zielungen stets zweifach abzulesen, mit verschieden drehenden Einstellungen.

Beobachtung der Schwingungen mit der Nadel.

Es giebt noch ein Mittel, sich von regelmässigen Trägheitsfehlern der Nadel möglichst unabhängig zu machen, nämlich die Beobachtung der Nadel-*Schwingungen.* Wenn die Nadel beim Schwingen die aufeinander folgenden äussersten Stellungen zeigt: a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, $b_3 \ldots$, so berechnet man die Ruhestellung x nach den Formeln:

$$x = \frac{a_1 + 2\,b_1 + a_2}{4} \quad \text{oder} \quad x = \frac{b_1 + 2\,a_2 + b_2}{4}$$

d. h. man nimmt das Mittel dreier aufeinander folgender Ausschläge, zählt jedoch den mittleren doppelt.

Während bei feinen *Wägungen* diese Methode unentbehrlich ist, weil dort der schwingende Körper sehr langsam oder gar nie zur Ruhe kommt, ist bei Kompassen für tachymetrische Aufnahmen, deren Nadeln ziemlich bald still stehen, das Verfahren der Schwingungs-Beobachtung unverhältnismässig zeitraubend und mühsam, und es dürfte hier das Ablesen der ruhenden Nadel bei gehöriger Vorsicht, wegen des konstanten Einstellfehlers, genügend sein.

Die Excentricität der Nadel wird durch Ablesen an beiden Enden eliminiert, wie beim Theodolit.

II. Der Röhren-Kompass.

Die Magnetnadel braucht nicht notwendig ein kreisrundes, büchsenartiges Gehäuse, mit einer ganzen Teilung von 0° bis 360° zu haben; es genügt eine Teilung von wenigen Graden; wenn nur deren Mittellinie ungefähr in der Richtung des magnetischen Meridians liegt.

Dieses hat auf die Konstruktion des Röhren-Kompasses geführt, in dessen Längs-Achse die Magnet-Nadel schwingend aufgehängt wird, wobei die Stellung der Nadel gegen die Teilung durch eine an dem einen Röhren-Ende befindliche Okular-Öffnung beobachtet wird.

In Fig. 3. S. 593 ist im unteren Teile ein solcher Röhren-Kompass von aussen zu sehen; man dreht den Unterteil samt dem Kompasse mit feinen Einstellschrauben, bis die Nadel auf einen gegebenen Strich einspielt, und dann hat man auch den Horizontalkreis, an dem weiter abgelesen wird, nach einem bestimmten Azimute orientiert.

Einiges weitere hierüber, und Vergleichung mit dem gewöhnlichen Büchsen-Kompasse haben wir schon in § 163. S. 599 gegeben.

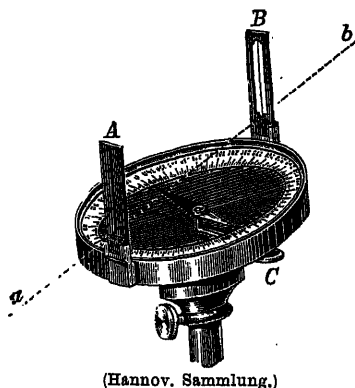
III. Der Stock-Kompass.

Für manche Zwecke kann man mit Vorteil den in Fig. 2. S. 615 gezeichneten Stock-Kompass anwenden, der zwar nicht so genau wie die im bisherigen beschriebenen Theodolit-Kompasse, aber dafür sehr bequem ist.

Das Zielen nach einer Geraden $a\,b$ geschieht mittelst des Diopters $A\,B$. Bei C befindet sich eine Ausrückung. Die Ablesungen werden auf einzelne Grade genommen.

Die Anwendung dieses Werkzeuges zur Aufnahme von Kompass-Zügen mit dem Messband und mit Höhenwinkeln werden wir in § 166. besonders behandeln.

Auch zu flüchtigen Aufnahmen ist der Stock-Kompass in der Anordnung von Fig. 2. ein vortreffliches Hilfsmittel (vgl. hiezu den späteren § 171. S. 643).

Fig. 2.
Der Stock-Kompass.
(Kreisdurchmesser = 12 *cm.*)

(Hannov. Sammlung.)

IV. Der Taschen-Kompass.

Noch weniger genau als der Stock-Kompass, dafür aber überall anwendbar, ist der in Fig. 3. gezeichnete Taschen-Kompass.

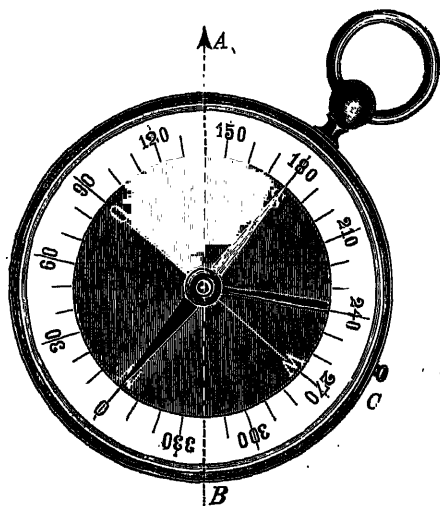
Man findet solche Kompasse allenthalben im Handel, sie haben aber fast immer eine unbequeme Teilung von 2° oder 1°. Die beste Teilung für einen Taschen-Kompass ist von 10° zu 10°, denn einzelne Grade kann man von freier Hand doch nicht bestimmen, und wenn man nur auf 10° oder etwa auf 5° abliest, so sind viele Striche nur störend.

Die Taschen-Kompasse haben meist einen besonderen Strich bei etwa 15° Nord-West, welcher zum Einstellen auf die Missweisung dienen soll. Da aber die Missweisung an verschiedenen Orten verschieden ist, z. B. in Deutschland zwischen 14° und 6°, so liegt in jenem Missweisungs-Strich die Gefahr, dass er auch an Orten benützt wird, wo er nicht passt; und deswegen lässt man lieber den genannten Strich ganz fort, und bringt die Missweisung nachher in Rechnung.

Fig. 3.
Taschen-Kompass
(natürl. Grösse).

(Hannov. Sammlung.)

Die Teilung ist so angeordnet, dass von Nord nach Ost-Süd-West-Nord mit 0°, 90°, 180°, 270°, 360° durchlaufend gezählt wird.

Die gewöhnliche Anwendung des Taschen-Kompasses ist diese: Man hält den Kompass in freier Hand, lässt die Nadel auf 0° und 180° einspielen, und zielt mit

freiem Auge über die Teilung hinweg nach dem Zielpunkt, dessen Richtung man haben will, z. B. in Fig. 3. ist angenommen, dass man eine Ziellinie *BA* habe mit der Peilung 140°.

Dieses Verfahren erscheint auf den ersten Blick sehr roh, man wird sich aber nach einigen Versuchen überzeugen, dass man damit auf etwa 5°—10° genau peilen kann.

Missweisung der Magnetnadel.

Die Richtung, nach welcher die Magnet-Nadel zeigt, z. B. in Berlin jetzt etwa 10° westlich von Nord (Azimut 350°), ist nach Zeit und Ort veränderlich. Der Winkel, welchen die Magnetnadel-Richtung, der sogenannte magnetische Meridian, mit dem astronomischen Meridian eines Ortes macht, heisst die „Missweisung", dieselbe wird von Nord nach Westen oder nach Osten gezählt.

Die magnetische Missweisung ist veränderlich, und nimmt jetzt jährlich um etwa 7′ ab.

In der nachfolgenden Fig. 4. geben wir ein Übersichts-Kärtchen der Linien gleicher magnetischer Missweisung für den Anfang des Jahres 1880, für Europa, als Auszug aus der Merkator-Erdkarte der Linien gleicher magnetischer Missweisung, welche von der deutschen Seewarte Abteilung II. herausgegeben, und in den „Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie", VIII. Jahrgang, 1880, Heft VII. veröffentlicht wurde.

Zahlreiche Angaben der magnetischen Missweisung hat *Neumayer* gesammelt und veröffentlicht in „*Berghaus*' Physikalischer Atlas. Herausgegeben von Prof. Dr. *Hermann Berghaus*. V. Abteilung „Erdmagnetismus". Gotha, *Justus Perthes* 1887.

Unser Kärtchen Fig. 4. S. 617 kann nur zur allgemeinen Übersicht dienen; für weitere Zwecke haben wir im Folgenden eine Zusammenstellung von solchen Punkten gemacht, deren Missweisung gut bestimmt ist, nach dem „Segelhandbuch für die Ostsee", herausgegeben von dem Hydrographischen Amte der Kais. Admiralität. I. Teil, I. Heft, Berlin 1878, *Dietrich Reimer*, S. 49, und „Segelhandbuch für die Nordsee" u. s. w. Berlin 1884, S. 49; mit Zufügung von noch einigen Punkten im Binnenlande.

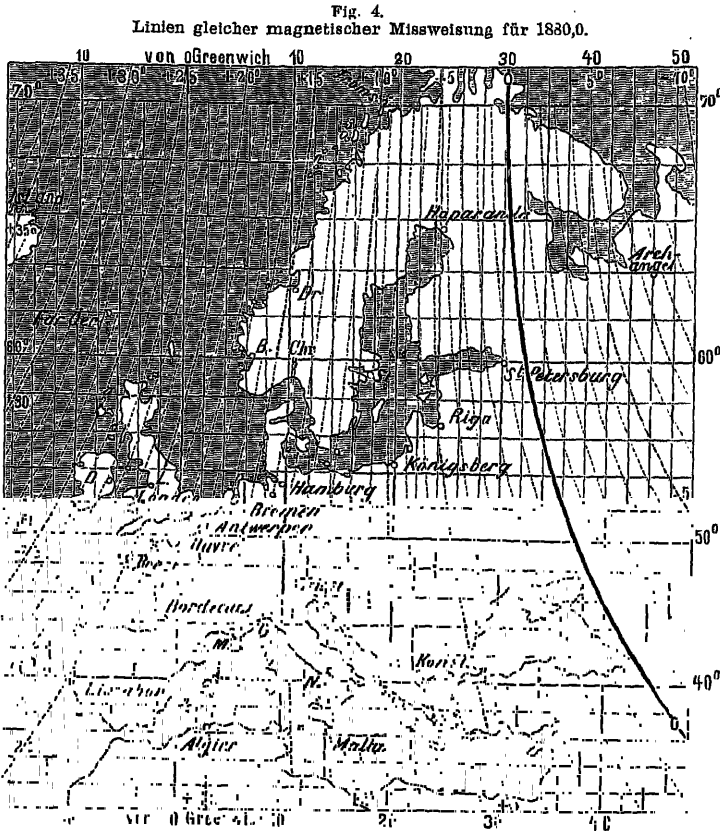
Magnetische Missweisung, westlich, für die Mitte des Jahres 1890
jährliche Abnahme = 7,5′.

Ort	°	′	Ort	°	′	Ort	°	′
Aachen	14°	0′	Karlsruhe	12°	40′	Petersburg (östl.)	—0°	18′
Berlin	10	10	Kiel	12	5	Rostock	11	11
Danzig	8	6	Königsberg	6	17	Stettin	9	26
Dresden	10	14	Kopenhagen	11	0	Stuttgart	12	27
Flensburg	12	30	Leipzig	11	2	Swinemünde	9	39
Hamburg	12	0	London (Kew)	17	45	Travemünde	11	38
Hannover	12	20	Memel	6	27	Ulm	12	0
Helder	15	3	München	10	57	Wien	9	0
Helsingfors	3	13	Paris	15	34	Wilhelmshafen	13	7

Auf Grund zahlreicher Vergleichungen und Einschaltungen haben wir die Übersichtstafel der Missweisung für Deutschland gebildet, welche im Anhange Seite [30] mitgeteilt ist. Dieselbe mag wohl etwa innerhalb 0,5° zutreffen; wenn grössere Genauigkeit gewünscht wird, ist besondere Untersuchung nötig, am besten die Missweisung durch Messung besonders zu bestimmen.

Eine solche Bestimmung für Hannover haben wir in der „Zeitschr. d. Hannov. Ing. u. Arch.-Vereins 1886“, S. 162 mitgeteilt, westliche Missweisung = 12,8° für Mitte 1886.

Die magnetische Missweisung ist fortgesetzter Änderung unterworfen; die jährliche Abnahme der westlichen Missweisung beträgt etwa 7,5′.

Fig. 4.
Linien gleicher magnetischer Missweisung für 1880,0.

Für den Landmesser ist noch von Wichtigkeit die *tägliche* Änderung, weil man bei einer Aufnahme die Missweisung konstant anzunehmen pflegt. Es wird genügen, hiefür ein Beispiel, München, nach *Lamont* vorzuführen:

Täglicher Gang der magnetischen Missweisung in München.

Tageszeit		Sommer	Winter	Tageszeit		Sommer	Winter
Mitternacht	0^h	—1′	—1′	Mittag	12^h	+5′	+3′
	2	—1	—1		2	+6	+3
	4	—2	0		4	+2	+1
Morgen	6	—3	0	Abend	6	0	0
	8	—3	—1		8	—1	—1
	10	0	+1		10	—1	—2
Mittag	12	+5	+3	Mitternacht	12	—1	—1

+ bedeutet hiebei westliche Abweichung, — bedeutet östl. Abweichung vom Tagesmittel.

Die grösste tägliche Änderung beträgt hiernach im Sommer 9′, im Winter 5′. Auch kommen hiezu noch unregelmässige Änderungen bei Gewittern u. s. w.; indessen sind diese Schwankungen doch immer noch so klein, dass man sie bei tachymetrischen Messungen neben den Messungsfehlern selbst vernachlässigt.

Abweichung von der Coordinaten-Axe.

Während die im bisherigen besprochene magnetische Missweisung oder Abweichung von dem magnetischen Meridian für allgemein geographische Zwecke gebraucht wird, ist es für den Feld- und Landmesser meist wichtiger, die Abweichung von der jeweiligen X-Axe seines Coordinaten-Systems zu kennen, welche gewöhnlich nahezu nach Norden, aber nicht genau nach Norden gerichtet ist (Meridian-Konvergenz der X-Axe).

Hiezu ist nichts weiter nötig, als dass man mit dem Kompass-Instrument auf einen oder mehrere Strahlen peilt, deren trigonometrische Azimute man aus der Triangulierung oder aus der Zugmessung kennt.

Wir nehmen hiezu ein Beispiel für den Tachymeter Fig. 2. S. 592 von der Aufnahme bei Springe, 1883, Standpunkt Siek:

Zielpunkt	Nadel N	Nadel S	Mittel m	Trigonom. Azimute α	Abweichung $m-\alpha$
Springe	134,2° 134,2	313,9° 314,1	134,10°	121,21°	— 12,89°
Warte	284,5 284,5	104,3 104,6	284,48	271,43	— 13,05
I	287,8 288,1	107,9 108,2	288,00	275,10	— 12,90
II	315,9 316,3	135,9 136,3	316,10	303,12	— 12,98
Tappensoole	9,4 9,7	189,5 189,4	9,50	356,78	— 12,72
				Mittel	— 12,91°

Nach dieser Bestimmung kann man für das benützte Instrument und für jene Zeit die an der magnetischen Nadel gemachten Ablesungen m auf trigonometrische Azimute α zurückführen durch Subtraktion der Abweichung 12,9°.

Die so bestimmte Abweichung besteht ihrem Hauptteile nach aus der eigentlichen magnetischen Missweisung; es wirken aber auch noch verschiedene andere Umstände ein, nämlich 1) eine etwaige zufällige Abweichung des Durchmessers 0°—180° der Kompass-Teilung von der Zielaxe des Fernrohrs, und 2) eine Abweichung der geometrischen Axe der Nadel, an welcher die Ablesung stattfindet, von der magnetischen Axe der Nadel. Die magnetische Axe, d. h. die Linie, welche sich in den magnetischen Meridian legt, fällt nämlich nicht immer genau mit der geometrischen Mittellinie der Nadel zusammen, sondern macht, infolge unsymmetrischer Beschaffenheit der Nadel oder unsymmetrischer Behandlung bei der Magnetisierung, im allgemeinen einen kleinen Winkel mit der geometrischen Axe.

Wenn eine Kompass-Aufnahme sich völlig an eine trigonometrische Messung anschliesst, so braucht man die oben genannten Bestandteile der magnetischen Ab-

weichung $m - \alpha$ von der X-Axe, nicht zu trennen; dieses ist auch nicht nötig, wenn mehrere Kompass-Instrumente zusammen bei einer Aufnahme gebraucht werden, denn man hat dann nur diese Instrumente unter sich oder mit einem gemeinsamen Orientierungs-Azimut zu vergleichen; wenn man aber den Kompass zur Bestimmung der absoluten magnetischen Missweisung benützen will, oder wenn man mit Hilfe einer anderweitig bekannt gewordenen Missweisung eine Aufnahme nach dem astronomischen Meridian orientieren will, so muss man den Zielaxen-Fehler und die Konvergenz zwischen der magnetischen und der geometrischen Axe der Nadel bestimmen.

Zur Bestimmung der wahren magnetischen Missweisung braucht man entweder ein astronomisch bestimmtes Azimut oder die Meridian-Konvergenz eines zum Anschluss geeigneten trigonometrischen Azimutes.

Die astronomische Messung mit der Sonne oder dem Polarstern ist beschrieben in des Verfassers „Grundzüge der astron. Zeit- und Ortsbestimmung", Berlin 1885, § 17. und § 23. Bestimmungen der magnetischen Deklination durch trigonometrische Azimute und Meridian-Konvergenz giebt *Hammer*, „Verlauf der Isogenen im mittleren Württemberg", Stuttgart 1886. Wir wollen auf solche Bestimmungen hier nicht weiter eingehen.

§ 166. Kompass-Züge.

Wenn man ein theodolitartig festaufgestelltes Instrument mit einem Kompass hat, so kann man damit Polygon-Züge messen, ebenso wie mit einem Theodolit; der Unterschied besteht zunächst nur darin, dass man am Kompass die Stellung der Nadel, und am Theodolit die Stellung der Alhidade gegen den Limbus abliest.

Vergleicht man weiter, so ergiebt sich für den Kompass der Nachteil, dass er eine einzelne Ablesung höchstens auf ein Zehntel Grad = 6′ genau giebt, während der einfachste Theodolit mit Leichtigkeit noch 1′ abzulesen gestattet; die Theodolit-Genauigkeit ist in der einzelnen Ablesung mindestens 10mal so gross als die Kompass-Genauigkeit.

Wenn dennoch der Kompass in der Feld- und Landmessung angewendet wird, und noch nicht zu den veralteten Werkzeugen gerechnet werden darf, so müssen demselben *andere* Vorteile zukommen; und das ist in der That der Fall, es ist die im Vergleich mit dem Theodolit viel ***günstigere Fehler-Fortpflanzung.***

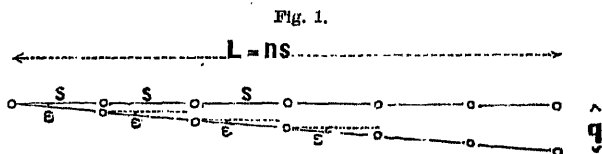
Diese Verschiedenheit ist begründet in dem Umstand, dass der Kompass absolute Azimute liefert, während mit dem Theodolit Azimute nur durch Vermittlung von Winkeln *übertragen* werden können.

Die Richtkraft des Erdmagnetismus wirkt ebenso allgemein auf die Magnetnadel wie die Richtkraft der Erdanziehung (Schwere) auf die Blase einer Wasserwage; und deswegen ist auch das Fehlergesetz des Kompass-Zuges dasselbe wie bei einem Nivellierungs-Zug.

Um zunächst die einfachsten Fehlergesetze zu untersuchen, betrachten wir in Fig. 1. einen nahezu geradelinigen Kompass-Zug mit lauter gleichen Strecken s.

Fig. 1.

L = ns

s s s ε ε ε ε q

Jede einzelne Strecke werde in ihrer Richtung mit einem mittleren Fehler $\pm \varepsilon$ gemessen, welche einen Querabweichungsfehler $\pm s\varepsilon$ für eine Strecke giebt. Dann setzt sich die Querabweichung q des Endpunktes der ganzen Linie L so zusammen:

$$q = \pm s\varepsilon \pm s\varepsilon + \ldots \pm s\varepsilon$$

und die *mittlere* Querabweichung am Ende wird:

$$q = \sqrt{(s\,\varepsilon)^2 + (s\,\varepsilon)^2 + \ldots (s\,\varepsilon)^2} = \sqrt{n\,(s\,\varepsilon)^2}$$

$$q = s\,\varepsilon\sqrt{n} \tag{1}$$

Es ist aber:

$$n = \frac{L}{s},$$

also:

$$q = \varepsilon\sqrt{L\,s} \tag{2}$$

Zur Vergleichung wollen wir die Fehlerformel für einen Theodolit-Zug hersetzen; dieselbe ist, wenn nun mit ε_T der mittlere Winkelfehler eines Theodolit-Zuges bezeichnet wird, nach (10) S. 329:

$$q = \varepsilon_T \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{L^3}{s}} \tag{3}$$

In der Fehlerformel (2) für den Kompass-Zug steht $\sqrt{s}$ im *Zähler*, in der Formel (3) für den Theodolit-Zug steht $\sqrt{s}$ im *Nenner*, d. h. beim Kompass-Zug wächst der Fehler q proportional der Quadratwurzel der Zielweite s, beim Theodolit-Zug wächst dieser Fehler *umgekehrt* proportional derselben Wurzel.

Daraus folgt:

Beim Kompass-Zuge sollen die Zeitweiten s möglichst *klein* gemacht werden (während sie beim Theodolit-Zug möglichst *gross* zu machen sind, vgl. S. 329).

Wir gehen deswegen bei Kompass-Zügen nach Umständen mit den Streckenlängen s bis zu 20 Meter herunter.

Man kann diese Vergleichungen kurz so zusammenfassen:

Der Theodolit-Zug ist im einzelnen sehr genau, er hat aber ungünstige Fehler-Fortpflanzung und muss deswegen *lange* Seiten haben; dagegen ist der Kompass-Zug im einzelnen ungenau, er hat aber günstige Fehler-Fortpflanzung, und muss mit *kurzen* Seiten angelegt werden.

Ausser der günstigen Fehler-Fortpflanzung in den Richtungsfehlern hat der Kompass-Zug noch einen zweiten Vorteil gegenüber dem Theodolit-Zug, nämlich den, dass auch die bei Theodolit-Messungen so sehr schädlichen *Centrierungs*-Fehler (vgl. S. 318—319) beim Kompass-Zug fast unschädlich sind, denn sie bleiben unvergrössert an der Stelle, wo sie begangen wurden

Die innere Verschiedenheit beider Arten von Zügen zeigt sich auch darin, dass man beim Kompass-Zug jede Streckenrichtung nur *einmal* zu messen braucht, während man beim Theodolit-Zug jede Strecke zweifach, vorwärts und rückwärts, nehmen muss. Wenn man nicht, etwa der Probe wegen, dennoch jede Strecke vorwärts nnd rückwärts mit dem Kompass beobachtet, so kann man den fraglichen Umstand in zweifacher Weise ausnützen, nämlich:

1) Man macht sogenannte *Sprungstände*, d. h. man überspringt jeden zweiten Brechungspunkt und beobachtet auf jedem Standpunkte je eine Strecke rückwärts und eine vorwärts.

2) Man beobachtet jede Strecke einmal nur vorwärts, und das hat die grosse Annehmlichkeit, dass man es immer nur mit *einer* Strecke zugleich zu thun hat.

Ein zweiter Vorteil besteht hiebei darin, dass man die Zug-Punkte überhaupt nicht abzustecken braucht.

Indem wir durch diese Betrachtungen zu den Messungen selbst geführt werden, haben wir über solche Züge, bei denen der Kompass theodolitartig auf dem Stative aufgestellt ist (wie bei Fig. 1. und Fig. 2. S. 591 und S. 592), und bei welchen die Entfernungen geradezu mit Messlatten, Messband oder Kette gemessen werden, wenig zu sagen. Man verfährt im wesentlichen wie bei der Theodolitmessung; nur kann man bei der Centrierung an Schärfe etwas nachlassen.

Solche Züge mit Kompass und Kette waren früher in Norddeutschland sehr gebräuchlich, sie bildeten die Grundlage ausgedehnter Feldmark-Aufnahmen, und haben sich oft später bei der Nachmessung mit dem Theodolit überraschend genau erwieser, was eben durch die günstige Fehler-Fortpflanzung, verbunden mit Sorgfalt in der Behandlung seitens der Feldmesser, erklärlich ist.

Nach diesem ist die Zugmessung mit dem Tachymeter in dem Sinne zu betrachten, dass die Richtungen an dem Kompass und die Entfernungen an dem *Distanzmesser* abgelesen werden. Hier drängt sowohl der Kompass als der Distanzmesser zu *kurzen* Zielweiten. Geht man in der Zielweite nicht über 50^m, so kann man damit im Verhältnis zu der geringen Arbeit, namentlich im Gebirge, vorzügliche Ergebnisse erzielen. Die Höhen bekommt man hiebei mit. Im einzelnen ist die Ausführung diese: Man lässt die Distanzlatte (Fig. 1. S. 597) vorausgehen, nimmt bei jeder Aufstellung derselben das Azimut am Kompass, die Distanz zwischen den Distanzfäden, dann misst man seine eigene Instrumentenhöhe i mit einem zu diesem Zwecke mit zu führenden Massstab, stellt den Mittelfaden auf den Teilstrich in der Höhe i an der Latte (i etwa $= 1{,}4^m$) und liest dann den Höhenwinkel am Höhenkreis ab.

Will man zur Versicherung alle Messungen auch rückwärts machen, so lässt man eine *zweite* Latte nachfolgen, und geht dann nie weiter, bis die Ablesungen für Entfernung, Höhenwinkel und Azimut hin und her stimmen.

Eine besondere Art von Kompasszügen mit Bandlängen von 20^m werden wir in § 168. besonders behandeln, dagegen hier noch die nötigsten Fehlergesetze entwickeln.

Ausgleichung eines geradegestreckten Kompass-Zuges zwischen zwei Fest-Punkten.

Es soll zuerst der einfachste Fall angenommen werden, dass der Zug *gleichseitig* sei.

Wenn ein solcher (nahezu) geradliniger und gleichseitiger Zug von einem Festpunkt ausgeht, und in einem zweiten Festpunkt einmünden soll, so hat man beim Eintreten eines Abschluss-Widerspruches eine Richtungs-Ausgleichung zu machen, welche bei gleich langen Seiten lediglich in einer *Drehung* des ganzen Zuges ohne Formveränderung besteht (während ein Theodolitzug nach S. 339 eine *Biegung* verlangt). Die Richtigkeit der erwähnten Drehung ergiebt sich sofort, wenn man bedenkt, dass eine am Abschluss auftretende Querabweichung als Summe von n einzelnen Abweichungen $s\,\varepsilon$ auftritt, welche als unabhängige Fehler mit gleichen Gewichten betrachtet werden können. Die Längen-Ausgleichung in der Richtung des Zuges selbst, von der hier nicht die Rede ist, geschieht durch Proportionalverteilung des Fehlers nach S. 29.

Nun gehen wir zu dem allgemeineren Fall ungleich langer Seiten s über.

Ein nahezu geradlinig gestreckter Bussolenzug habe

die Seiten $s_1',\ s_2',\ s_3' \ldots s_n',\ s_n'' \ldots s_3'',\ s_2'',\ s_1''$.

Alle Azimute sind gleich genau mit dem mittleren Fehler $\pm \varepsilon$ gemessen. An dem Brechungspunkte zwischen der Seite s_n' und der Seite s_n'', hat man eine mittlere Querabweichung, welche von dem Anfangspunkt der Seite s_1' her berechnet, folgenden Wert hat:

$$\varDelta' = \sqrt{(s_1'\,\delta)^2 + (s_2'\,\delta)^2 + (s_3'\,\delta)^2 + \ldots} = \varepsilon\sqrt{[s'\,s']} \tag{4}$$

Wenn dagegen der Zug im umgekehrten Sinn durchlaufen wird, so erhält man von der anderen Seite her rechnend:

$$\varDelta'' = \varepsilon\sqrt{[s''\,s'']} \tag{5}$$

Wenn nun der Zug an *zwei* Festpunkte angeschlossen ist, nämlich an den Anfangspunkt der ersten Seite s_1' und an den Endpunkt der letzten Seite s_1'', so wird im allgemeinen ein Widerspruch w entstehen, der an jedem beliebigen Punkte zur Anschauung gelangen kann, also auch an dem oben betrachteten Grenzpunkt zwischen s_n' und s_n''. Um diesen Widerspruch zu verteilen, betrachtet man die zwei unabhängigen Messungen mit den mittleren Fehlern $\varDelta'$ und $\varDelta''$ nach (4) und (5), oder mit Gewichten p' und p'', welche den Gleichungen genügen:

$$\frac{1}{p'} = [s'\,s'] \quad \text{und} \quad \frac{1}{p''} = [s''\,s''] \tag{6}$$

Nach den Gesetzen für das arithmetische Mittel von zwei Beobachtungen mit den Gewichten p' und p'' bekommt man eine Fehlerverteilung mit v' und v'', wobei $v' + v'' = w$ ist, und im einzelnen:

$$v' = \frac{1}{p'}\,\frac{w}{\frac{1}{p'} + \frac{1}{p''}} \quad , \quad v'' = \frac{1}{p''}\,\frac{w}{\frac{1}{p'} + \frac{1}{p''}}$$

Mit Einsetzung von (6) giebt dieses, wenn zugleich $[s'\,s'] + [s''\,s''] = [s\,s]$ gesetzt wird:

$$v' = \frac{[s'\,s']}{[s\,s]}\,w \quad , \quad v'' = \frac{[s''\,s'']}{[s\,s]}\,w \tag{7}$$

Nun kann man den Drehungswinkel für die Strecke s_n' bestimmen. Wir schreiben hiezu die erste Formel (7) für v', welches dem Endpunkt von s_n' zukommt, ausführlicher, nämlich mit Auflösung der Summe im Zähler, jedoch nun mit Weglassung der Accente an den s:

$$v' = \frac{[s'\,s']}{[s\,s]}\,w = \frac{w}{[s\,s]}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + \ldots s_{n-1}^2 + s_n^2) \tag{8}$$

Für den *Anfangs*punkt der Strecke hat man eine ähnliche Formel:

$$v'_{n-1} = \frac{w}{[s s]}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + \ldots s_{n-1}^2) \tag{9}$$

Der Drehungswinkel für die Strecke s_n ist daher:

$$\varepsilon_n = \frac{v' - v'_{n-1}}{s_n} = \frac{w}{[s\,s]}\,s_n \tag{10}$$

Der Drehungswinkel jeder Seite ist also der Seitenlänge s selbst proportional. Wenn alle Seiten s gleich lang sind, so sind auch die Drehungswinkel gleich, oder es wird der ganze Zug ohne Formveränderung gedreht, wie schon oben angegeben wurde.

Nach der Ausgleichung ist der mittlere Fehler des Brechungspunktes zwischen den Seiten s_n' und s_n'' in der Richtung quer zum Zuge, nach den allgemeinen Formeln für das arithmetische Mittel (Band I. S. 25):

$$M = \frac{w}{p' + p''} \sqrt{p' p''} = \frac{w}{[s s]} \sqrt{[s' s'] [s'' s'']} \quad (11)$$

Wenn hier alle Seiten einander gleich $= s$ werden, so wird dieses:

$$M = \frac{w}{n' + n''} \sqrt{n' n''} \quad (12)$$

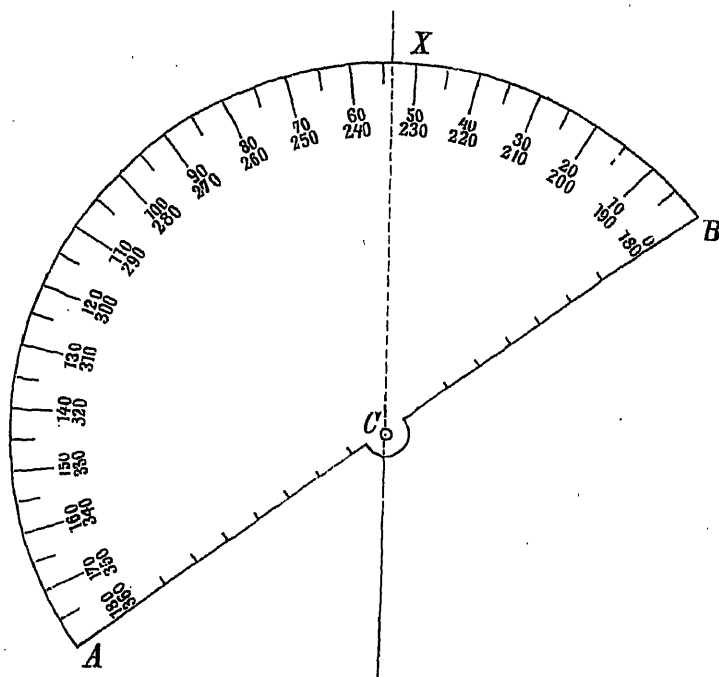
Diese Formel zeigt, dass nach der Ausgleichung die mittlere zu fürchtende Querabweichung in der Mitte des Zuges am grössten wird; daselbst wird mit $n' = n''$:

$$M_{max} = \frac{w}{2} \quad (13)$$

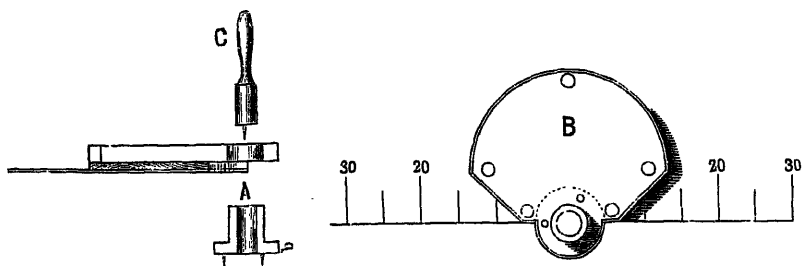
§ 167. Strahlen-Zieher.

Um die mit dem Kompass (oder auch mit dem Theodolit) genommenen Richtungs-Peilungen unmittelbar zu Papier zu bringen, bedarf man eines Strahlen-Ziehers, welcher zum raschen und genauen Zeichnen eingerichtet ist.

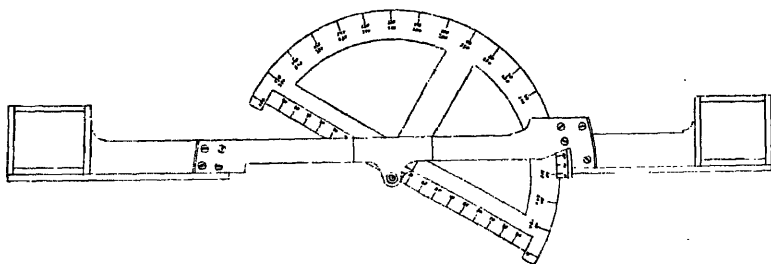
Man hat solche Strahlen-Zieher in verschiedenen Formen; die einfachste Form zeigt Fig. 1.

Fig. 1.
Strahlen-Zieher von Hornplatte oder Karten-Papier.

Der Mittelpunkt C des Halbkreises Fig. 1. wird mit einer Nadel auf dem Punkte der Zeichnung befestigt, von welchem die Strahlen ausgehen sollen. Ist $C X$ die Abscissen-Richtung, so liegt $C B$ in dem Azimut 53° u. s. w. Längs der Kante $A C B$ kann man zugleich einen Massstab anbringen.

Das Einstecken einer Nadel durch eine Hornplatte oder Karten-Papier Fig. 1. bringt immer Ungenauigkeiten und andere Misslichkeiten mit sich, zu deren Abhilfe die Mittelpunkts-Vorrichtung Fig. 2. zu empfehlen ist, welche Ingenieur *Teischinger* in der „Zeitschr. f. Verm. 1883", S. 48 beschrieben hat.

Fig. 2.
Mittelpunkts-Vorrichtung von *Teischinger*.

Die Vorrichtung besteht aus zwei Teilen, dem Axen-Cylinder A und der Platte B. Man beginnt damit, den Mittelpunktsstift C mit seiner Nadel senkrecht auf den Punkt des Planes zu stechen, welcher als Strahlen-Centrum gelten soll; dann schiebt man den Axcylinder A über C, und drückt ihn mit seiner unteren Flantsche und den dort hervorragenden drei feinen Nadeln in das Papier ein, die Platte B mit dem daran angeklebten Strahlen-Zieher Fig. 1. wird dann über A geschoben.

Eine zweite Form des Strahlen-Ziehers zeigt Fig. 3., welche von Professor *Lorber* in der „Zeitschr. f. Verm. 1881", S. 371 mitgeteilt ist.

Fig. 3.
Strahlen-Zieher von *Lorber*.
(Massstab 1 : 5.)

Das mit einer abgeschrägten Kante versehene, den Halbkreis in Bügelform übergreifende, 0,5^m lange Lineal fasst die Axe des Halbkreises von oben. Nun denke man diese Axe über einen bestimmten Punkt der Zeichen-Ebene centriert, was ohne Nadelstich geschieht, die Linealkante in die Nullrichtung der Azimute gelegt (oder auch etwa in die 90°-Richtung, je nach der Bezifferung), dann liegt der mit einem Längen-Massstab versehene Durchmesser des Halbkreises stets in dem Azimut, welches der rechts am Lineal angebrachte Zeiger oder Nonius anzeigt. Die Genauigkeit ist auf 1′ berechnet.

Einen ebenfalls auf grosse Genauigkeit angelegten „Alhidaden-Transporteur“ hat Professor *A. Nagel* im „Civilingenieur“ 24. Band, 1878, 4. und 5. Heft, mit Tafel XIII. beschrieben.

Ferner sind hier zu erwähnen der „Distanzentransporteur“ von Dr. *Otto Decher* in München, ausgeführt von *Ertel & Sohn* in München, und „Der geodätische Tachygraph von *Schlesinger*, Wien 1877“ sowie „Zeitschr. f. Verm. 1878“, S. 281.

Bei allen diesen Anordnungen wird der Mittelpunkt des Teilkreises centrisch über den Punkt der Zeichenebene gebracht, von welchem die Strahlen ausgehen sollen; und diese Centrierung ist dabei massgebend.

Im Gegensatz hiezu ist bei unserem in Fig. 4. gezeichneten, seit Jahren benützten Strahlen-Zieher, auf Centrierung überhaupt verzichtet, ebenso wie auch bei den gewöhnlichen hölzernen Schiebe-Dreiecken, mit denen man rechte Winkel (und 45°, 30°, 60° u. s. w.) abschiebt, der Scheitel des Werkzeugs *nicht* auf den Scheitel des zu zeichnenden Winkels gelegt wird, sondern die Kanten parallel verschoben werden. So brauchen auch die beiden Zieh-Kanten E und E' des Lineals von Fig. 4. *nicht* durch den Mittelpunkt C des Halbkreises zu gehen.

Fig. 4.
Strahlen-Zieher ohne Centrierung.
(Massstab 1 : 4.)

(Hannov. Sammlung.)

Eine Besonderheit ist der Hilfsbogen BD mit dem Mittelpunkt A; dieser Bogen BD und der um A drehbare Ansatzarm LL' dienen nämlich dazu, um die magnetische Missweisung zu berücksichtigen. Hat man z. B. 12° westliche Missweisung, so stellt man den Zeiger Z auf 12° der kleinen Teilung BD, und dann steht der Halbmesser 12° der Halbkreisteilung rechtwinklig auf LL'.

Im Übrigen ist die Anwendung diese: Wir denken uns die Zeichnung auf einem Reissbrett befestigt, und eine gewöhnliche Reissschiene giebt die Haupt-Richtung von links nach rechts (Azimut 90°). Legt man nun die Kante LL' an diese Reissschiene an, und stellt den Arm CE z. B. auf 40° und 220°, wie in Fig. 4. angenommen ist, so hat jede an der Kante E oder E' gezogene Gerade das magnetische Azimut 40° oder 220°, je nachdem man die Richtung von C nach dem Arm EE' oder rückwärts gelten lassen will.

Um die Kante E oder E' an einen gegebenen Punkt der Zeichnung zu bringen, schiebt man das Werkzeug längs der Reissschienenkante LL', oder man verschiebt die Reissschiene selbst mit sich parallel.

Vergleicht man die im vorstehenden beschriebenen Vorrichtungen zum Strahlen-Ziehen, so wird man die *Centrier*-Einrichtungen Fig. 1.—3. dann vorziehen, wenn von jedem Punkte sehr *viele* Strahlen ausgehen; andernfalls nimmt das genaue Centrieren zu viele Zeit weg, und Fig. 4. ist dann besser. Wenn man also fortlaufende Züge

aufzutragen hat, wie z. B. die Bandzüge von § 168., so ist jedenfalls das freischiebende Werkzeug Fig. 4. bequemer. Es ist auch der oft vorkommende Fall zu berücksichtigen, dass in einer Zeichnung ein zweifelhafter Punkt nachgemessen werden soll; das ist mit Centrierung umständlich, mit Abschieben nach Fig. 4. leicht.

Für *flüchtiges* Auftragen, z. B. von Aufnahmen mit dem Taschen-Kompass Fig. 3. § 165. S. 615, ist auch das Abschieben nach Fig. 4. oft noch zu umständlich; in diesem Falle nehmen wir einen *kleinen* Halbkreis von der Form Fig. 1. S. 623, und zeichnen auf quadratisch liniertes Papier, welches allenthalben die Kante AB orientiert anzulegen, und Peilstrahlen zu ziehen gestattet.

§ 168. Messband-Züge mit dem Stock-Kompass und mit Freihand-Höhenwinkelmessung.

In Wäldern mit dichtem Unterholz, im Gebüsch, überhaupt überall, wo die Durchsicht gehemmt ist, kann man mit gutem Erfolge, namentlich zur Höhenaufnahme für Horizontalkurven, Kompass-Züge anwenden, deren Seiten sämtlich gleich lang, nämlich 1 Stahlbandlänge = 20^m (schief gemessen) sind, deren Azimute mit dem Stock-Kompass auf etwa 1 Grad genau bestimmt werden, während die Neigungen gegen den Horizont mit einem Höhengradbogen gemessen werden.

Da das Messband schon früher (S. 17) und der Stock-Kompass in Fig. 2. § 165. S. 615 genügend beschrieben sind, kommt es jetzt darauf an, die verschiedenen *Höhenwinkel-Messinstrumentchen* kennen zu lernen, welche für solche Zwecke geeignet sind. Dieselben müssen in *freier Hand* angewendet werden, und die Höhenwinkel auf etwa $0,1^\circ$—$0,2^\circ$ genau geben.

Wir geben im nachfolgenden die Zeichnung und Beschreibung für mehrere solche Freihand-Höhenwinkelmesser.

I. Zugmaier-Sicklers Höhenwinkelmesser.

Ein erstes solches Werkzeug haben wir bereits früher auf S. 18 abgebildet und beschrieben, wir geben jedoch zu der dort (S. 18) mitgeteilten *inneren* Ansicht nun noch in nachfolgender Fig. 1. S. 627 eine *äussere* perspektivische Darstellung.

Die Teilung wird bei T durch ein Glasfenster beleuchtet, ausserdem ist noch eine Öffnung bei B angebracht zu folgendem Zweck: Wenn der Kreisbogen im Innern schwingt, so muss man zum Ablesen bei T warten, bis er nahezu zur Ruhe gekommen ist; man kann allerdings durch den Knopf, welcher oben an Fig. 1. angedeutet ist, die Schwingungen hemmen; allein man kann dann nicht beliebig mehr oder weniger von neuem schwingen lassen. Hiezu dient die Öffnung bei B (welche beim Nichtgebrauch durch einen Schieber verschlossen werden kann). Während die rechte Hand das Instrument ans Auge hält, kann man nun mit einem Finger der linken Hand bei B hineingreifen, anhalten, auf oder ab, schwach oder stark anstossen u. s. w., und dadurch die Messung beschleunigen und verfeinern.

Auch an den übrigen ähnlichen Freihand-Höhenmessern (Fig. 2. und Fig. 6.) sind solche Öffnungen B angebracht, und erst nach dieser Verbesserung wurde die gewünschte Handlichkeit und Genauigkeit erzielt.

Was die Genauigkeit betrifft, so haben wir für dieses Instrument, welches zuerst in der „Zeitschr. f. Verm. 1872“, S. 214, und 1873 S. 114 beschrieben wurde,

dort S. 115 einen Versuch mit 10 Doppelmessungen mitgeteilt, welcher einen mittleren Messungsfehler $= \pm 0{,}07°$ oder $= \pm 4'$ ergab. Dass diese Genauigkeit bei ruhigen Verhältnissen erreichbar ist, hat sich inzwischen durch langen Gebrauch bestätigt.

Fig. 1.
Zugmaier-Sicklers Höhenwinkelmesser.
Äussere Ansicht (Kreisdurchmesser = 16 *cm*).

(Hannov. Sammlung.)

II. Randhagens Höhenwinkelmesser.

Der Grundgedanke dieses hübschen Instrumentchens ist derselbe wie bei dem vorhergehenden; ein Kreisbogen schwingt im Innern einer cylindrischen Kapsel. Die Teilung liegt aber diesesmal auf der diesseitigen cylindrischen Fläche des Kreisbogens bei T, und wird durch eine Lupe O' abgelesen, neben welcher das Zielrohr OA sich befindet. Man hat also beim Gebrauch abwechselnd in die Lupe O' und in das Ziel-Okular O zu schauen, und denjenigen Strich der Teilung T zu bestimmen, welcher sich neben dem Horizontalfaden des Zielrohres OA zeigt.

Fig. 2.
Randhagens Höhenwinkelmesser.
Kreisdurchmesser = 7,5 *cm*, Länge OA = 13 *cm*.

(Hannov. Sammlung.)

Die Teilung T giebt ganze Grade, Zehntel werden geschätzt. Die Öffnung bei B hat denselben Zweck, wie die Öffnung B in Fig. 1.

Die Genauigkeit dieses Instruments ist ungefähr dieselbe wie die des soeben beschriebenen In-

struments Fig. 1. Man hat bei guter Beleuchtung einen mittleren Fehler von etwa ein Zehntel Grad.

Zur Vergleichung ist zu bemerken, dass Fig. 2. kleiner und handlicher gemacht werden kann als Fig. 1.; Fig. 1. muss eine Länge von etwa 15^{cm} haben, weil man die Teilung mit blossem Auge abliest, und in grösserer Nähe die Teilung für die meisten Augen undeutlich wird. Dagegen gestattet bei Fig. 2. die Lupe O' die Wahl jedes beliebigen Massverhältnisses.

III. Höhenwinkelmesser von Tesdorpf.

Nach einem sehr schönen Grundgedanken, welcher auch schon anderwärts früher verwertet worden ist, konstruiert Mechaniker *Tesdorpf* in Stuttgart Instrumente, deren eines im wesentlichen in Fig. 3., 4. und 5. gezeichnet ist.

Fig. 3.
Tesdorpfs Höhenwinkelmesser (Länge 16 *cm*).

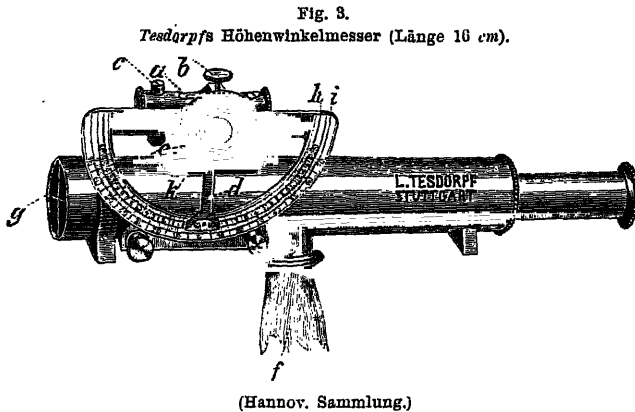
(Hannov. Sammlung.)

In Fig. 4. ist OA die Ziellinie im Innern eines Rohrs, welches bei S einen schiefen Spiegel enthält, der die linke Hälfte des Rohres ausfüllt, und die rechte Hälfte frei lässt (s. die Gesichtsfeldzeichnung Fig. 5.). Der Spiegel S reflektiert das Bild der Blase B einer Libelle LL, welche oben angebracht ist, und beim Gebrauche einspielt.

Fig. 4.
Darstellung des Prinzips zu Fig. 3.

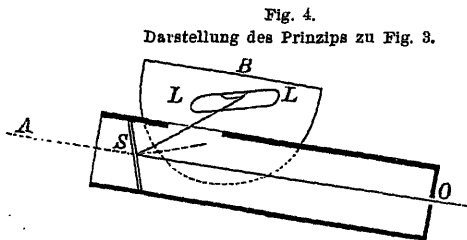



Fig. 5.
Gesichtsfeld.

Man sieht dann in dem Gesichtsfeld Fig. 5. links die Blase im Spiegel S, und rechts den Zielpunkt A. (Es ist also etwas Ähnliches wie bei *Wagners* Freihand-Nivellier-Instrument, das wir bereits auf S. 356 beschrieben haben.)

Die Handhabung ist nun diese: Man fasst das Instrument Fig. 3. am Griff f mit der rechten Hand, und zielt mit dem Faden g im Rohr nach dem jeweiligen Ziel-

punkt. Gleichzeitig hält die linke Hand den geränderten Knopf *c*, und dreht denselben so dass das Bild der Blase links vom Zielpunkt erscheint. Die Blase wird natürlich nie ganz ruhig werden; wenn jedoch die Empfindlichkeit passend gewählt ist, so fühlt man doch bald, in welcher Stellung man den Knopf *c* mit der linken Hand anhalten muss.

Ist dieses geschehen, so kann man noch die Bremsschraube *b* anziehen, und dann das Instrument in beliebige bequeme Haltung bringen, um die Teilung mit dem Index oder Nonius *d* abzulesen. Am besten ist es, die Bremsschraube *b* gar nicht zu benutzen, sondern dem Knopf *c* so viel allgemeine Reibung zu geben, dass die Alhidade *d* während der kurzen Dauer vom Zielen bis zum Ablesen stehen bleibt.

Die Teilung *h i* giebt ganze Grade, und Zehntel-Grade am Nonius. Zur Veranschaulichung der Genauigkeit geben wir von einem Versuche 10 unabhängige Messungen eines Höhenwinkels:

2,3°	1,9°	2,3°	2,0°	2,3°
2,2°	2,2°	2,15°	2,2°	2,1°

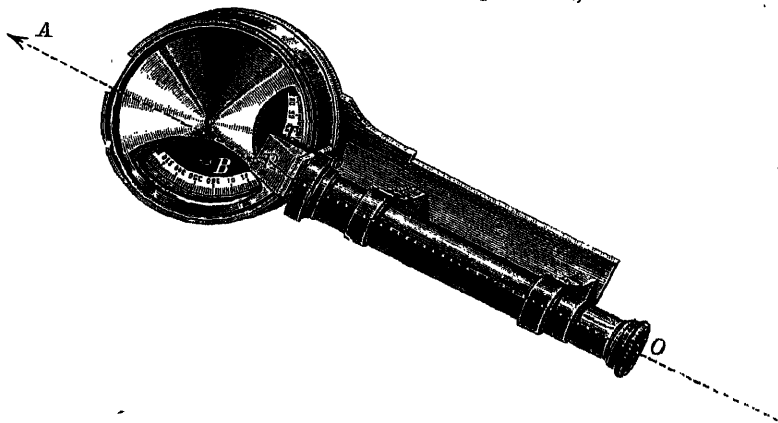
Wenn man hieraus in üblicher Weise den mittleren Fehler berechnet, so findet man für eine Messung:

$$m = \pm\, 0{,}13^\circ$$

oder rund etwa ein zehntel Grad, was auch sonstigen Erfahrungen entspricht.

IV. Prismen-Höhenwinkelmesser.

Nach einem auch bei Kompassen häufig angewendeten Grundgedanken kann man einen fernen Zielpunkt und eine Kreis-Teilung gemeinsam sichtbar machen durch ein Prisma, welches in Fig. 6. die Stellung *P* vor dem Fernrohr *O* hat.

Fig. 6.
Prismen-Höhenwinkelmesser.
(Kreisdurchmesser = 6 cm, Länge = 17 cm.)

(Hannov. Sammlung.)

Die Hypotenusen-Ebene des Prismas *P* hat eine Neigung von 45° gegen die Ebene der Kreis-Teilung *T* und gegen die Absehlinie *OA*, und ist daher im Stande, wie ein ebener Spiegel die Teilung *T* in das Fernrohr *O* zu reflektieren.

Die Öffnung *B* hat denselben Zweck wie die Öffnungen *B* bei Fig. 1. und Fig. 2. S. 627.

Wenn wir nach dieser Beschreibung der Höhenwinkelmesser zu der Beschreibung der Zugmessung selbst übergehen, so haben wir über die Legung des 20 Meter langen Messbandes und über die Anwendung des Stock-Kompasses Fig. 2. § 165. S. 615 nur noch so viel zu sagen, dass der Stock des Stock-Kompasses zugleich als hinterer Messbandstab dient.

Um die Zielhöhen für die von freier Hand zu nehmenden Höhenwinkel richtig zu bestimmen, führt man eine Zielscheibe von etwa 25^{cm} Durchmesser, in Augenhöhe des Beobachters an einem Stabe befestigt, mit, welche stets dem Höhenmesser gegenüber sich befindet. (Die Zielscheibe darf nicht von *Eisen* sein wegen der Nähe des Kompasses.)

Den *Indexfehler* eines Höhenmessers kann man durch Hin- und Hermessen zwischen zwei Punkten, oder sonstwie, bestimmen, und mit geeigneten Richte-Schrauben an dem Instrumente auch wegschaffen.

Indessen kann man den Indexfehler nie so genau wegschaffen, als man im Mittel aus vielen Zielungen messen kann; auch kommen leicht konstante Zielfehler vor, welche sogar auf- und abwärts verschieden sein können. Es ist deswegen das allerbeste, *jede Strecke vor und zurück* zu beobachten, und für die Berechnung das Mittel zu nehmen. Diese Doppelmessung erhält man leicht, wenn der Höhenmesser frei getragen wird. Während zwei Bandzieher das Band strecken und zugleich der hintere Stabhalter das Azimut mit dem Kompass nimmt, kann der mit dem Höhenbogen versehene Beobachter zuerst von oben nach unten und dann, nachdem er herunter gekommen ist, von unten nach oben die Neigung nehmen. Dabei wird zugesehen, ob die Differenz hin und her genügend (innerhalb 1°) stimmt, und nötigenfalls nachgemessen.

Zur Berechnung der Züge braucht man für jede Bandlänge l die Horizontalprojektion $l \cos \alpha$ und den Höhen-Unterschied $l \sin \alpha$. Diese Werte für $l = 20$ sind in der Hilfstafel Seite [38] des Anhanges gegeben.

Zur weiteren Veranschaulichung geben wir in der auf S. 631 stehenden Tabelle ein kurzes, jedoch völlig durchgerechnetes Beispiel.

In Betreff der Höhen-Genauigkeit lässt sich folgende Schätzung machen: Für 20 Meter schiefe Entfernung und einen Höhenwinkel α hat man einen Höhen-Unterschied $20 \sin \alpha$ mit einem Fehler $\frac{20}{57,3} \cos \alpha \, d\alpha$, für einen Winkelfehler $d\alpha$ in Graden: dieses giebt mit $d\alpha = 1/_5{}^\circ$ einen Höhenfehler von etwa $0,07^m$. Bei einem Zug von 50 Bändern (nahezu 1 Kilometer horizontale Länge) beträgt hiernach der mittlere zu fürchtende Fehler des Höhen-Unterschiedes zwischen dem Anfangspunkt und dem Endpunkt:

$$0,07^m \sqrt{50} = 0,5^m.$$

Diese Genauigkeit haben wir in Wirklichkeit auch ungefähr erreicht, wie aus einem in der „Zeitschr. f. Verm. 1887“, S. 12—13 von uns gegebenen Nachweise über 25 solcher Züge mit zusammen 13 Kilometer Länge und rund 2000^m Höhe zu ersehen ist. Im Durchschnitt fand sich hiebei:

für einen Zug von 533^m oder 27 Bändern Länge und von 78^m Höhe:

$$\text{Höhen-Anschlusswiderspruch} = \pm 1,24^m.$$

Bei der Fehlerverteilung kommt also auf 1 Band nur:

$$\frac{1,24}{27} = 0,046^m \text{ oder rund } 5^{cm}.$$

Messband-Zug mit Kompass-Azimuten φ und Höhenwinkeln α.

Punkt	Beobachtung			Berechnung nach Seite [38]					Höhe über N. N.	Punkt
	Kompass-Azimut φ	Länge l	Höhenwinkel α	$l \cos \alpha$	$l \sin \alpha$ mit Verbesserung +	−	$l \sin \alpha$ verbessert +	−		
(0)	309°	20^{m}	+ 7,2°	19,9^{m}	2,51$^{m}_{-2}$		2,49		179,20	(0)
(1)	312	20	+ 1,8	20,0	0,63$_{-2}$		0,61		181,69	(1)
(2)	314	20	— 1,0	20,0		0,35$_{-2}$		0,37	182,30	(2)
(3)	312	20	— 3,4	20,0		1,19$_{-2}$		1,21	181,93	(3)
(4)	318	20	+ 9,8	19,7	3,40$_{-2}$		3,38		180,72	(4)
(5)	323	20	+10,8	19,6	3,75$_{-2}$		3,73		184,10	(5)
(6)	311	20	+13,4	19,5	4,63$_{-2}$		4,61		187,83	(6)
(7)	318	20	+20,5	18,8	7,00$_{-2}$		6,98		192,44	(7)
(8)	302	20	+18,7	18,9	6,41$_{-2}$		6,39		199,42	(8)
(9)	286	20	+19,2	18,9	6,58$_{-2}$		6,56		205,81	(9)
(10)	290	20	+21,6	18,5	7,36$_{-2}$		7,34		212,37	(10)
(11)	282	20	+28,6	17,5	9,57$_{-3}$		9,54		219,71	(11)
(12)	301	20	+32,9	16,8	10,86$_{-3}$		10,83		229,25	(12)
(13)	300	20	+28,8	17,5	9,64$_{-3}$		9,61		240,08	(13)
(14)	304	18,0	+15,4	17,4	4,78$_{-2}$		4,76		249,69	(14)
(15)									254,45	(15)
		298,0^{m}		283,0^{m}	+77,12	—1,54	+76,83	—1,58	75,25	
					+ 75,58		+ 75,25			
				soll	75,25					
				Fehler	0,33					

Die Höhen über N. N., 179,20^{m} und 254,45^{m} des Anfangspunktes und des Endpunktes, sind fest gegeben. Der Höhen-Widerspruch 0,33^{m} wird auf die 15 Bänder verteilt, und giebt auf ein Band 2^{cm}, ausnahmsweise 3^{cm}.

(Fortsetzung von Seite 630.)

Dadei ist zu bedenken, dass in dem Anschlusswiderspruch auch die Fehler der anderwärts trigonometrisch oder teilweise auch nur tachymetrisch bestimmten Anschlusspunkte *mit* enthalten sind.

Bedenkt man weiter, dass die so erhaltenen Einzelhöhen nur auf 0,1^{m} abgerundet in der Karte eingeschrieben werden, dass es gar nicht möglich wäre, die Punkte in Wäldern, Gebüsch u. s. w. auch nur auf 0,1^{m} Höhe genau später wieder zu finden, so erscheint das Ergebnis mit Rücksicht auf die grosse Geschwindigkeit, (für 500^{m} Länge nur etwa 1 Stunde Zeit), ein sehr günstiges.

Setzlatten-Züge.

Man kann auch die schon früher S. 355 erwähnte Setzlatte zur Aufnahme von langen Zügen benützen; man kann als Setzlatte auch eine gewöhnliche 5^{m} lange Messlatte mit darauf befestigter Libelle nehmen, während die Höhen an einer lotrecht gehaltenen zweiten Messlatte oder Nivellierlatte abgelesen werden. Die Azimute für die einzelnen Teile des Zuges erhält man durch den Stock-Kompass, mit welchem man je-

weils streckenweise durch einige Baken die einzuhaltende Richtung voraus absteckt und peilt, so dass *eine* Kompass-Peilung stets für mehrere Setzlattenlagen gilt.

Die Züge mit der Setzlatte geben in Betreff der Höhen grössere Genauigkeit als die Züge mit dem Messband und dem Höhenbogen, sie sind jedoch mühsamer zu messen als die Bandzüge.

Das Auftragen der Züge mit den horizontalen Seitenlängen $l \cos \alpha$ und mit den Kompass-Peilungen geschieht mit dem Strahlenzieher Fig. 4. § 167. S. 625.

Da die Ausgleichung eines Kompass-Zuges mit gleichen Seiten nach S. 621 eine Drehung ohne Formveränderung verlangt (abgesehen von den Längenmessungs-Fehlern), so thut man am besten daran, den Zug zuerst auf Pauspapier aufzutragen und dann mit Einpassung zwischen die gegebenen Endpunkte auf den Plan überzutragen. Der Anschluss wird, wenn die Kompass-Peilungen nur durchschnittlich auf etwa 1 Grad genau sind, doch immer noch so stattfinden, wie es bei einer Horizontalkurven-Aufnahme im Gebirge nötig ist.

Solche Kompass-Züge bilden eine wesentliche Ergänzung der gewöhnlichen Tachymetrie, sie sind fast das *einzige* Mittel zur guten Horizontalkurven-Bestimmung in dichten Wäldern und Gebüsch, ohne Durchhauen von Messungslinien.

§ 169. Tachymetrische Aufnahmen.

Nachdem alle Einzelgeschäfte, welche unter der Bezeichnung „Tachymetrie" zusammengefasst werden, bereits ausführlich behandelt sind, bleibt nur noch die Aufgabe, den Zusammenhang und die Aufeinanderfolge dieser Geschäfte anzugeben.

Es handelt sich darum, eine Anzahl von Punkten zu bestimmen, welche als Standpunkte des tachymetrischen Theodolits dienen, und von denen aus jeder Punkt, dessen Aufnahme wünschenswert erscheint, durch Distanz-Messung, Azimut-Messung und Höhenwinkel-Messung bestimmt wird.

Bestimmung der Tachymeter-Standpunkte.

Um die Tachymeter-*Standpunkte* zu gewinnen, kann man eine der genaueren Methoden, nämlich Triangulierung und trigonometrische Höhenmessung, regelrechte Polygonalmessung und Nivellierung anwenden; oder aber die einzelnen Standpunkte unter sich selbst nur tachymetrisch verbinden. Dieses sind die beiden äussersten Fälle, welche aber in der mannigfaltigsten Weise gegenseitig verknüpft werden können, so dass nach Umständen mehr oder weniger Mühe auf die Festlegung der Tachymeter-Standpunkte verwendet, und entsprechend mehr oder weniger Genauigkeit erzielt wird.

Ein Kleintriangulierungsnetz mit gleichzeitiger trigonometrischer Theodolit-Höhenmessung wird kaum so eng zu legen sein, dass man damit *alle* nötigen Tachymeter-Standpunkte erhielte; wenn aber das Netz ziemlich eng ist, so kann es genügen zur Bestimmung der *Haupt*standpunkte, worauf Nebenstandpunkte selbst wieder tachymetrisch an diese Hauptpunkte angebunden werden.

Ein Polygon-Zug als Grundlage empfiehlt sich namentlich dann, wenn es sich nur um Aufnahme eines Flächenstreifens von 200—500^m Breite für einen Eisenbahn- oder Strassenbau-Entwurf handelt. Ob man dabei die Höhen nivellieren oder durch Höhenwinkel bestimmen will, hängt hauptsächlich von dem Betrag der Höhen-Unterschiede ab; im Flach- und Hügellande ist das Nivellieren am Platz, im Gebirge aber ist dasselbe zu mühsam, und man misst dann die Höhenwinkel aller Strecken (am besten hin und her) gleichzeitig mit der Horizontalwinkelmessung.

Dabei ist es sehr angenehm, wenn man für jede Messung die Zielhöhe z gleich der Instrumentenhöhe i nehmen kann. Die Längenmessungen für solche Züge macht man nicht mit Messlatten, sondern nur mit dem Stahlband. Sind die so gemessenen schiefen Längen $= s$ und die mit dem Theodolit gemessenen Höhenwinkel $= \alpha$, so hat man also $s \cos \alpha$ für die horizontalen Entfernungen, und $s \sin \alpha$ für die Höhen, auszurechnen.

In steilem und unwegsamem Gelände ist aber oft auch das Stahlband noch zu beschwerlich, so dass man für die Streckenmessung zum Distanzmesser greifen muss; und dann misst man den Zug mit dem Tachymeter-Theodolit. Wenn man hiebei alle Distanzen vor- und rückwärts nimmt, und die Übereinstimmung sofort im Felde kontrolliert, und nötigenfalls verbessert, so bekommt man immer noch ein gutes Resultat, denn solche Basiszüge erhalten nochmals eine Verbesserung durch die Ausgleichung zwischen zwei Fixpunkten. Wenn man kleine Seiten (unter 100^m) nimmt, so ist es rätlich, die *Kompass*-Azimute beizuziehen, oder sogar allein zu nehmen, denn ein langer Zug mit vielen Strecken macht wegen der nötigen genauen Centrierungen bei Theodolitmessungen viele Mühe, und bei kurzen Seiten ist gerade der Kompass am Platz. Wenn man alle Strecken vor- und zurückpeilt, und die Azimute dabei im Felde kontrolliert, und nötigenfalls verbessert, so schliesst ein solcher Kompass-Zug meist sehr befriedigend ab.

Man kann zwar solche grundlegende Züge *gleichzeitig* mit der Klein-Messung machen, es ist aber doch besser, sie zuerst für sich zu behandeln, die Standpunkte zu verpflocken, und erst wenn man sich von genügendem Anschluss überzeugt hat, die Einzelaufnahme zu beginnen.

Durch Verbindung aller dieser Mittel kann man wohl erreichen, dass jeder Basispunkt in der Lage auf $0{,}5^m$—$1{,}0^m$, und in der Höhe auf etwa $0{,}1^m$ zuverlässig festgelegt wird.

Wenn man die Basispunkte *nicht* zum voraus planmässig bestimmt und verpflockt, sondern die Tachymeter-Standpunkte unter sich selbst nur tachymetrisch zusammenhängt, und dann gewöhnlich nicht verpflockt, so soll man jedenfalls alle Verbindungen je zweier Standpunkte in Distanz, Azimut und Höhe gegenseitig messen, und die Kontrollen im Felde selbst bilden, um nicht Gefahr zu laufen, durch einen Fehler in der Verbindung zweier Standpunkte die ganze Arbeit, welche auf einem fehlerhaften Standpunkt oder auf mehreren Standpunkten, gemacht ist, zu verlieren.

Grundsätze für die Auswahl der Einzel-Punkte.

Insofern man für die Lattenpunkte im Felde freie Wahl hat, soll man sich an folgende zwei Regeln halten:

I. Es sind alle Punkte aufzunehmen, welche die Formen der Erdoberfläche charakterisieren.

II. Die Punkte sollen in Zügen nach der Richtung des grössten Gefälls angeordnet werden.

Von diesen zwei Regeln ist die erste die wichtigere. Zu ihrer Begründung hat man die Aufgabe der Höhen-Aufnahme geometrisch zu definieren. Hiezu erinnern wir uns, dass eine krumme Linie in der Ebene als aufgenommen gilt, wenn so viele Punkte derselben in einem Plan festgelegt sind, dass der Verlauf der Linie daraus erkannt, also dieselbe von freier Hand durch die Punkte gezogen werden kann.

Entsprechend muss eine Fläche als aufgenommen gelten, wenn so viele Punkte derselben, und zwar hauptsächlich die die Höhenverhältnisse charakterisierenden, durch

Grundriss und Höhe festgelegt sind, dass der Verlauf der Fläche daraus ersehen, und insbesondere die Höhe eines nur im Grundriss gegebenen Punktes durch Einschaltung gefunden werden kann. Hieraus folgt von selbst, dass jede *Brechungs*linie der Erdfläche, in welcher also Unstetigkeit des Gefälls stattfindet, durch eine genügende Anzahl von Punkten aufgenommen sein muss, ferner sind charakteristische Punkte auf *Kuppen* und in *Thälern* u. s. w. unbedingt zu nehmen.

Die zweite der beiden oben angegebenen Regeln, nämlich die Punktanordnung nach dem grössten Gefäll zu treffen, ist in gewissem Sinn in der ersten mit enthalten, denn wenn keine anderen besonders ausgezeichneten Punkte da sind, so wird die Erdfläche am besten durch Profile nach dem grössten Gefälle charakterisiert. Indessen zeigt sich der Hauptwert unserer zweiten Regel bei der nachfolgenden Konstruktion der Horizontal-Kurven (vgl. den folgenden § 170).

Handriss.

Der Zusammenhang der Punkte muss durch einen *Handriss* ersichtlich gemacht werden. Derselbe enthält einen nach Augenmass gemachten Grundriss des aufzunehmenden Feldes, mit eingeschriebenen Nummernpunkten, welche den Nummern des Feldschreibbuchs entsprechen. Die Führung des Handrisses, die Auswahl der Punkte und entsprechende Anweisung des Lattenträgers ist die Hauptsache des ganzen, welche deshalb der leitende Ingenieur übernimmt, während die Ablesungen am Instrument einem Gehilfen überlassen werden. Die Übereinstimmung der Nummerierung im Handriss und im Feldschreibbuch ist von Zeit zu Zeit, etwa bei jedem 5. oder 10. Punkt, durch Zuruf oder Zeichen zu sichern. Nach einiger Übung kann ein Ingenieur zwei (vielleicht sogar drei) Lattenträger beschäftigen.

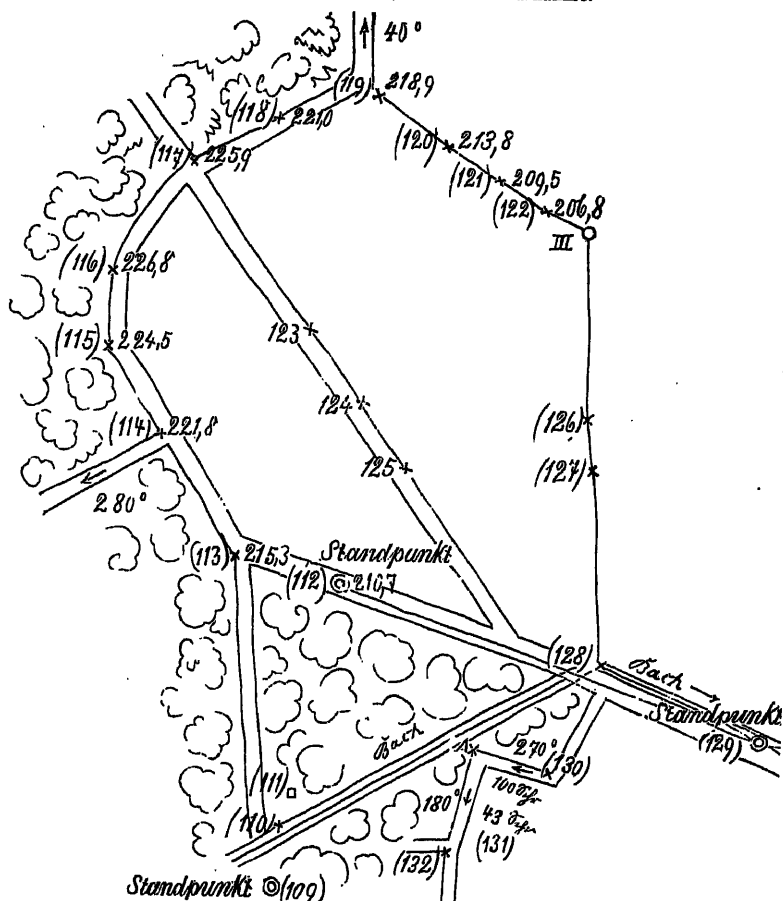
Verwickeltere Formen, namentlich solche, welche schwer von einem Standpunkt überschaut werden können, z. B. Gebäudegruppen, oder Formen, bei denen es sich nicht lohnt, alle einzelnen Punkte tachymetrisch aufzunehmen, kann man durch Einzelmasse im Handriss selbst aufnehmen. Häufig genügt hiezu Abschreiten, und für die Richtungen ein Taschenkompass.

Der Handriss soll ausser dem Lageplan und den Nummernpunkten noch nach Augenmass gezeichnete Horizontalkurven enthalten, welche als „Leitkurven“ bei der endgültigen Kurven-Konstruktion (§ 170.) dienen; ausserdem können steile Böschungen, Raine u. s. w. durch Schraffierung hervorgehoben werden.

Der Handriss wird nach Augenmass, thunlichst nach richtigen Verhältnissen, und *orientiert*, Nord oben (nicht nach der Bequemlichkeit des jeweiligen Standpunktes orientiert), gezeichnet. Zu diesem Zwecke dient die Orientierung nach dem Kompass des Tachymeters, ausserdem ein kleiner Taschenkompass, den der Handrissführer ohnehin zu kleinen Lokalzeichnungen, nebt Schrittmass benutzt (s. o.).

Die Nummerierung der Punkte, im Handriss und im Feldschreibbuch übereinstimmend, wird am besten konsequent *durchlaufend* gemacht, also (1), (2) . . . (113), (114) . . . Man ist zwar oft versucht, auf einer Station wieder neue Nummerirung anzufangen, oder auf einzelnen Stationen Litterierung (a) (b) (c) . . . anzuwenden; das ist aber nicht rätlich, weil sonst dieselbe Nummer auf dem Plan wiederholt vorkäme, was zu Irrtümern führen würde.

Was die *Zahl* der aufzunehmenden Punkte betrifft, so ist es natürlich schwer, eine allgemeine Angabe zu machen, doch kann man in runder Zahl 500 Punkte auf 1 Quadratkilometer als ausreichend für Eisenbahnvorarbeiten im Gebirge angeben.

Fig. 1.
Handriss einer tachymetrischen Aufnahme.

Feldschreibbuch einer tachymetrischen Aufnahme (zu Fig. 1.).

Punkt Nr.	Latte l	Azimut (Nord)	Höhenkreis	Höhen-winkel α	Horizontal-Distanz $l \cos^2 \alpha$	Höhen-Differenz $\frac{1}{2} l \sin 2\alpha$	Höhe über N. N.	Bemerkungen.
	m		*Standpunkt* (112)				210,7m	
(113)	27,8	279,8°	80° 30′ — 8′	+ 9° 38′	27,0m	+ 4,6m	215,3	Index-Korrektion des Höhen-Kreises = — 8′.
(114)	66,0	334,9	80° 20′ — 8′	+ 9° 48′	64,0	+ 11,1	221,8	
(115)	83,0	335,7	80° 23′ — 8′	+ 9° 45′	80,5	+ 13,8	224,5	
(116)	128,0	1,1	82° 50′ — 8′	+ 7° 18′	125,9	+ 16,1	226,8	
(117)	132,0	8,2	83° 28′ — 8′	+ 6° 40′	130,2	+ 15,2	225,9	Magnetische Abweichung = 12,0°.
(118)	160,0	30,7	86° 26′ — 8′	+ 3° 42′	159,3	+ 10,3	221,0	
(119)	178,0	37,6	87° 29′ — 8′	+ 2° 39′	177,6	+ 8,2	218,9	
(120)	160,0	49,4	89° 2′ — 8′	+ 1° 6′	160,0	+ 3,1	213,8	
(121)	150,0	63,1	90° 35′ — 8′	— 0° 27′	150,0	— 1,2	209,5	
(122)	147,5	71,4	91° 40′ — 8′	— 1° 32′	147,5	— 3,9	206,8	

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen geben wir in Fig. 1. S. 635 einen kleinen Handriss einer tachymetrischen Aufnahme und den zugehörigen Auszug aus dem Feldschreibbuch.

Die Ablesungen an dem Höhenkreis erfolgen nach Zenitdistanzen, z. B. 80° 30′, welchem ein Höhenwinkel + 9° 30′ entspricht, wenn kein Indexfehler zu berücksichtigen ist. Man macht natürlich im allgemeinen den Indexfehler = Null; es kommt aber doch nicht selten vor, dass man in der Ausrechnung einen Indexfehler zu berücksichtigen hat, wie in dem Falle unseres Beispiels, wo die Index-Korrektion = — 8′ ist.

Die Horizontal-Distanzen $l \cos^2 \alpha$ und die Höhen $\frac{1}{2} l \sin 2\alpha$ werden aus unseren tachymetrischen Tafeln aufgeschlagen (vgl. S. 609 und Anhang Seite [40] bis [43]). Alles Übrige erklärt sich wohl von selbst.

Wenn man nach den Angaben des Feldschreibbuchs die 10 Punkte (113) bis (122) von dem Punkte (112) aus konstruiert, so wird man finden, dass man *ungefähr* ein Bild wie Fig. 1. S. 635 erhält, das aber, wie natürlich, sich mit dem nur nach Augenmass entworfenen Handriss Fig. 1. S. 635 nicht deckt.

§ 170. Konstruktion der Horizontalkurven.

Die Aufgabe der Höhenaufnahme wurde in § 169. S. 633—634 so definiert: Es sollen so viele die Erdoberfläche charakterisierende Punkte aufgenommen werden, dass dadurch der allgemeine Verlauf der Erdoberfläche bestimmt wird, und andere Höhenpunkte durch Einschaltung gefunden werden können.

Wenn eine vollständige Aufnahme nach dieser Erklärung vorliegt, so handelt es sich noch um die bildliche Darstellung der krummen Erdoberfläche; und diese Aufgabe wird hier gelöst durch Zeichnung der Linien, nach welchen die Fläche von einer Reihe horizontaler Ebenen geschnitten wird, d. h. von Horizontalkurven.*)

Eine *Horizontalkurve* hat die Eigenschaft, dass ihre Tangenten-Richtung überall *horizontal* ist, die Kurve selbst kann jedoch nur dann als in einer horizontalen Ebene liegend bezeichnet werden, wenn von der Erdkrümmung abgesehen wird.

Wenn man eine genügende Zahl gut ausgewählter Punkte hat, so kann man immer die Horizontalkurven konstruieren, sie werden jedoch mit den unvermeidlichen Ungenauigkeiten der Interpolation behaftet sein, die vermieden würden, wenn die Kurven auf dem Felde selbst ausgesteckt und aufgenommen werden könnten.

Die unmittelbare Aufsuchung der Kurven auf dem Felde mittelst des Nivellierinstruments, und nachherige Aufnahme, ist aber eine so mühevolle Arbeit, dass es ganz unmöglich ist, dieses Verfahren im grossen anzuwenden; und die Praxis ist auch längst über derartige unglückliche Versuche hinweggeschritten.

Allein auch abgesehen von der Arbeit selbst stellen die unmittelbar aufgenommenen Kurven durchaus nicht das Ideal einer Höhenaufnahme vor, denn wenn man irgend welchen Gebrauch von der Aufnahme machen will, so muss man die charakterisierenden Höhenpunkte, Kuppen, Thalschnitte u. s. w. doch haben, und gerade solche wichtige Punkte drücken sich in den Kurven oft ungenügend aus. Auch bekommt man bei der unmittelbaren Kurven-Aufnahme viel zu wenig Fixpunkte, an denen bei

*) „Zur Geschichte der Horizontalkurven oder Isohypsen“, von *Licka*, s. „Zeitschr. f. Verm. 1880“, S. 37 und 484.

späterer Erweiterung der Aufnahme, gründlicherer Behandlung einzelner Teile oder Revision, wieder angeschlossen werden kann.

Nach dieser Nebenbetrachtung kehren wir zu der *Konstruktion* der Kurven nach Massgabe gut ausgewählter Höhenpunkte zurück; und zwar setzen wir voraus, dass die Höhenzahlen aller aufgenommenen Punkte in den Plan eingeschrieben sind, und dass ausserdem für die sehr ungleichförmig verlaufenden Teile, z. B. Schluchten u. s. w., Leitkurven nach Augenmass in dem die Aufnahme begleitenden Handriss eingezeichnet sind.

Die Kurven-Konstruktion ist eine Aufgabe der darstellenden Geometrie, sie besteht in der Einschaltung von Höhen zwischen die unmittelbar gemessenen Höhenpunkte.

Das beste Hilfsmittel hiezu besteht in der Konstruktion von *Profilen*, welche durch die aufgenommenen Punkte gehen. Hiezu sind Netze horizontaler und einiger vertikaler Linien (vgl. Fig. 1. S. 638) als Vorbereitung nötig, man kann hiezu Millimeterpapier oder auch gewöhnliches schwachblau quadriertes Schreibpapier nehmen. Das Netz hat auf geeignete Überhöhung der Profile Bedacht zu nehmen, da man aber in der Überhöhung ziemlichen Spielraum hat, so kann ein und dasselbe Netz auch für verschiedene Massstäbe des Plans verwendet werden. (Überhöhung 5—10fach.)

Benützt man zu einem Profil nur *zwei* Punkte, so ist man genötigt, dasselbe geradlinig anzunehmen; wenn dagegen drei oder mehr Punkte im Grundriss in einer geraden oder in einer nicht stark gekrümmten stetigen Linie liegen, was bei der Auswahl der Punkte auf dem Felde anzustreben ist, so benützt man diese Punkte zusammen zur Konstruktion des durch sie gehenden Profils, das man aus freier Hand durch die ihnen entsprechenden Punkte legt. Zieht man dann in dem Profil die den runden Höhen, z. B. 305^m, 310^m, 315^m u. s. f. entsprechenden Horizontalen, so liefern deren Schnitte mit der Profil-Linie Punkte, welche als Punkte der Kurven sofort mit dem Zirkel in die Karte übergetragen werden. Die Zweckmässigkeit der Regel, dass die Profile möglichst nach dem grössten Gefäll zu legen sind, zeigt sich bei der Konstruktion darin, dass sie in diesem Falle die meisten Punkte durch gute Schnitte liefern. Hat man die nötige Anzahl von Kurvenpunkten in der Karte, so verbindet man sie von freier Hand mit Benützung etwaiger auf dem Felde gezeichneter Leitlinien, und der Erinnerung an die Anschauung der Bergformen bei der Aufnahme, wobei kleine Abweichungen von den konstruierten Punkten geboten sein können, um flüssige Linien zu erhalten.

Ein Beispiel einer solchen Kurven-Konstruktion zeigt die umstehende Fig. 1. S. 638. Der Massstab der Horizontalaufnahme ist 1:2500, die Überhöhung der Profile ist 10fach. Die durch kleine Kreuze und beigeschriebene Zahlen bezeichneten Punkte sind unmittelbar aufgenommen

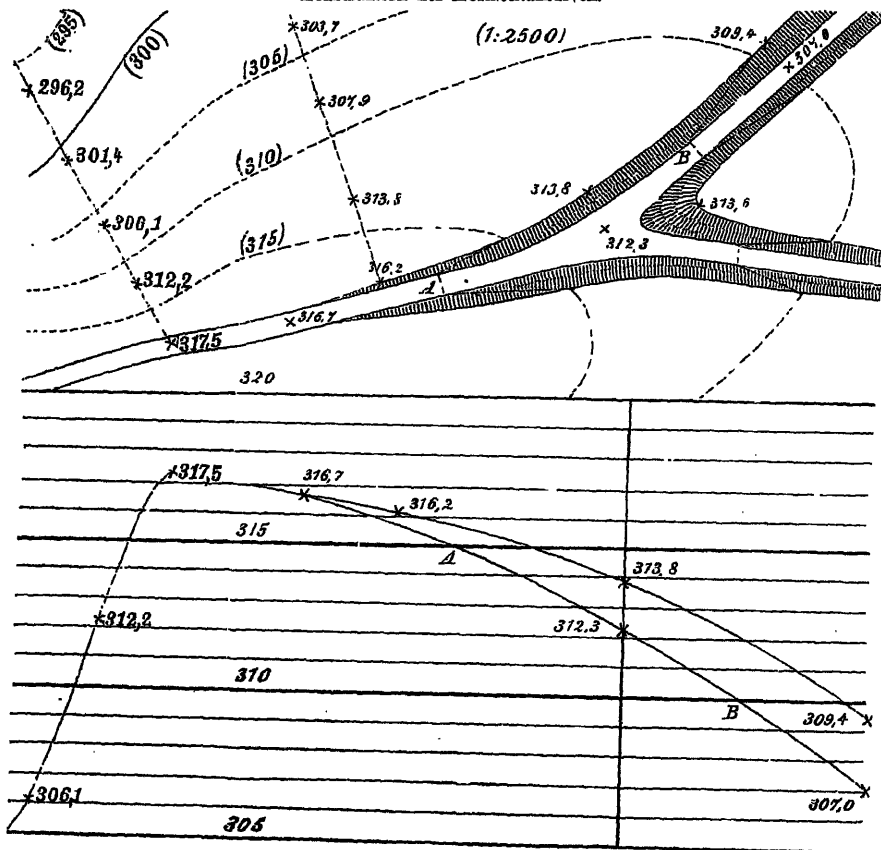
Man beginnt etwa mit der Konstruktion des Längen-Profiles des nördlichen Weges, indem man die Höhenpunkte 307,0, 312,3 und 316,7 in das Netz einträgt, und damit die Profil-Linie von freier Hand durchzieht. Die Abstände der Punkte A und B von der vertikalen Netz-Linie trägt man vom Höhenpunkt 312,3 in der Karte nach links und rechts, und erhält damit die Punkte A und B, in welchen die Kurven (315) und (310) den Weg schneiden. Ebenso verfährt man mit dem nördlichen Böschungsrand, der durch die Höhenpunkte 309,4, 313,8, 316,2 und 316,7 bestimmt ist, sowie mit dem zweiten Weg, und den übrigen Böschungsrändern.

Da die Punkte 303,7, 307,9, 313,8 und 316,2 schön in einer Geraden in der Richtung des grössten Gefälls liegen, worauf bei der Aufnahme Bedacht genommen

wurde, so kann man durch sie ebenfalls ein Profil legen, welches die Schnittpunkte der drei Kurven (305), (310) und (315) mit dem Grundriss des Profils giebt.

Netz-Linien auf Pauspapier.

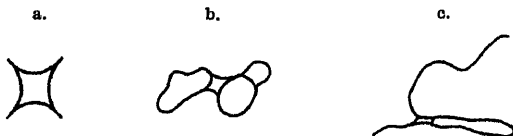
Wenn das Parallel-Liniennetz auf dem unteren Teile von Fig. 1. auf *Paus*papier gezeichnet, bzw. gedruckt ist, so kann man die Profil-Konstruktion und das Einstechen der Kurvenschnitte manchmal bequemer durch Herumschieben auf dem Plane machen.

Fig. 1.*)
Konstruktion der Horizontalkurven.

Ein auf Pauspapier-Netze gegründetes, anderes Verfahren der Kurven-Konstruktion hat Ingenieur *Wagner* in der „Zeitschr. f. Verm. 1886", S. 145 angegeben, in dem jedoch die Grundriss-Geraden als *schiefe* Linien (Hypotenusen) in dem Parallelen-Netz auftreten, weshalb das Verfahren sich immer nur auf je *zwei* Punkte erstrecken kann.

*) In dem unteren Teil von Fig. 1. sollten noch einige Vertikal-Linien gezogen sein, z. B. durch die Punkte 317,5, 316,7 u. s. w.; man möge diese Vertikal-Linien nachtragen.

Verschiedene Kurven-Formen.

Wenn man nur die allgemeinsten geometrischen Begriffe richtig inne hat und sich stets erinnert, dass eine und dieselbe Horizontalkurve sich nicht selbst berühren kann, so wird es nicht schwer sein, auch bei verwickelten Flächenformen das richtige zu treffen. Man findet aber häufig Kurven-Karten mit geradezu unmöglichen Formen, wie z. B. die in nachstehender Fig. 2. gezeichneten, welche einer kritischen Besprechung in der „Zeitschr. f. Verm. 1880“, S 61 entlehnt sind.

Fig. 2.
Unmögliche Kurvenformen.

Ein Beispiel richtiger Horizontalkurven-Zeichnung zeigt Fig. 3. S. 640. (Dieses Beispiel ist einer grösseren Aufnahme vom Herbst 1872 entnommen, zu Eisenbahn-Vorarbeiten im Schwarzwald gehörig; die eingeschriebenen Punkte Sommerbühl, Obersommerbühl und Galgen entsprechen den Punkten S, S' und G des schon früher auf S. 289 mitgeteilten trigonometrischen Netzes.)

Von den auf S. 640 eingeschriebenen Punkten wollen wir die drei *Sattelpunkte* bei 505,0, 503,5 und 552,2 noch besonders betrachten. Andere Formen als die an diesen drei Stellen gezeichneten, können nicht vorkommen, namentlich ist das oben in Fig. 2a. und 2b. oder 2c. gezeichnete, nach aussen concave Viereck unmöglich.

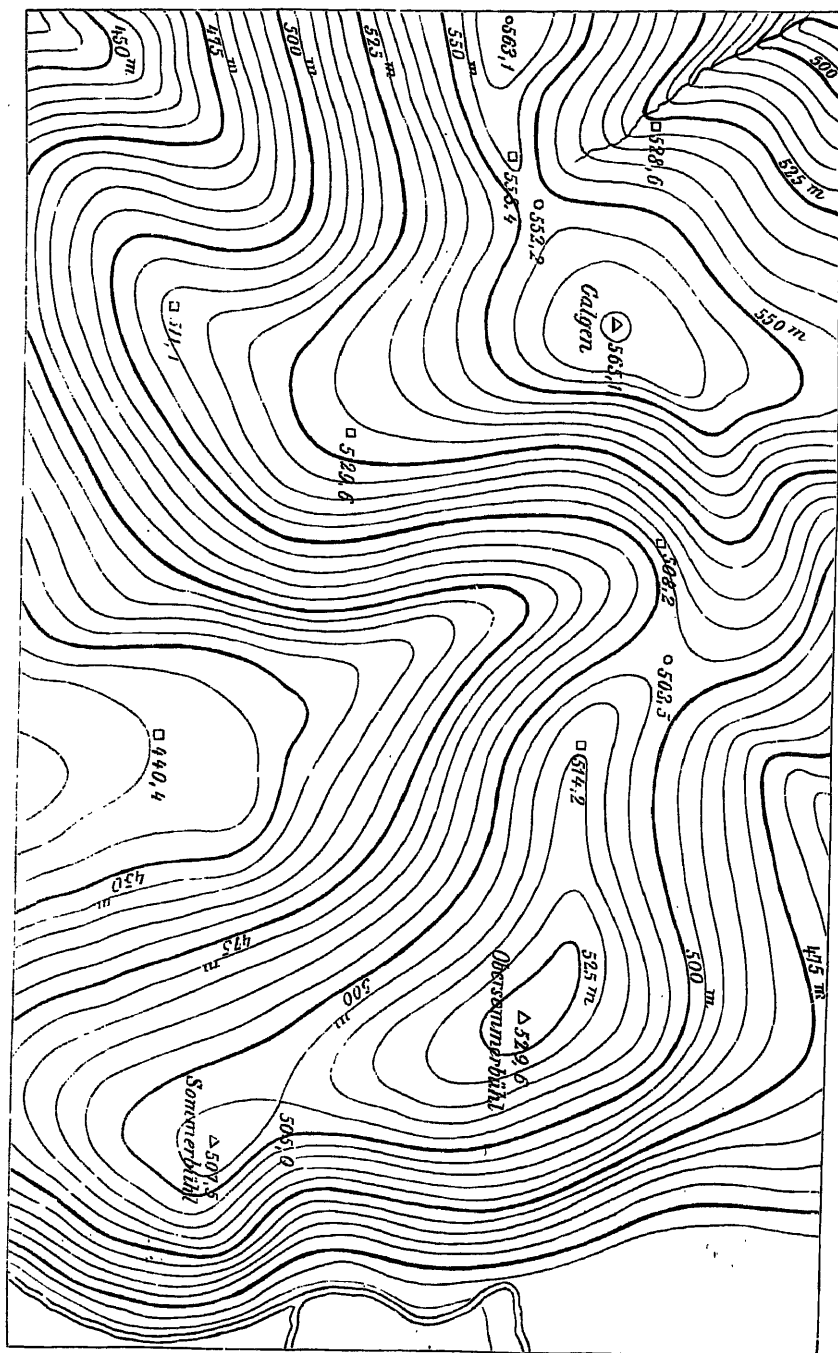
Man kann sich über den Kurven-Verlauf auf Sattelflächen am besten dadurch Rechenschaft geben, dass man die einfachste stetige, theoretisch bestimmte krumme Fläche betrachtet, welche einen Sattel hat, und das ist das *hyperbolische Paraboloid.* Denkt man sich diese Fläche zweiter Ordnung so gelegt, dass sie einem natürlichen Gebirgssattel entspricht, so kann sie von einer horizontalen Ebene nur nach einer *Hyperbel* geschnitten werden. Diese Hyperbel geht allerdings in einem besonderen Falle in zwei sich schneidende Gerade (Asymptoten) über, und diesem Grenzfall entspricht eine sich selbst schneidende ∞förmige Kurve, wie z. B. auf S. 640 bei dem Sattelpunkte 505,0 auf Sommerbühl.

Besondere Hilfsmittel zur Kurven-Konstruktion.

Das beste Verfahren der Kurven-Konstruktion ist die *Profil-Zeichnung* *), welche in dem Beispiele von S. 638 veranschaulicht ist. Der Hauptvorzug besteht hiebei darin, dass mehr als *zwei* Punkte zusammen benützt werden können, wodurch Krümmungen der Erdfläche berücksichtigt und zugleich die Punkte selbst kontrolliert werden können.

---

*) Die Profil-Zeichnung als Hilfsmittel für Konstruktion der Horizontalkurven ist, soweit die Vergleichung mit anderen Veröffentlichungen zeigt, zuerst in unserer ersten Auflage 1873, S. 242, in dieser Form ausgeführt und ins richtige Licht gesetzt worden. Ein in allen Einzelnheiten durchgeführtes Beispiel unseres von 1869—1881 in Karlsruhe eingeführten Verfahrens geben die „Übungsblätter zum Plan- und Terrain-Zeichnen, 11 Blatt mit kurzer Anleitung zum Gebrauch, von Dr. *M. Doll,* 1888, Verlag von J. Veith, Karlsruhe“. Blatt 7, 8, 9, 10, 11: Konstruktion der Horizontalkurven.

Fig. 3. (Massstab 1 : 5000.)
Höhen-Abstand der Kurven = 5m.

Zur Bestimmung der Kurvenschnitte zwischen nur je *zwei* Punkten sind zahlreiche Verfahren und Hilfsmittel ersonnen worden; das einfachste ist ein Strahlen-Diagramm, beschrieben u. A. als in Württemberg gebräuchliches Hilfsmittel, von *Haas* „Über Höhenaufnahmen 1:2500 und 1:25000 u. s. w. Stuttgart, Wittwer 1878", S. 117; ferner der „*Metrostroph*", ein Hilfsmittel für die Konstruktion von Horizontalkurven, von *F. H. Reitz*, Zeitschr. f. Verm. 1877, S. 31; „Interpolations-Massstab zur Konstruktion von Horizontalkurven von *Wehn*", Zeitschr. f. Verm. 1880, S. 227; „Horizontalkurvenzeiger von *Schmeling*", Zeitschr. f. Verm. 1881, S. 106; „*C. Wagner*s Interpolationstafel für Horizontalkurven, Zeitschr. f. Verm. 1886, S. 145; „Proportional-Massstab zur Konstruktion von Höhenkurven, von *Hammer*", Zeitschr. f. Verm. 1888, S. 214; „Verhältnis-Massstab zur Herstellung von Höhenkurven, von *Vosyka*", Zeitschr. f. Verm. 1888, und „Hilfsinstrument zur Konstruktion von Höhenkurven, von *Rödder*", Zeitschr. f. Verm. 1888.

Aus diesen zahlreichen Hilfsmitteln und Versuchen ist zu ersehen, dass das Bedürfnis der Kurven-Einschaltung zwischen je *zwei* Punkte, auch neben dem allgemeinen Hilfsmittel der Profil-Konstruktion mit beliebig vielen Punkten, besteht, und ferner, dass die Proportional-Einschaltung sehr verschiedenartig gemacht werden kann. Es handelt sich immer um eine Proportion mit der Auflösung:

$$\varDelta h = \frac{a}{A} \varDelta H$$

und dazu kann namentlich auch der *Rechenschieber* benützt werden, der an einer ab geschrägten Kante zugleich einen Millimeter-Massstab trägt.

Allgemeine Bemerkungen.

Nach Erlangung einiger Erfahrung kann man die Kurven *zum Teil*, namentlich in flachem Gelände, nach Schätzung zeichnen, indem man beständig die Höhenzahlen, und deren Differenzen unter sich und gegen die runden Kurvenhöhen im Auge behält; zum Mindesten soll man aber einige Haupt-Profil-Züge wirklich konstruieren.

Ganz besondere Sorgfalt ist zu verwenden auf *Brechungslinien* der Erdfläche, deren Profile besonders herauszuzeichnen sind. Die Unstetigkeiten der Horizontalkurven an solchen Stellen müssen klar hervortreten, und sind eher zu übertreiben als abzurunden, damit die Zeichnung einen bestimmten Charakter bekommt. Namentlich gilt dieses beim Schnitt der Kurven mit Wegen, Bächen, Böschungsrändern etc. An solchen Stellen muss man die Erdoberfläche möglichst in geometrische Körper, Prismen, Kegel etc. zerlegt denken, und bei der Konstruktion alle Mittel der beschreibenden Geometrie anwenden. Die Behandlung solcher Stellen giebt den besten Massstab für die Brauchbarkeit des Ganzen. Wenn hier die Kurven allein den Charakter nicht genügend wieder geben, so kann durch einige Schraffierungen nachgeholfen werden.

Die Kurven-Konstruktion kann nicht wohl mit Erfolg von einem andern Ingenieur ausgeführt werden als von dem, der die Aufnahme gemacht hat, weil die Erinnerung der angeschauten Bergformen hier wichtig ist. Nach der Konstruktion ist es unter Umständen nützlich, nochmals mit der Zeichnung in der Hand das Feld zu begehen, und nötigenfalls den Charakter der Bergformen durch kleine Korrekturen deutlicher auszudrücken; man kann aber auch dabei Gefahr laufen, das, was gründlich konstruiert ist, durch augenblickliche falsche Auffassung wieder zu zerstören.

Wenn die Konstruktion vollendet ist, muss die Übersicht der Kurven gewahrt werden durch stärkeres Ausziehen derjenigen Kurven, welche runden Höhenzahlen entsprechen, oder Anlegen von Farbenbändern.

Die eingeschriebenen Höhenzahlen sind auch nach Herstellung der Kurven durchaus nicht überflüssig, wenigstens dann nicht, wenn die Karte nicht bloss zum Anschauen, sondern technischen Zwecken dienen soll. Will man der Übersichtlichkeit wegen, oder aus Mangel an Raum bei Verkleinerung der Karte, nur einen Teil der Zahlen aufnehmen, so sind möglichst viele Fixpunkte (Marksteine, Strassensteine u. s. w.) auszuwählen.

Bei der Verwendung einer Höhenkarte zur Anfertigung eines Strassen- oder Eisenbahn-Entwurfs zeigt sich die Nützlichkeit eingeschriebener Höhenzahlen neben den Kurven mannigfach: Man benützt gerne bei der Konstruktion des Längen-Profils solche Zahlen ausser den Kurven; werden Ergänzungsaufnahmen nötig, so braucht man die Zahlen der Fixpunkte zum Anbinden der Nivellierungen.

Der Schichten-Abstand der Karte soll, wenn ausser den Kurven noch Zahlen vorhanden sind, nicht sehr klein genommen werden (beim Massstab 1:2000 bis 1:5000 nicht kleiner als 5 Meter). Es giebt Karten, welche sogar in flachem Felde so mit Kurven überladen sind, dass es schwer wird, sich zurecht zu finden, und dass man bei Verwendung der Karte für Ingenieur-Zwecke bei weitem nicht alle Kurven verwerten kann.

Es hängt dieses damit zusammen, dass niemand mit gutem Erfolge Höhen-Aufnahmen und Kurven-Konstruktionen machen kann, der nicht die spätere technische Verwertung derselben (namentlich für Ingenieur-Zwecke) kennt.

Überhaupt ist die Kurven-Konstruktion durchaus nicht eine mechanische geometrische Arbeit, sie erfordert vielmehr Kenntnis der Bergformen und geometrisches Verständnis der Eigenschaften stetiger und unstetiger krummer Flächen.

Wenn eine Karte in wesentlich kleinerem Massstab als dem bisher vorausgesetzten (etwa 1:2000 — 1:5000) ausgeführt werden soll, z. B. eine topographische Karte (1:25000) oder geographische Karte (etwa 1:500000), so muss teilweise in anderer Weise verfahren werden, und namentlich die Übersicht (durch Farben) gewahrt werden; und es muss der Zweck, dem die Arbeit dienen soll, wohl im Auge behalten werden; im wesentlichen jedoch werden die entwickelten Grundsätze immer massgebend sein.

Die Reduktion der Klein-Aufnahmen in 1:2500 auf den Massstab 1:25000 einer topographischen Karte erfordert eine gewisse Generalisierung, und darf deswegen nicht bloss mechanisch ausgeführt werden. Um bei dieser Generalisierung den landschaftlichen Charakter nicht zu verfehlen, muss man in erster Linie diesen aufzufassen in der Lage sein, wozu einige geologische Kenntnisse erforderlich sind.

Je kleiner der Karten-Massstab ist, desto weniger gelingt es, durch Kurven die Bergformen zum Ausdruck zu bringen. (Verfasser hat in der Bearbeitung einer „Übersichts-Höhenkarte von Baden und Württemberg" im Massstab 1:400000 (Stuttgart 1871 und Karlsruhe 1878) seine Ansicht über die Behandlung solcher Karten ausgesprochen.)

§ 171. Flüchtige Aufnahmen.*)

Im Anschluss an die Tachymetrie können wir noch einige Bemerkungen machen über flüchtige Aufnahmen, namentlich durch Abschreiten und Kompass-Peilen, indem solche kleinere Aufnahmen in der Tachymetrie oft als Nebenarbeiten vorkommen.

---

*) Eine ausführlichere Darstellung dieses Gegenstandes haben wir gegeben in dem Werke: „Anleitung zu wissenschaftlichen Beobachtungen auf Reisen" herausgegeben von *G. Neumayer*, zweite Auflage, Berlin 1888, S. 41—113.

An Werkzeugen setzen wir zunächst nichts voraus als einen Taschen-Kompass oder Stock-Kompass nach § 165. Fig. 2. und Fig. 3. S. 615.

Zu dem Schrittmass, über welches schon in § 14. S. 34—35 das nötige gesagt wurde, erwähnen wir noch mit Beziehung auf nebenstehende Fig. 1. den *Schrittzähler*.

Ein solches Instrument von Taschenuhr-Form wird durch die Erschütterung des schreitenden Menschen in Bewegung gesetzt und registriert diese Erschütterungen durch ein Uhr-Zählwerk.

Figur 1.
Schrittzähler, natürliche Grösse.

(Hannov. Sammlung.)

Unser Instrument Fig. 1. zählt bis zu 25 000; der grosse Zeiger zählt die einzelnen Schritte, der kleine Zeiger rechts zählt die Hundert und der kleine Zeiger links zählt die Tausend; Fig. 1. zeigt z. B.:

44 + 600 + 19 000 oder 19 644.

Man wird natürlich kein solches Instrument in Gebrauch nehmen, ohne sich vorher von der richtigen Wirkung überzeugt zu haben.

Für unser Instrument fanden wir Überzählungen von etwa 1—2 %.

Auch wenn man Schritte in Gedanken zählt, ist das Anhängen und zeitweise Ablesen eines solchen Schrittzählers immerhin nützlich zur Sicherung gegen grobe Zählfehler (± 100 Schritte).

Bei *vielen kurzen* Strecken lohnt sich jedoch das Ablesen des Schrittzählers und Subtrahieren nicht; in solchem Falle zählt man einfacher in Gedanken.

Nach diesen Vorbemerkungen ist es klar, dass man durch Schreiten und Kompass-Peilen kleine Aufnahmen machen kann.

Als Beispiel hiefür nehmen wir die Oase Farafrah, welche vom Verfasser am 1. Jan. und 12. März 1874 im wesentlichen so aufgenommen wurde (s. Fig. 2. S. 644).

Sowohl das Dorf (Gassr) als auch der Palmenwald wurden je in einem Polygon umschritten, dabei die Schrittzahlen und Kompass-Peilungen der Polygonseiten aufgeschrieben, und die Einzelheiten durch Handrisszeichnung nach Augenmass aufgenommen. Diese Einzelheiten können auch nach dem ersten Umschreiten nochmals vervollständigt werden, und in der Zeichnung durch weitere örtliche Peilungen und Schrittmasse versichert werden.

Die Kompass-Peilungen sind in diesem Falle nur mit dem Taschen-Kompass Fig. 3. § 165. S. 615, also nur auf 5°—10° genau gemacht. Jetzt würde ich (nach inzwischen gemachten Erfahrungen) für solchen Zweck unbedingt den Stock-Kompass Fig. 2. § 165. S. 615 anwenden, welcher Peilung auf 1° giebt, und auch insofern angenehm ist, als er, einmal in den Boden gestossen, beide Hände zum Zeichnen u. s. w. freilässt.

In Fig. 2. S. 644 sind die Schrittmasse auf jeder Geraden durchlaufend, wie bei Kataster-Handrissen, eingeschrieben. Die Kompass-Peilungen sind durch Pfeilspitzen mit beigeschriebenem Azimut angedeutet. Einzelne örtliche Schrittmasse sind durch

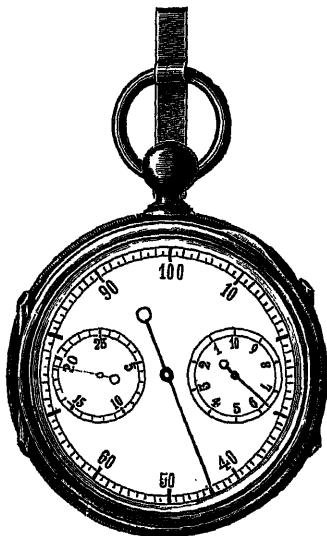
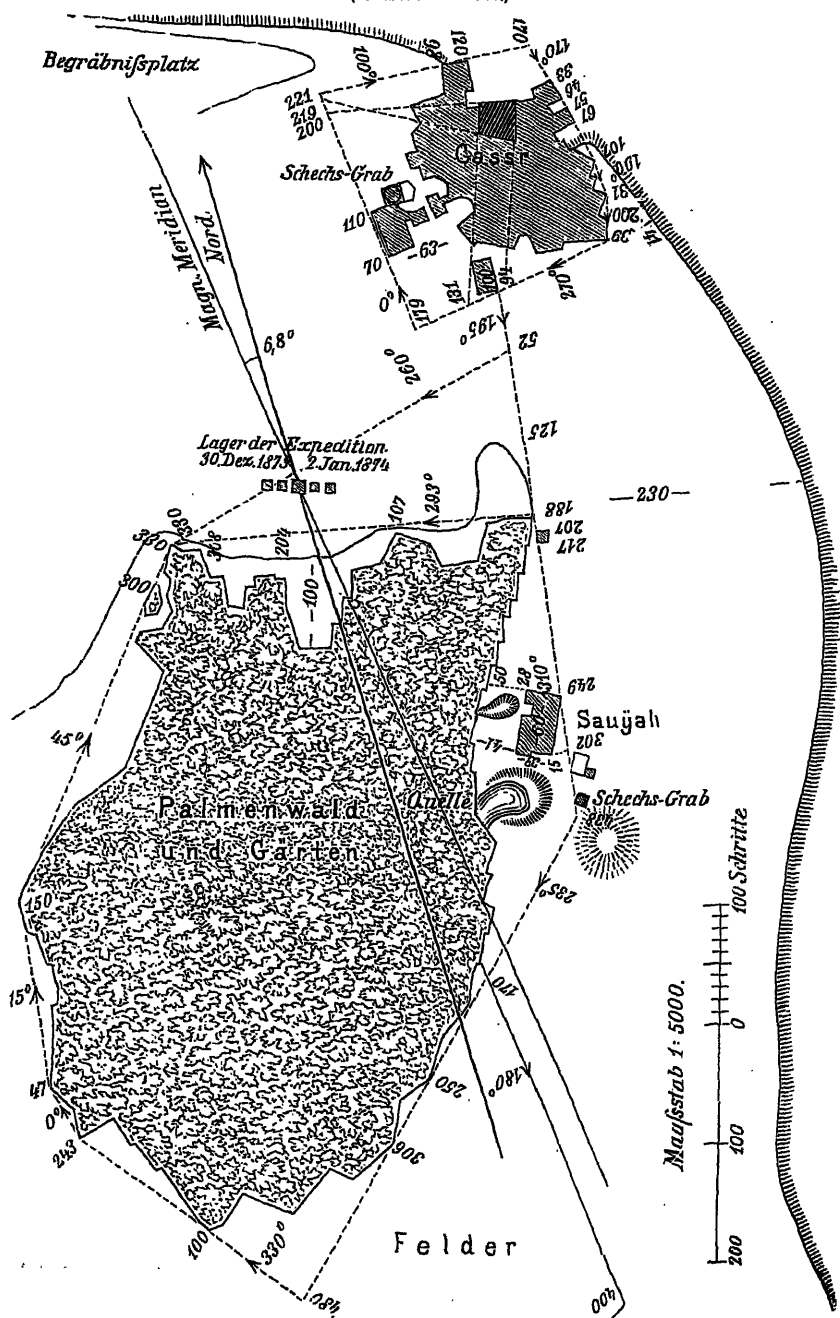
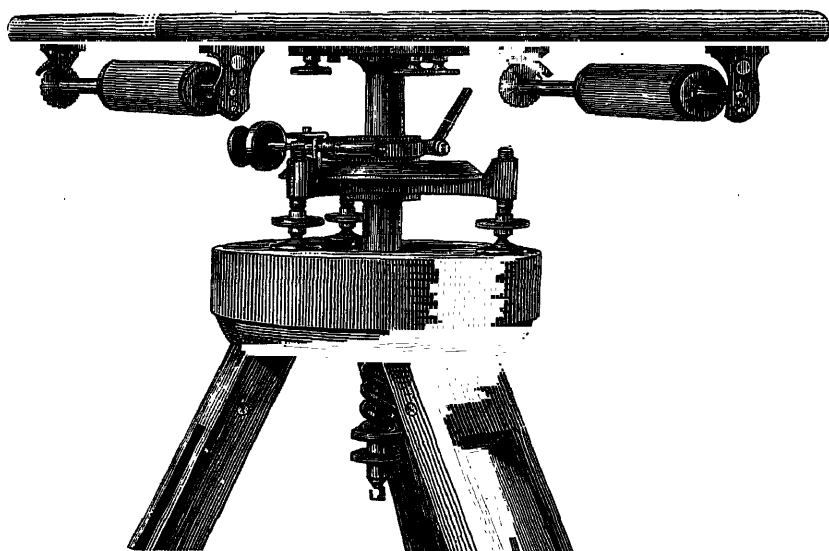



Fig. 2.
Aufnahme der Oase Farafrah. Durch Abschreiten und Kompass-Peilen.
(Massstab 1 : 5000.)

Horizontalstellung des Tischblattes dient eine Libelle, gewöhnlich eine Dosen-Libelle von geringer Empfindlichkeit (1′—2′).

In Fig. 1. und Fig. 2. haben wir einen Messtisch und eine Kippregel dargestellt.

Die Messtischzeichnung Fig. 1. ist einer Mitteilung von *Fennel* in der „Zeitschr. f. Verm. 1878", S. 59 entnommen, und gehört zu dem *Fennel-Wagner*schen Tachygraphometer, den wir schon früher in § 163. S. 600 beschrieben haben. Das in Fig. 1. gezeichnete Instrument kann aber sehr wohl auch im allgemeinen als Repräsentant eines guten Messtisches dienen; es zeigt das hölzerne Stativ, dann das theodolitartig gebaute messingene Zwischen-Gestell und die hölzerne Tischplatte, welche horizontal gestellt, und grob und fein gedreht werden kann.

Eine Besonderheit ist noch vorhanden in den beiden unter dem Tisch angebrachten Rollen, welche zur Aufnahme von Zeichenpapier dienen.

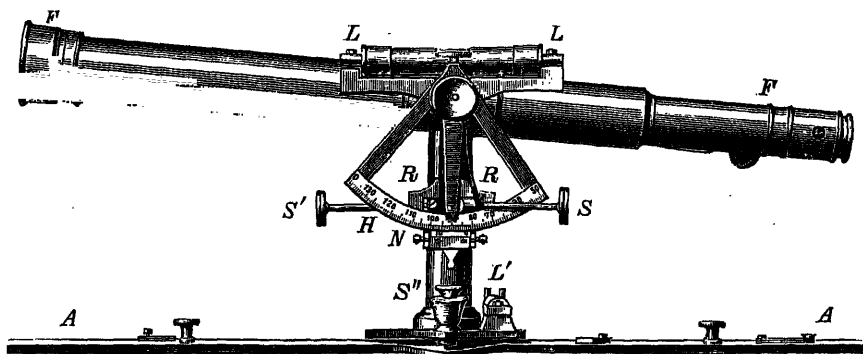
Fig. 1.
Messtisch von *Fennel.*
(Massstab etwa 1 : 7, d. h. $^5/_7$ der Kippregel Fig. 1.)

Nach diesem betrachten wir die in Fig. 2. dargestellte *Kippregel.*

Dieselbe wurde mit Benützung der Bestandteile eines *Ertel*schen Instruments nach Angabe des Verfassers von Mechaniker *Sickler* in Karlsruhe konstruiert. Auf dem Lineal AA erhebt sich eine metallene Säule, welche die horizontale Axe des Fernrohrs FF trägt. Mit dieser Fernrohraxe fest verbunden ist ein Höhengradbogen, welcher somit der auf- und niedergehenden Bewegung des Fernrohrs folgt, und dessen Teilung an dem Nonius N abgelesen werden kann. Zum feinen Einstellen des Fernrohrs im Sinne der Höhe dient die Schraube S.

Für den Zweck der Höhenwinkelmessung hat das Instrument eine Libelle L; dieselbe ist fest verbunden mit dem Nonius N, und zwar vermittelst des Rahmens R und mittelst der Schraube S' ein wenig drehbar. Wenn nun das Fernrohr auf einen

Zielpunkt eingestellt ist, so wird vor dem Ablesen des Höhenwinkels durch die Schraube S' die Libelle L zum Einspielen gebracht. Man wird nun durch *eine* Ablesung den richtigen Höhenwinkel erhalten, vorausgesetzt, dass kein Indexfehler vorhanden ist; jedenfalls aber bekommt man auf diese Weise die Höhenwinkel *unabhängig von der Horizontalstellung des Tisches*, auf welche man sich für Höhenmessungen niemals verlassen darf.

Der Höhenkreisbogen ist nach Zenitdistanzen beziffert. Da man hiebei nicht auf die äusserste Genauigkeit ausgeht, so ist die Teilung so stark gemacht, dass man sie *ohne Lupe* bei jeder Stellung der Kippregel auf dem Tisch bequem ablesen kann. Man erhält auf diese Weise die Winkel noch auf eine Minute genau. Wenn diese Genauigkeit nicht ausreicht, so ist es besser, statt der Kippregel den Theodolit zu nehmen, als die erstere weiter zu vervollkommnen.

Fig. 2.
Kippregel mit Höhenbogen und Libelle.
(Massstab etwa 1 : 5, Fernrohrlänge = 50cm.)

(Karlsr. Sammlung.)

Eine zweite Libelle L' ist unten quer zur Fernrohrrichtung angebracht; sie dient dazu, dass auch die Horizontal-Axe des Fernrohrs unabhängig von der jeweiligen Tisch-Neigung stets horizontal erhalten werden kann; was mit der Schraube S'' erreicht wird.

Das Fernrohr hat dieselbe Konstruktion wie das Fernrohr des Tachymeter-Theodolits Fig. 1. § 163. S. 591. An Richte-Vorrichtungen hat die Kippregel Schrauben an der unteren Querlibelle L', wodurch diese Libelle parallel der horizontalen Fernrohraxe gestellt werden kann; auch die Schraube S'' kann als eine Art von Korrektionsschraube betrachtet werden, denn es soll damit die Axe der Libelle L' parallel der Linealebene und Tischebene gestellt werden, doch wird, wie schon erwähnt, diese Schraube S'' auch selbständig gehandhabt, um unabhängig von der Tischebene die Libellenaxe L und die ihr parallele Drehaxe des Fernrohrs genau horizontal zu machen.

Streng genommen ist ferner nötig eine Korrektionsvorrichtung am Okular des Fernrohrs zur Richtigstellung des Fadenkreuzes, da aber dieser Umstand bei einer Messtischaufnahme von wenig Belang ist, so wurde im vorliegenden Falle auf Fadenkreuz-Richteschrauben verzichtet.

§ 173. Prüfung und Berichtigung der Kippregel.

Die Prüfung und Berichtigung der Kippregel für Horizontal-Messungen erstreckt sich auf folgende zwei Fragen:

1) Ob die Zielaxe rechtwinklig zur horizontalen Axe ist;
2) ob die horizontale Axe parallel der Tischebene (Linealebene) ist, oder ob die horizontale Axe genau horizontal ist, vorausgesetzt, dass die Tischebene genau horizontal ist.

Die Untersuchung geschieht ebenso wie beim Theodolit (§ 51. S. 154).

Wenn das Fernrohr nicht durchgeschlagen werden kann, so kann der Zielaxen-Fehler nicht untersucht werden, zuweilen lässt sich jedoch, wenigstens mittelst Lösung der Axenverbindung ausnahmsweise durchschlagen. Wie schon am Schluss des vorigen § 172. bemerkt ist, kann man auf sehr genaue Richtigstellung der Zielaxe bei der Kippregel verzichten.

(Das Rückverlängern einer Geraden darf aber dann nie durch Durchschlagen, sondern muss durch Drehen des ganzen Instruments um 180° erzielt werden, weil gerade beim Durchschlagen der doppelte Zielaxen-Fehler sich zeigt.)

Zur Untersuchung der Frage 2) ob die horizontale Axe parallel der Tischebene ist, verfährt man wie bei dem Theodolit, S. 156—157 a) b) oder c), nachdem man zuvor den Tisch selbst mit der Dosenlibelle horizontal gestellt hat. Die Libelle L' von Fig. 2. S. 647 ist dabei nicht erforderlich, sondern die Schraube S''; und wenn man die Berichtigung ausgeführt hat, so stellt man nachträglich die Libelle L' (welche selbst streng genommen entbehrt werden kann) mit ihren eigenen Korrektionsschrauben horizontal.

Es wird zuweilen behauptet, es müsse die Zielaxe des Fernrohrs sich in die Linealkante, oder wenigstens in eine hiemit parallele Gerade projizieren, dieses ist aber *überflüssig*, denn ein kleiner Winkel zwischen der Fernrohr-Projektion und der Linealkante hat nur zur Folge, dass die Zeichnung bei orientiertem Tisch um diesen kleinen Winkel gegen die Natur verdreht ist; das ist aber für die später von dem Tisch abgenommene Zeichnung gleichgültig.

Es genügt, das Fernrohr so genau dem Lineal parallel zu stellen, als man es von freiem Auge beurteilen kann.

Was die Berichtigung der Kippregel in Bezug auf die *Höhenwinkelmessung* betrifft, so gilt hier alles ebenso, wie bei dem Tachymeter Fig. 1. S. 591, dessen Höhenkreisbogen-Untersuchung auf S. 595 gelehrt worden ist.

Wenn man aber an einer Kippregel die besondere bewegliche Libelle L mit der zugehörigen Schraube S', so wie in Fig. 2. S. 647, nicht hat, so ist der jeweiligen Konstruktion entsprechend zu verfahren. Jedenfalls darf man sich auf die Horizontalstellung des Tisches unter keinen Umständen für die Höhenwinkelmessung verlassen, sondern man muss eine besondere Libelle in irgend welcher Anordnung hiefür haben. Wir betrachten den Fall, dass eine Libelle mit dem Fernrohr fest verbunden ist (wie bei dem Nivelliertheodolit S. 351). In diesem Falle wird die Libellenaxe der Zielaxe des Fernrohrs parallel gestellt durch die Nivellierprobe Fig. 4. S. 349 oder Fig. 5. S. 350; dann wird jeder Höhenwinkel erhalten durch *zwei* Ablesungen am Kreisbogen, von denen die eine nach erfolgtem Einstellen des Fernrohrs auf den Zielpunkt, und die andere bei einspielender Libelle gemacht wird. Die Differenz beider Ablesungen giebt den Höhenwinkel.

§ 174. Anwendung des Messtisches.

Der Messtisch heisst *orientiert*, wenn er so aufgestellt ist, dass ein Punkt der Zeichenebene, welcher das Abbild eines Feldpunktes sein soll, vertikal über letzterem liegt, und dass eine (durch jenen Punkt gehende) Gerade der Zeichenebene parallel einer entsprechenden Geraden des Feldes ist (abgesehen von einem kleinen Winkel zwischen der Linealkante und der Horizontalprojektion der Fernrohr-Axe), die Orientierung des Tisches wird auf Grund einer ersten Schätzung durch Versuche erreicht; es ist hiebei sehr bequem, wenn das Tischblatt auf dem Stativkopf ein wenig verschoben werden kann, damit die letzte feine Centrierung genau und rasch geschehen kann.

Nachdem der Tisch orientiert ist, betrachten wir das *Einschneiden*. Man versteht darunter die Aufgabe, die Kippregel so zu stellen, dass die Linealkante durch das Abbild des Standpunktes oder Zielpunktes geht, und dass der einzuschneidende Punkt (Zielpunkt oder Standpunkt) am Fadenkreuz des Fernrohrs erscheint, ferner Ziehen einer Linie längs der so gestellten Linealkante. Das Einschneiden wird erreicht durch abwechselndes *Drehen* (beim Schauen ins Fernrohr) und *Parallelverschieben* des Lineals (beim Schauen auf den Tisch).

Verschiedene Aufnahmsverfahren.

1) *Aufnahme durch Strahlen.* Es werden von einem Standpunkt aus Punkte eingeschnitten, und deren gemessene Entfernungen auf den Schnittlinien eingetragen. Dieses Verfahren wird namentlich dann angewendet, wenn das Kippregel-Fernrohr zum Distanzmessen eingerichtet ist, und man nennt es dann zuweilen Messtisch-Tachymetrie.

2) Die *Aufnahme eines Polygonzuges* wird ebenso wie mit dem Theodolit ausgeführt, sie ist aber wegen der verhältnismässig bedeutenden Arbeit der Orientierung des Tisches sehr unbequem und zeitraubend.

3) *Vorwärts-Einschneiden* (Fig. 1.) auf Grund der unmittelbar gemessenen oder auf anderem Wege erhaltenen Basis AB.

Fig. 1. *Vorwärts-Einschneiden.*

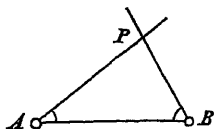



Fig. 2. *Seitwärts-Einschneiden.*

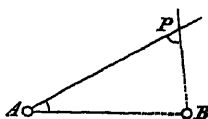
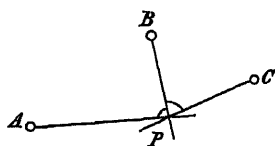



Fig. 3. *Rückwärts-Einschneiden.*

4) *Seitwärts-Einschneiden* (Fig. 2.) mit vorläufiger Orientierung in P.

Seitwärts-Einschneiden ist im allgemeinen günstiger als Vorwärts-Einschneiden, es ist nämlich innerhalb des um A mit dem Halbmesser AB gezogenen Kreises Vorwärts-Einschneiden günstiger, ausserhalb des Kreises ist Seitwärts-Einschneiden günstiger (vgl. Band I. S. 309).

5) *Rückwärts-Einschneiden* oder *Pothenotische Bestimmung**) (Fig. 3.). Die

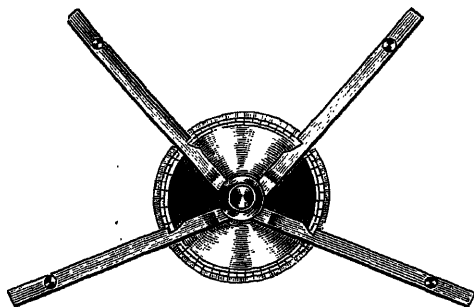
*) Hiebei ist eine Abhandlung zu erwähnen, welche zugleich als Nachtrag zu der pothenotischen Litteratur S. 251—252 zu betrachten ist, nämlich: „Konstruktion zu einer Küstenaufnahme u. s w. nebst Beiträgen zur Geschichte der geometrischen Auf-

drei Punkte *A B C* sind auf dem Tisch gezeichnet, es soll ein vierter Punkt *P*, über welchem der Tisch aufgestellt wird, ebenfalls auf den Tisch gebracht werden.

Es giebt verschiedene Arten der Auflösung dieser Aufgabe, von denen wir die wichtigsten hier vorführen.

a) Es wird auf dem Tisch ein Stück *Pauspapier* ausgebreitet und befestigt dann werden von einem Punkt des Tisches, welcher in der Vertikalen des zu bestimmenden Feldpunktes liegt, nach vorläufiger Centrierung die drei gegebenen Punkte eingeschnitten. Nachdem das Pauspapier gelöst ist, verschiebt man es so auf dem Tisch, dass die drei auf ihm gezogenen Strahlen durch die Abbilder der gegebenen Punkte gehen, worauf der gesuchte Punkt auf den Tisch durchgestochen wird. In dieser Weise können auch mehr als drei gegebene Punkte benützt werden.

b) *Anwendung des Stand-Peilers* (Fig. 4.). Um einen Punkt auf die Karte zu bringen, welcher durch Winkelmessung gegen drei gegebene Punkte (pothenotisch) festgelegt ist, bedienen sich die Seeleute, welche in solchem Falle die Winkel mit dem Sextanten messen, eines einfachen Werkzeuges, welches drei Arme unter beliebigen Winkeln gegenseitig zu stellen gestattet. Zu Land bei Messtisch-Aufnahmen kann man ein solches Werkzeug auch anwenden. Man kann auch mehr als drei Strahlen gleichzeitig verwerten, indem man dieselben, wenn sie nicht alle passen wollen, wenigstens *möglichst* anliegend macht und dann den Scheitelpunkt durchsticht.

Fig. 4.
Stand-Peiler.

(Hannov. Sammlung.)

Entsprechend haben wir auch das in Fig. 4. veranschaulichte Werkzeug *vier*armig gemacht.

Hat man die Winkel in Gradmass gegeben, so stellt man die Arme auf dem Rand des Kreises ein. Sind die Strahlen graphisch auf dem Tisch gezogen, so ist das Einstellen der Arme ein wenig gehindert, weil der Mittelpunkt zwar zum Durchstechen eingerichtet, sonst aber nicht zugänglich ist. Man kann aber dann auf den Tisch einen *Kreis* mit dem Halbmesser der Instrumentenscheibe ziehen und damit die Scheibe nebst den Strahlen einpassen.

Unser Instrument hat eine Teil-Scheibe von 15^{cm} Durchmesser und Armlängen von 34^{cm}. Zum Gebrauch auf dem Messtisch und zu ähnlichen Zwecken dürften übrigens meistens *kleinere* Dimensionen am Platze sein.

c) *Lösung durch fehlerzeigende Dreiecke.* Nachdem der Tisch vorläufig durch Schätzung, oder mit Hilfe eines Kompasses orientiert worden ist, schneidet man die drei gegebenen Punkte so ein, dass die Linealkante durch die Bilder der Punkte geht. War die Orientierung nicht streng richtig, so erhält man ein fehlerzeigendes Dreieck *a b c* (Fig. 5. S. 651). Nachdem der Tisch ein wenig gedreht worden ist, wird man

---

lösungen der sogenannten pothenotischen Aufgabe" von Professor Dr. *G. D. E. Weyr* in Kiel, „Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie", Heft IX (September) 1882.

ein zweites fehlerzeigendes Dreieck $a' b' c'$ (Fig. 5.) erhalten, und die drei Verbindungslinien der einander entsprechenden Punkte $a a'$, $b b'$, $c c'$ beider fehlerzeigender Dreiecke werden sich in einem Punkte p schneiden, welcher als gesuchter Punkt genommen wird.

Fig. 5.

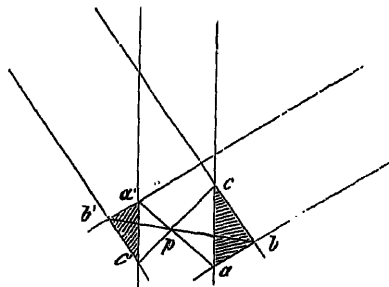



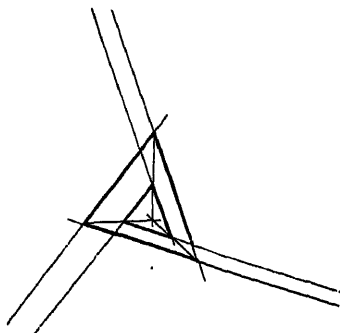
Fig. 6.

Wenn die fehlerzeigenden Dreiecke nicht *in*einander liegen, wie bei Fig. 6., so ist anzustreben, dass sie den gesuchten Punkt p *zwischen* sich fassen, wie in Fig. 5. Dagegen ist Fig. 7. womöglich zu vermeiden, nötigenfalls durch Anstellen eines weiteren Versuchs.

Fig. 7.

Zur Verhütung von Täuschungen dient der *Lehmann*sche Satz: Der gesuchte Punkt p liegt innerhalb oder ausserhalb des fehlerzeigenden Dreiecks, je nachdem der zu bestimmende Punkt P innerhalb oder ausserhalb des Dreiecks $A\,B\,C$ der gegebenen Punkte liegt.

Bei Aufsuchung der entsprechenden Punkte der fehlerzeigenden Dreiecke hat man zu beachten, dass je zwei entsprechende Punkte der fehlerzeigenden Dreiecke und zwei gegebene Punkte auf einem Kreise liegen.

Besonderer Fall des fehlerzeigenden Dreiecks (Fig. 8. und Fig. 9.). Wenn der zu bestimmende Punkt mit zweien der gegebenen Punkte in einer Geraden liegt (Fig. 8.),

Fig. 8.

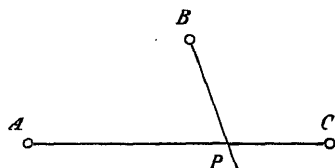
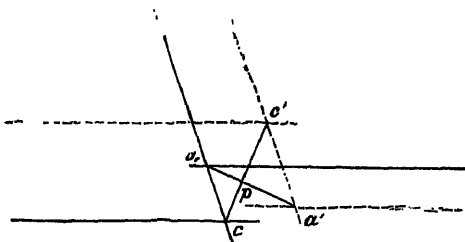



Fig. 9.

so erhält man kein eigentliches fehlerzeigendes Dreieck, sondern zwei (nahezu) parallele Gerade, welche von einer dritten Geraden geschnitten werden. Das Resultat zweier Versuche und die Art der Verbindung der erhaltenen Schnittpunkte zeigt Fig. 9.

Statt dreier Schnittlinien erhält man hier in Fig. 9. nur deren zwei, aa' und cc', weil die Schnittpunkte b und b' (welche in A und C liegen) nicht verwendbar sind.

Auch wenn P *nahezu* auf der Geraden AC liegt, hat man es in der Praxis mit dem beschriebenen Falle zu thun.

6) *Die Aufgabe der zwei unzugänglichen Punkte* (vgl. die früheren Figuren 1. und 2. S. 255). Wenn zwei Punkte p_3 und p_4 als Bilder von P_3 und P_4 auf dem Tisch gezeichnet sind, und die Bilder zweier anderer Punkte P_1 und P_2 durch Aufstellen des Tisches über diesen bestimmt werden sollen, so nimmt man zwei Punkte p_1' und p_2' auf dem Tisch beliebig an, und betrachtet sie als Bilder von P_1 und P_2. Ein auf der Basis $p_1' p_2'$ durch Vorwärts-Einschneiden bestimmtes Viereck $p_1' p_2' p_3' p_4'$ wird dem zu bestimmenden *ähnlich* sein, man kann also letzteres durch Übertragen der Winkel des ersteren an die Seite $p_3 p_4$ bestimmen. Die Winkelübertragung geschieht mit Pauspapier, dem gewöhnlichen Zirkel, oder sonstigen graphischen Hilfsmitteln.

7) *Rückwärts-Einschneiden mit Messung einer Entfernung* (Fig. 10.). Die zwei Punkte A und B sind auf dem Tisch gezeichnet, der Punkt P soll bestimmt werden durch Messen der Entfernung BP und Rückwärts-Einschneiden über A und B.

Fig. 10.

Bei kleiner Entfernung PB, welche unmittelbares Messen mit Messlatten gestattet, kommt diese Aufgabe oft vor. Man löst sie mittelbar durch vorläufige Orientierung, Beschreiben eines Kreisbogens um B und Rückwärts-Einschneiden. Fällt der Schnitt der Strahlen AP und BP nicht auf den Kreisbogen, so wird die Orientierung entsprechend verbessert. Fällt ein zweiter Schnitt wieder nicht auf den Kreisbogen, so zieht man die Verbindungslinie beider Schnittpunkte und nimmt den richtigen Punkt da an, wo sie den Kreisbogen trifft. Den Kreisbogen selbst zu ziehen ist nicht durchaus nötig.

§ 175. Allgemeine Betrachtung der Messtisch-Aufnahmen.

Die Genauigkeit der Messtisch-Zeichnung an und für sich ist dieselbe wie die jeder anderen feinen Zeichnung, und wenn man die Zeichnung des Lageplanes als Endziel einer Aufnahme betrachtet, so kann man zu der Anschauung kommen, dass eine gute Messtisch-Aufnahme alles biete was überhaupt wünschenswert sei.

Nimmt man an, dass ein Punkt durch einen Nadelstich auf $0{,}1^{mm}$ sicher bestimmt ist, so ist durch zwei solche, 30^{cm} von einander entfernte Punkte, eine Richtung auf $\frac{0{,}1}{300}\, 206265 \sqrt{2} = 97''$ genau bestimmt.

Die Genauigkeit der Messtisch-Aufnahme wird aber beeinträchtigt durch die Schwierigkeit der Horizontalstellung des Tisches und der damit zusammenhängenden Richtigstellung der horizontalen Axe der Kippregel. Diese Fehler kommen hauptsächlich bei stark geneigten Zielungen in Betracht, während sie bei nahezu horizontalen Ziellinien fast ohne Einfluss sind.

Wir schliessen hieraus, dass in der Ebene ein Winkel mit dem Messtisch so genau gemessen werden kann, als er überhaupt gezeichnet werden kann, dass aber bei steilen Ziellinien sehr bedeutende Fehler erzeugt werden, dass also im steilen Gebirge eine gewöhnliche Messtisch-Aufnahme in Bezug auf die Winkelmessung nicht viel besser ist als eine Kreuzscheiben-Aufnahme in der Ebene.

Wir wollen nun eine Vergleichung anstellen zwischen der Tachymetrie, welche wir in § 169. S. 632—635 beschrieben haben, und dem entsprechenden Aufnahme-Verfahren mit dem Messtisch, welches man wohl auch Messtisch-Tachymetrie nennt.

Alle früher in § 169. beschriebenen tachymetrischen Arbeiten, welche sich auf die Aufnahme der Einzelpunkte beziehen, lassen sich ebenso wie mit dem Theodolit, auch mit der Kippregel ausführen. Die Kippregel muss dann ein distanzmessendes Fernrohr und einen Höhenkreisbogen haben. Statt die Strahlen-Azimute am Limbus des Theodolits, oder an dem Kompass abzulesen, zieht man auf dem Messtisch die Strahlen selbst an der Linealkante aus, und sticht die Distanzen ein. Was die Bestimmung der Standpunkte betrifft, so wird man mit dem Messtisch im allgemeinen anders verfahren als mit dem Theodolit, denn man hat bei der Messtisch-Aufnahme die verschiedenen Einschneide-Methoden zur Verfügung, welche bei der Theodolit-Tachymetrie weniger Anwendung finden. Umgekehrt lässt sich Polygonzug-Messung zwar auch mit dem Messtisch machen, sie ist aber hier sehr schwerfällig.

Ein wesentlicher Unterschied besteht darin, dass eine vollständige Handriss-Zeichnung, wie sie bei der Theodolit-Tachymetrie nötig ist, beim Messtisch wegfällt, weil die endgültige Zeichnung auf dem Tisch selbst entsteht; nur bei verwickelten Formen, welche teilweise durch Einzelmasse aufgenommen werden, ist, auch neben dem Messtisch, ein Handriss nötig. Auch Horizontalkurven, von freier Hand gezeichnet, welche bei der späteren Konstruktion als Leitkurven dienen, finden auf dem Tischblatt selbst ihre Stelle. Ja man kann sogar, wenn man will, auf dem Messtisch die endgültigen Horizontalkurven sofort im Felde konstruieren.

Da die aufgenommenen Punkte auf dem Messtisch sofort in richtiger Lage eingezeichnet werden, so hat man in Bezug auf die Punktverteilung den grossen Vorteil vor der Theodolit-Tachymetrie, dass man nicht so leicht entweder zu viel oder zu wenig Punkte nimmt, und dass man über den Stand der Arbeit immer vollständig im Klaren ist.

Vom theoretischen Standpunkt betrachtet ist deswegen die Messtisch-Tachymetrie gegen die Theodolit-Tachymetrie im Vorzug, letztere hat aber andererseits den grossen praktischen Vorzug, dass sie *rascher* von statten geht. Der Messtisch ist im Vergleich mit dem Theodolit ein ungemein schwerfälliges Instrument, sowohl was den Transport und die Aufstellung, als auch was die Arbeit auf der Station selbst betrifft.

Die meisten Messtisch-Vorzüge werden durch ein Opfer an Zeit erkauft, es ist aber die Feldarbeitszeit erheblich teurer als die Zimmerarbeitszeit, und deswegen ist es nicht zweckmässig, Arbeiten im Felde zu machen, wie das Einstechen der Distanzen und Scharfzeichnen der Formen, welche man ebenso gut oder besser im Zimmer machen kann.

Die Messtischarbeit ist in hohem Grade von der Witterung abhängig, bei Sonnenschein braucht man einen Sonnenschirm, bei feuchtem Wetter schon leidet das Papier der Tischplatte not; dagegen kann man mit dem Tachymeter-Theodolit im Sonnenschein und bei feuchtem Wetter ohne Schirm, bei schwachem Regen noch unter dem Schirm arbeiten.

Die Theodolit-Tachymetrie liefert die Hauptresultate in *Zahlen*, wornach jederzeit eine Neukonstruktion der Aufnahme gemacht werden kann, während die Messtisch-Resultate nur auf dem vergänglichen Zeichnungspapier haften.

Der Messtisch ist namentlich bei älteren Praktikern und Empirikern geschätzt, welchen die trigonometrischen Berechnungen Schwierigkeiten verursachen.

Alle diese Verhältnisse gegeneinander abzuwägen, kann nur Sache der fortschreitenden Erfahrung sein.

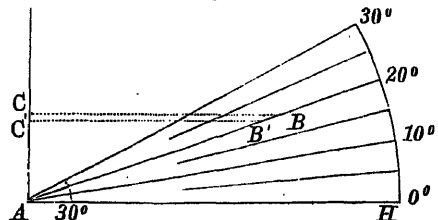
Der Messtisch hat bei den Kataster-Aufnahmen dem Theodolit das Feld räumen müssen. Wenn man das langsame, aber stetige Verdrängen des Messtisches in der Vergangenheit betrachtet, kann man auch für die Zukunft auf noch erheblich weitere Beschränkung der Messtischaufnahmen, auch für Topographie, schliessen.

§ 176. Litteratur über Tachymetrie, Messtisch und Verwandtes.

1813. Erfindung und Einführung des Faden-Distanzmessers in Bayern, nach Mitteilung von *Steppes*, Zeitschr. des Hannov. Ing.- u. Arch.-Vereins 1884, S. 456. Am 22. Mai 1813 liefert Uhrmacher und Mechaniker *Benedict Liebherr* in Landshut 6 Distanzmesser. Am 26. Mai 1813 werden ebenfalls 6 Distanzmesser geliefert von *Joseph Liebherr*, Mechaniker in München, welcher mit *Reichenbach* und *Utzschneider* 1804 die „mathematische Werkstätte" gegründet hatte. Ein Schreiben *Joseph Liebherr*s vom 11. Nov. 1813 behandelt den Distanzmesser als eine *neue* Sache und spricht von einer zweijährigen Erprobung der Vorteile des Instruments.

1822. „Mémorial du dépôt général de la guerre, imprimé par ordre du ministre; tome IV, année 1826. Paris 1828", pag. 70—77 und planche 2. Rapport sur la stadia: L'idée de mesurer les distances au moyen d'un micromètre n'est pas nouvelle. Ce moyen aurait sans doute depuis longtemps, remplacé la chaine, si jusqu'à ce jour un mode simple et économique d'application du principe n'eut manqué. Un ingénieur italien (?) en a trouvé un, il y a quelques années. Son procédé consiste à viser sous un angle constant, une mire graduée.

Auf Seite 457 daselbst wird die Reduktion $l \cos^2 \alpha$ für die lotrecht stehende Latte erläutert, auch wird ein Täfelchen der Werte $100 \cos^2 \alpha$ mitgeteilt. Ausserdem wird das nebenstehende Diagramm Fig. 1. zur Reduktion beigegeben. Es ist hierbei: $BC = AB \cos \alpha$, $BC = AB'$, $B'C' = AB' \cos \alpha$, also: $B'C' = AB \cos^2 \alpha$, das heisst es soll die Reduktion $\cos^2 \alpha = \cos \alpha \times \cos \alpha$ durch *zwei*malige graphische Reduktion mit $\cos \alpha$ gewonnen werden.

Fig. 1.

1832. Der Distanzmesser nach seiner Theorie und Einrichtung, sowie die Anwendung desselben in der Topographie. Karlsruhe, Druck und Verlag von *Chr. Th. Gross*.

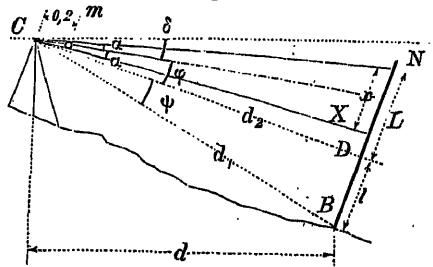
1850. *Decher*. Über den *Reichenbach*schen Distanzmesser. *Dinglers* polyt. Journ 1850, Band 116, S. 29—51.

Die Latte hat ungleichförmige Teilung nach der Gleichung (vgl. Fig. 2.):

$$\frac{x}{2} = (d_2 - 0{,}2) \frac{\tang \alpha}{\cos^2 \varphi}$$

Die horizontale Entfernung ist:

$$d = \frac{d_2}{\cos \psi} \cos(\delta - (\varphi + \psi)).$$

Fig. 2.

1853. *Steinheil*. *Dingler*s polytechnisches Journal 1853, Band 129, S. 408—413 ($l \cos \alpha$).

1856. *Bauernfeind*, Elemente der Vermessungskunde, erste Auflage, München 1856, Bd. I. S. 333—355, Theorie des *Reichenbach*schen Distanzmessers, und in Band II, Anhang, S. 13—23, Tafeln zur Reduktion der Entfernungen auf den Horizont, bei aufwärts und abwärts geneigtem Fernrohre.

Die Latten-Teilung ist gleichförmig, die Reduktion entspricht Fig. 3. und folgenden Gleichungen:

$$e = d + kh \quad , \quad e_0 = e \cos^2 \varepsilon$$

$$\sin 2\varepsilon = \frac{2l - h}{c}$$

$$e' = e \cos^2 \varepsilon \cos(\omega \mp \varepsilon).$$

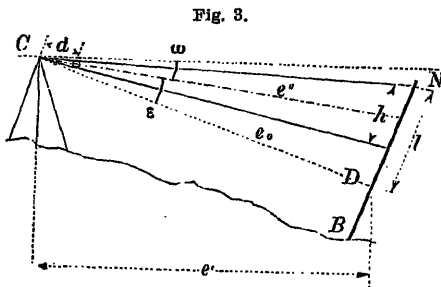



Fig. 3.

1865. *Moinot.* Lever de plans à la stadia. Notes practiques pour études de tracés par *Moinot*, ingenieur civil chargé des études du réseau central de la compagnie d'Orleans. Perigueux, 1865.

1866. *Sanguet.* Société d'encouragement pour l'industrie nationale. Rapport sur un instrument de géométrie pratique destiné à mesurer les distances, présenté sous le nom de longimètre par *M. Sanguet.* 1866.

1868. Tafeln zur Berechnung relativer Höhen, herausgegeben von der Direktion der Domänen und Forsten des Kantons Bern 1868.

1871. *Bauernfeind.* Ein Apparat zur mechanischen Lösung der nach *Pothenot, Hansen* u. A. benannten geodätischen Aufgaben. München 1871.

1871. *Heuser.* Die Aufnahme des Terrains mit dem Distanzmesser, bei Eisenbahn-Vorarbeiten, insbe. sondere die Methode von *Moinot*; Zeitschr. d. Hannov. Ing.- u. Arch.-Ver. 1871, S. 445—464.

1873. *Jähns.* Der Vielmesser, ein neues Feldmess-Instrument, konstruiert und beschrieben von Ing. *R. Jähns.* Preuss. Patent vom April 1873, s. Deutsche Bauzeitung vom 6. März 1875.

1873. *Tinter. G. Starke*s Tachymeter, mit einer Tafel. Zeitschr. des österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1873. Separat-Abdruck. Wien 1873.

1873. *Werner.* Die Tachymetrie und deren Anwendung bei Trace-Studien, von *C. Werner*, Kommissär der k. k. General-Inspektion der österr. Eisenbahnen. Wien 1873.

1873. *Stück.* Distanz- und Höhen-Messung; Formeln und Tabellen behufs Aufnahme und Höhen-Berechnung. Hamburg 1873.

1874. *Kreuter.* Patentiertes Quotier-Instrument für generelle Aufnahmen in koupiertem Terrain, von Ing. *Franz Kreuter.* Wien 1874. Ferner: Das neue Tacheometer aus dem *Reichenbach*schen mathematisch-mechanischen Institute *Ertel & Sohn* in München, ein Universal-Instrument für alle Feldarbeiten des Ingenieurs, von *Franz Kreuter.* Brünn 1876; und zweite umgearbeitete und verbesserte Auflage, Brünn 1888.

1875. *Helmert.* Der Einfluss der schiefen Stellung der Latte bei Distanz-Messungen u. s. w. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1875, S. 154—157.

1875. *Erede.* La celerimensura cogli strumenti comuni, tavole di $k \,sen\, \alpha$, $k \cos \alpha$, $tang\, \alpha$, $cotg\, \alpha$, tavola di riduzione all' orizzonte ($k \cos^2 \alpha$) e tavola altimetriche ($k \,tang\, \alpha$). Pistoia 1875.

1875. *Schütze.* Tabellen zur Berechnung der Singerteufen (*sinus*) und Sohlen (*cosinus*) für Winkel von 5' zu 5' u. s. w. von *C. A. Schütze*, Berggeschworenen. Quedlinburg.

1876. *Marcks & Balke.* Das Terrain-Relief, seine Aufnahme mittelst distanzmessender Winkel-Instrumente u. s. w., unter Beifügung einer *Tabelle* kurz dargestellt durch *Marcks & Balke.* Selbstverlag der Verfasser. Berlin.

1876. *Tinter. C. Wagner*s Tachygraphometer. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1876. V.—VIII. Heft.

1876. *Wagner. Wagner*s Tachymeter (Tachygraphometer), mitgeteilt vom Mechaniker *O. Fennel* zu Kassel, in der Zeitschr. f. Verm. 1878, S. 57—77, und Die *Wagner-Fennel*schen Tachymeter des mathem.-mech. Inst. von *Otto Fennel* in Kassel. Kassel 1880.

1876. Koten-Tafeln für die entfernungmessende Kippregel. Berlin, 1876. Beilage zu der „Instruktion für die Topographen der topographischen Abteilung der königl. preussischen Landes-Aufnahme", Berlin 1876.

1877. *Sedlaczek*. Der Distanzmesser, erfunden und konstruiert von *Ernst Schneider*. Wien 1877.

1877. *Schlesinger*. Der geodätische Tachygraph und der Tachygraph-Planimeter u. s. w. Wien 1877.

1877. *Vogler*. Anleitung zum Entwerfen graphischer Tafeln. Berlin 1877. Tafel V. für $l\cos^2\alpha$, Tafel VI. für $\frac{1}{2}\,l\sin 2\alpha$.

1878. *Nagel*. Alhidadentransporteur, Civilingenieur, 1878, 24. Band, 4. u. 5. Heft. Separat-Abdruck S. 9—13 und Tafel XIII.

1878. *Pesek*. Graphische Tafeln zur Bestimmung der Produkte $\cos^2\alpha$ und $\frac{1}{2}\sin 2\alpha$. Mitteilungen des Arch.- u. Ing.-Vereins für Böhmen 1878, S. 71, und Zeitschr. f. Verm. 1878, S. 286.

1878. *Tichy & Starke*. Das neue Tachymeter nach Patent *Tichy & Starke*. Wochenschr. des österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1878, Nr. 44. und Nr. 46.

1878. *Fennel*. *Wagners* Tachymeter (Graphometer). Zeitschr. f. Verm. 1878. S. 57—77.

1878. *Sscepaniak*. Universal-Nivellier-Instrument als Tachymeter. Wien 1878.

1879. *Dörgens*. Entfernungsmesser. D. R.-P. Nr. 9924 vom 28. Febr. 1879 und D. R.-P. Nr. 9925 vom 18. April 1879.

1880. *Klinkerfues*. Entfernungsmesser. D. R.-R. Nr. 12477 vom 1. Juni 1880.

1880. *Klein*. Über die Genauigkeit des Faden-Distanzmessers. Wochenschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Vereins 1880 S. 117.

1880. *Paschwitz*. Beschreibung des Telemeters *Paschwitz*. Patent, Kissingen.

1880. *Rinaldo*. Tavola numerica della riduzione all' orizonte delle distanze lette sulla stadia, da 0° 15′ a 40° sessagesimali, compilata per cura dell' Ingegnere Agronomo *Bassi Rinaldo*; 1880.

1880. *Jordan*. Hilfstäfeln für Tachymetrie, von Dr. *W. Jordan*, Professor am Gr. Polytechnikum zu Karlsruhe. Stuttgart, 1880.

1881. *Schell*. Die Terrain-Aufnahme mit der tachymetrischen Kippregel von *Tichy & Starke*. Wien 1881.

1881. *Friedrich*. Das optische Distanzmessen und dessen Beziehung zur direkten Längenmessung. Von Forstrat *Joseph Friedrich*; Wien 1881.

1882. *Decher*. Rechenschieber für Vermessungs- und Bau-Ingenieure, zur Berechnung tachymetrischer Aufnahmen und barometrischer Höhenmessungen, nach den Angaben Dr. *Decher*s ausgeführt durch die Teilwerkstätte von *Th. Beck*, Mechaniker zu Strassburg. München 1882.

1882. *Weyer*. Konstruktion zu einer Küsten-Aufnahme im Vorbeifahren u. s. w. nebst Beiträgen zur Geschichte der geometrischen Auflösung der sogenannten pothenotischen Aufgabe. Annalen der Hydrographie u. s. w. Heft IX. Sept. 1882.

1883. *Teischinger*. Apparat zum graphischen Rechnen für die speciellen Zwecke der Tachymetrie. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Vereins 1883, Heft IV, und Zeitschr. für Instrumentenkunde 1884, S. 92—95.

1883. Königliche Eisenbahn-Direktion (linksrheinische) Köln. Anleitung zur Ausführung von Terrain-Aufnahmen für spezielle Eisenbahn-Vorarbeiten mit vorzugsweiser Benutzung des Tachymeters. Köln 1883.

1884. *Jordan*. Die Methoden der Tachymetrie; geschichtliche und vergleichende Übersicht. Zeitschr. d. Hannov. Ing.- u. Arch.-Vereins 1884, S. 453—480.

1884. *Salmoiraghi*. Aperçu sur les nouveaux tachéomètres dits les clebs. Milano 1884.

1885. *Teischinger*. Die Hilfsmittel der Tachymetrie, insbesondere deren Leistungsfähigkeit in der Praxis. Zeitschr. d. Hannov. Ing.- u. Arch.-Vereins 1885, S. 215—224.

1885. *M. Jean Meyer*. Mémoire sur la stadia topographique et son application. Paris 1885.

1886. *Lorber*. Über den Einfluss und die Grösse der Lattenschiefe bei Distanzmessungen und über die Genauigkeit von Schrauben-Distanzmessern. Zeitschr. f. Instrumentenkunde 1886, S. 365—377.

1886. *Schreyer*. Magnetische Beobachtungen im Königreich Sachsen. Progr. No. 511. Freiberg.

1886. *Hammer*. Über den Verlauf der Isogenen im mittleren Württemberg. Stuttgart.

1887. *Brough*, Tacheometry, or rapid surveying, by *B. H. Brough*, instructor in mine surveying at the royal school of mines. London 1887.

Fortlaufende Litteratur-Angaben über *Distanzmesser*, *Tachymetrie*, *Messtisch* u. s. w. enthalten die Bände der Zeitschrift für Vermessungswesen:

Band						
Band V	1876.	Litteratur-Bericht	für	1875,	Seite	(30).
„ VI.	1877.	„	„	1876,	„	(30).
„ VII.	1878.	„	„	1877,	„	(23).
„ VIII.	1879.	„	„	1878,	„	(137).
„ X.	1881.	„	„	1879 u. 1880,	„	(80).
„ XI.	1882.	„	„	1881,	„	195, 200, 201.
„ XII.	1883.	„	„	1882,	„	380, 383.
„ XIII.	1884.	„	„	1883,	„	447, 449, 450.
„ XIV.	1885.	„	„	1884,	„	327, 328, 330.
„ XV.	1886.	„	„	1885,	„	408, 409, 411.
„ XVI.	1887.	„	„	1886,	„	479, 482, 483.

Kapitel XVI.

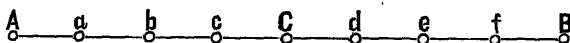
Abstecken von Linien.

§ 177. Abstecken von langen geraden Linien.

Kurze gerade Linien werden durch Einrichten und Einweisen mit freiem Auge abgesteckt, wie bereits in § 3. S. 4 gezeigt worden ist. Da man eine Gerade durch fortgesetztes Einrichten neuer Stäbe beliebig weit verlängern kann, so kann man auch hiernach das Abstecken sehr langer gerader Linien lediglich von freiem Auge machen.

Statt solcher jedem Feldmesser geläufiger Geradsteckungen auf kürzere Entfernungen und mit blosem Auge, wollen wir nun Geradrichtungen mit dem Theodolit betrachten, wie sie beim Strassen- und Eisenbahnbau, bei Grundlinienmessungen u. s. w. auf Entfernungen bis zu 10 Kilometer und noch weiter, vorkommen.

Wir wollen im Anschluss an Fig. 1. die verschiedenen hiebei gebräuchlichen Verfahren zunächst unterscheiden, wobei die beiden Endpunkte A und B fest gegeben und abgesteckt seien.

Fig. 1.

I. Einweisen von A oder B nach C.

II. Einrichten von C aus nach A und B.

III. Allmähliches Einweisen von A nach a, b, C u. s. w.

Diese Verfahrungsarten können auch unter sich verbunden werden.

I. Einweisung von den Endpunkten A oder B aus.

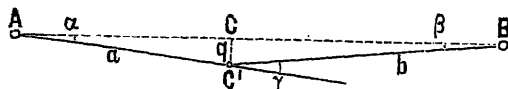
Dieses Verfahren scheint auf den ersten Blick das einfachste, man hätte dabei z. B. in A einen Theodolit aufzustellen und nach B einzustellen. Wenn nun das Verfahren überhaupt möglich sein soll, so müssen A und B beide auf natürlichen oder künstlichen Anhöhen sich befinden, und man wird den Zwischenpunkt C von A aus in der Tiefe sehen. Also kippt man den Theodolit in A von B nach C nieder und weist C, woselbst ein Gehilfe stehen muss, mit Fahnenwinken, mit Heliotropen, oder bei Nacht mit Lampenzeichen u. dergl. allmählich ein, gerade so wie man es auf kurze Entfernungen mit Handwinken thut.

Das ist aber eine *sehr* umständliche Sache, weshalb wir uns damit nicht weiter befassen, sondern zu besseren Methoden übergehen. Jedenfalls sollte man nicht den Punkt C endgültig einweisen, sondern wenn ein vorläufiger Punkt C' in der Nähe von C gefunden ist, die noch nötige Querverschiebung $C'C$ aus dem genau zu messenden kleinen Winkel BAC' nebst der Entfernung $AC = a$ ableiten, d. h. man hat nach Fig. 2.:

$$CC' = q = \frac{a\,\alpha}{\varrho} \qquad (1)$$

II. Einrichten von C aus nach A und B.

Man denke in Fig. 2. einen Punkt C' in der Nähe von C *vorläufig* bestimmt, was wohl mit den einfachsten Hilfsmitteln, Kreuzscheibe, Prismenkreuz u. s. w. (vgl. S. 5 und S. 10) erreichbar ist, wenn A und B von C' aus sichtbar sind.

Fig. 2.

Nun stellt man in C' einen Theodolit auf, misst den Winkel $AC'B$ genau, und sieht zu, ob er $= 180°$ oder grösser als $180°$ oder kleiner als $180°$ wird. In Fig. 2. haben wir angenommen, der Winkel $AC'B$ sei $= 180° - \gamma$, und daraus ergiebt sich, dass C' in dem angezeichneten Sinne aus der Geraden ACB herausgerückt ist, und es handelt sich darum, die Einrückung $C'C = q$ zu berechnen. Man braucht dazu vor allem den genau gemessenen Winkel γ, und dann noch, jedoch nur genähert, die beiden Entfernungen $C'A = a$ und $C'B = b$, deren Summe $a + b$ auch $= AB$ zu setzen ist. Man bekommt nun die Formel für q am einfachsten, wenn man den Flächeninhalt des langen schmalen Dreiecks $AC'B$ zweifach ausdrückt:

$$2 \triangle AC'B = (a + b)\, q = a\, b \sin \gamma$$

also

$$q = \frac{a\,b}{a+b} \sin \gamma \quad \text{oder} \quad = \frac{a\,b}{a+b} \frac{\gamma}{\varrho''} \qquad (2)$$

Damit kann der Punkt C abgesteckt werden.

Die hiezu nötigen Entfernungen a und b wird man je nach Umständen sich wohl genähert verschaffen können, z. B. aus einer topographischen Karte, durch Abschreiten, Gehzeit u. s. w. Je kleiner der Knickungswinkel γ ist, desto weniger genau braucht man die Entfernungen a und b; jedenfalls kann man im Falle ungenügender Entfernungen das ganze Verfahren *wiederholen*, und ein zweites kleineres q bestimmen, was auch aus anderen Gründen nützlich ist.

Dieses Verfahren des *Rückwärts*-Einrichtens von Zwischenpunkten C, das dann zwischen A und C, sowie C und B u. s. f. beliebig fortgesetzt werden kann, ist dem Vorwärts-Einweisen von A oder B nach C unbedingt vorzuziehen; zunächst aus praktischen Gründen, denn das Messen eines Winkels in C nach A und B ist offenbar viel leichter als das Einweisen mit Fahnen u. s. w. auf weite Entfernung. Das Rückwärts-Einrichten ist aber auch theoretisch genauer (ebenso wie allgemeiner ein Punkt im Innern eines Dreiecks genauer rückwärts, pothenotisch, als vorwärts, von den drei Ecken, eingeschnitten wird).

Zur theoretischen Genauigkeits-Vergleichung zwischen Einweisen und Einrichten hat man die beiden Formeln (1) und (2) zu differentiieren; setzt man dabei den Winkelmessungs-Fehler $= \pm \delta$, und bezeichnet man den mittleren Fehler von q mit $d\,q$ so hat man:

für Vorwärts-Einweisen $$d\,q_1 = \pm \frac{a\,\delta}{\varrho} \tag{3}$$

für Rückwärts-Einrichten $$d\,q_2 = \frac{a\,b}{a+b}\,\frac{\delta}{\varrho} \tag{4}$$

Hier ist $d\,q_1$ immer grösser als $d\,q_2$, für den besonderen Fall der Mitte, mit $a = b$ hat man:

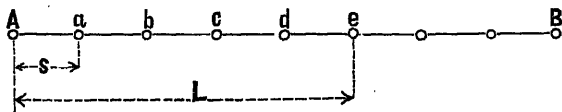
$$d\,q_1 = a\,\frac{\delta}{\varrho} \qquad d\,q_2 = \frac{a}{2}\,\frac{\delta}{\varrho} \tag{5}$$

In der Mitte ist also das Rückwärts-Einrichten doppelt so genau als das Vorwärts-Einweisen von einem Punkte A oder B aus.

III. Allmähliches Einweisen $A\,.\,a\,.\,b\ldots$

Es giebt viele Fälle, in welchen man nur einzelne kurze Zielungen nehmen kann, z. B. in der Ebene bei Sonnenschein, wegen Undeutlichkeit der Bilder, beim Durchhauen von Wäldern, bei Absteckungen in Tunneln u. s. w. Es bleibt hier nichts übrig, als ein geradliniges Polygon mit Brechungswinkeln von 180° zu bilden.

Ein Theodolit stehe in A (Fig. 3.) und soll nach dem Endpunkt B gerichtet sein. Nun weist man einen nahen Punkt a ein, stellt dort den Theodolit auf, zielt

Fig. 3.

zurück nach A und verlängert die Gerade $a\,A$ vorwärts nach $a\,b$, und zwar durch *Drehen der Alhidade um 180°* mittelst der Kreisteilung, und *nicht* durch Durchschlagen des Fernrohrs, weil gerade beim Durchschlagen der doppelte Zielaxen-Fehler des Fernrohrs zu Tage tritt (vgl. S. 154 c) Fig. 5.), oder auch mit *zweifachem* Durchschlagen nach Fig. 6. S. 154.

Da man einen Winkel genauer messen als einweisen kann, so empfiehlt es sich, im einzelnen so zu verfahren: man weist den Punkt a von A aus *vorläufig* ein, misst dann mit zwei Fernrohrlagen und mit Ablesung an zwei Nonien, in üblicher genauer Weise, den Horizontalwinkel zwischen den Zielpunkten B und a, und wenn dieser Winkel nicht 0° 0′ 0″ sich ergiebt, so verbessert man die Lage von a entsprechend; wenn z. B. der Horizontalwinkel $B\,A\,a = 0°\,0'\,15''$ erhalten würde, und die Entfer-

nung $Aa = 200^m$ wäre, so hätte man den vorläufig eingewiesenen Punkt a um $\frac{15}{206265} 200 = 0{,}015^m$ nach links zu verschieben. Ebenso weist man von a aus zuerst den Punkt b vorläufig ein, misst dann den Winkel Aab in aller Schärfe, und wenn er nicht genau 180° 0′ 0″ wird, so verbessert man nach Massgabe der Abweichung von 180° 0′ 0″ und der Entfernung ab die Lage von b. Die Entfernungen von Aa , ab ... braucht man natürlich hiebei nur genähert zu kennen.

Dieses Verfahren mag sich auch in solchen Fällen empfehlen, in welchen man auf *ein*mal weiter sehen und einweisen könnte; denn alles Einweisen auf kurze Entfernungen, welche noch Zurufe und gewöhnliches Handwinken gestatten, ist unverhältnismässig sicherer und bequemer als das zeitraubende Einweisen auf Kilometer-Weiten.

Genauigkeit. Andererseits ist allerdings die theoretische Genauigkeit dem fortgesetzten Einweisen mit kurzen Strecken nicht günstig. Es kommen hier die Fehlergesetze der Zugmessung in Betracht, welche wir schon in § 98. S. 328—329 entwickelt haben. Eine Absteckung von der Gesamtlänge L mit Einzelzielweiten s, mit einem mittleren Winkelfehler ε hat näherungsweise einen mittleren Querfehler q zur Folge nach der Gleichung (10) S. 329:

$$q = \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}\,\varrho}\sqrt{\frac{L^3}{s}} = 0{,}577\,\frac{\varepsilon}{\varrho}\sqrt{\frac{L^3}{s}} \tag{6}$$

Diese Gleichung sagt zuerst, dass der Fehler umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Zielweite s wächst, dass man also möglichst *lange* Zielweiten s wählen soll.

Weiter giebt diese Gleichung (6) für irgend welche Verhältnisse eine Fehlerschätzung. Wir wollen beispielshalber den Gotthardtunnel mit rund $15\,000^m$ Länge in Absätzen von je 500^m von beiden Seiten her abgesteckt denken. Für die eine Hälfte ist also $L = 7500^m$, $s = 500^m$ und ε wollen wir zunächst rund $= 1''$ annehmen; setzt man dieses in die Formel (6) so bekommt man:

$$L = 7500^m \;,\; s = 500^m \;,\; \varepsilon = \pm 1'' \quad,\quad q = \pm 0{,}081^m \tag{7}$$

Die Absteckung von der anderen Seite her giebt ebensoviel Fehler zu fürchten, der mittlere zu fürchtende Widerspruch beim Durchschlag ist also $\pm 0{,}081\sqrt{2} = \pm 0{,}115^m$.

Dieses soll nur ein mathematisches Beispiel sein; ob die Winkelgenauigkeit $\pm 1''$ in solchem Falle erreichbar ist, und ob die Zielweite $s = 500^m$ nützlich wäre, das sind technische Fragen, welche nur im einzelnen Falle beantwortet werden können.

Würde man im vorigen Falle die Zielweiten erheblich kürzer, etwa $s = 200^m$ nehmen, $\varepsilon = \pm 1''$ lassen, so würde $q = \pm 0{,}128^m$ und $q\sqrt{2} = \pm 0{,}182^m$.

Wenn bestimmte Erfahrungen vorliegen, aus denen etwa eine Beziehung zwischen der Zielweite s einerseits und dem mittleren Winkel-Einweisfehler oder dem Zeitaufwand andererseits sich herstellen liesse, so könnte daraus in Verbindung mit der Theorie der Gleichung (6) eine günstigste Zielweite berechnet werden.

Ausgleichung eines Abschluss-Widerspruchs.

Wenn eine streckenweise abgesteckte Gerade einen fest gegebenen Abschlusspunkt nicht genau erreicht, sondern um einen Betrag w links oder rechts von dem festen Punkte ankommt, so ist das, theoretisch betrachtet, ein Fehler von gleicher Art wie die Coordinaten-Abschlussfehler der gewöhnlichen Polygonzüge; und über die Ausgleichung und Verteilung eines solchen Fehlers gilt daher dasselbe wie bei jenen Zügen

Bei einer Absteckung in freiem Felde kann man einen solchen Fehler nachträglich verteilen, und dadurch die Gerade wesentlich verbessern, bei Tunnelabsteckungen wird das allerdings oft nicht möglich sein, indem zum Ausgleichen des Durchschlag-Widerspruchs nur kurze Teile nach beiden Seiten verfügbar sein werden.

Von solchen praktischen Fragen hier absehend, haben wir die Fehlerverteilung zu benützen, welche in Fig. 2. S. 339 dargestellt wurde, nämlich die Biegung der Geraden AB' in die Kurve AB'' mit einem Wendepunkt; allerdings wird man häufig statt dieser Biegung zur Vereinfachung eine einfache Drehung, d. h. Verteilung im Verhältnis der Entfernungen anwenden. Wenn man jedoch eine solche Geradabsteckung genau nach den theoretischen Regeln ausgleicht, so hat man *nach* der Ausgleichung nur noch sehr kleine mittlere Fehler, entsprechend der Gleichung (34) S. 337, d. h. in der Mitte nur den $\frac{1}{\sqrt{8}} = 0{,}354$ fachen Betrag des Endabschlussfehlers.

Über die langen Geradabsteckungen der Grundlinienmessungen der Landesaufnahme bei Göttingen und Meppen, welche von Oberst *Schreiber* im wesentlichen nach Fig. 2. angeordnet wurden, sind in der „Zeitschr. für Verm. 1880“ S. 383, und 1883 S. 581 Mitteilungen gemacht.

Ferner ist hier anzuführen: *Nagel*, „Bestimmung von Zwischenpunkten langer gerader Linien“, „Civilingenieur“ 26. Band, 1880, 2. und 3. Heft.

§ 178. Abstecken von Kreisbögen. Übersicht der Methoden.

Entsprechend der Absteckung einer Geraden gilt ein Kreisbogen als abgesteckt, wenn so viele Punkte desselben durch Stäbe bezeichnet sind, dass der Verlauf des Bogens dadurch bestimmt ist, und weitere Punkte des Bogens ohne umständliche Rechnung oder Konstruktion eingeschaltet werden können.

Die vorliegende Aufgabe kommt namentlich vor bei Ausführung von Eisenbahnen und Strassen etc. und hiebei bringt es die Natur der Entwurfs-Arbeiten mit sich, dass die Bestimmungsstücke eines Bogens auf dem Felde sehr häufig zwei Tangenten und der Halbmesser sind. Wenn nämlich ein Entwurf in einer Karte gezeichnet ist, dessen Axen-Linien aus einzelnen Kreisbögen mit berührenden Geraden besteht, so lassen sich alle Geraden desselben unmittelbar ins Feld übertragen, und die bei der Zeichnung angewendeten Bogenhalbmesser sind in Zahlen bekannt.

Damit haben wir das erste und wichtigste Verfahren:

I. Beginn mit der Tangenten-Absteckung und darauffolgende Anlegung berührender Bögen.

Alles hiezu Erforderliche ist in theoretischer und praktischer Beziehung sehr einfach, denn das Übertragen der Geraden von dem Plan ins Feld nach Massgabe irgend welcher in der Nähe der Geraden gelegener Fixpunkte ist nicht nur sehr bequem, sondern giebt auch, indem mehr als zwei Bestimmungspunkte für eine Gerade ins Feld gebracht werden, für diese Geraden selbst genügende Proben, dagegen kann die Lage der Bögen selbst unter Umständen unsicher werden. Wir betrachten deshalb auch noch ein anderes Verfahren:

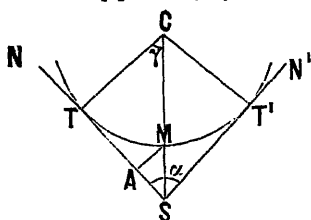
II. Beginn mit der Bogen-Absteckung, und darauffolgende Anlegung berührender Geraden.

Diese beiden Verfahrungs-Arten lassen sich auch unter sich verbinden, und eine lange Linie, welche aus vielen Geraden und Bögen besteht, wird im allgemeinen in einzelnen Teilen nach dem Verfahren I., in anderen Teilen nach II. behandelt werden.

Man unterscheidet hiebei die Absteckung der *Hauptpunkte* und dann Absteckung der *Einzelpunkte*. Die Einweisung der Einzelpunkte ist grossenteils unabhängig von der Bestimmung der Hauptpunkte oder der Hauptrichtungen, an welche sich diese Einzelpunkte anschliessen sollen.

Wir werden im Folgenden zuerst den am häufigsten vorkommenden Fall I., Kreisbogen-Absteckung nach Massgabe zweier gegebener Tangenten und des gegebenen Halbmessers, ausführlich behandeln, und zwar mit Trennung der Absteckung der Hauptpunkte und Absteckung der Einzelpunkte.

§ 179. Absteckung der Hauptpunkte, wenn zwei Tangenten und der Halbmesser gegeben sind.

Fig. 1.
Hauptpunkte T, M, T'.

Nach Andeutung von Fig. 1. sind zwei Gerade SN und SN' im Felde abgesteckt; dieselben sollen durch einen berührenden Kreisbogen TMT' verbunden werden, und zu diesem Zwecke sollen zunächst die beiden Berührungspunkte T und T' sowie die Bogenmitte M im Felde bestimmt werden.

Man stellt auf dem Schnittpunkte S der beiden Geraden einen Theodolit auf, und misst den Winkel $NSN' = \alpha$, welchen die Geraden bilden. Mit diesem gemessenen Winkel α und mit dem aus den Entwurfs-Arbeiten bekannten Halbmesser r wird die Berechnung gemacht.

Zuerst betrachtet man den halben Centriwinkel bei C, welcher $TCS = T'CS = \gamma$ in Fig. 1. eingeschrieben ist:

$$\gamma = 90° - \frac{\alpha}{2} \tag{1}$$

Damit berechnet man trigonometrisch:

$$\text{Tangente } ST \text{ oder } ST' = r \tang \gamma \tag{2}$$

Mit diesem Masse ST oder ST' kann man die beiden Berührungspunkte T und T' von S aus einmessen.

Zur Festlegung der Bogenmitte M fällt man die Senkrechte MA auf die eine Tangente, und hat hiezu:

$$\text{Abscisse } TA = r \sin \gamma \tag{3}$$

$$\text{Ordinate } AM = r - r \cos \gamma \tag{4}$$

Ausserdem kann man den Scheitelabstand SM berechnen:

$$SM = SC - MC = \frac{r}{\cos \gamma} - r \tag{5}$$

Endlich auch die Bogenlänge:

$$\text{Bogenlänge } TM = MT' = \frac{r \gamma}{\varrho} \tag{6}$$

Zahlen-Beispiel.

Es sei gegeben $r = 420^m$ und gemessen: $\alpha = 128° \; 53' \; 26''$

$$\text{folglich: } \frac{\alpha}{2} = 64° \; 26' \; 43''$$

$$90° - \frac{\alpha}{2} = \gamma = 25° \; 33' \; 17''$$

$\log r$	2.623 249
$\log \sin \gamma$	9.634 853
$\log r \sin \gamma$	2.258 102

$\log r$	2.623 249
$\log \cos \gamma$	9.955 290
$\log r \cos \gamma$	2.578 539
$\log \frac{r}{\cos \gamma}$	2.667 959

$\log r$	2.623 249
$\log tang\, \gamma$	9.679 563
$\log r\, tang\, \gamma$	2.302 812

$r \sin \gamma = 181{,}18 \qquad r \cos \gamma = 378{,}91 \qquad \frac{r}{\cos \gamma} = 465{,}54 \qquad r\, tang\, \gamma = 200{,}82$

$r = 420{,}00 \qquad r = 420{,}00$

$r - r \cos \gamma = 41{,}09 \quad , \quad \frac{r}{\cos \gamma} - r = 45{,}54$

Zur Bogenlänge hat man:

$\gamma = 25^\circ\ 33'\ 17''$

oder $\gamma = 1533'\ 17''$

$\gamma'' = 91997''$

$\log r$	2.623 249
Erg. $\log \varrho''$	4.685 575
$\log \gamma''$	4.963 774
$\log \frac{r\,\gamma''}{\varrho''}$	2.272 598

$\frac{r\,\gamma''}{\varrho''} = 187{,}33$

Man hat also nun nach den Formeln (2)—(6):

Abscisse $TA = 181{,}18^m$ Ordinate $AM = 41{,}09^m$ Tangente $ST = 200{,}82^m$ (7)

Scheitelabstand $SM = 45{,}54^m$ Bogenlänge $TM = 187{,}33^m$ (8)

damit kann man die Punkte T, T' und M abstecken.

Die Bogenlänge TM wird zunächst nicht gebraucht; wir haben dieselbe aber sogleich hier mitberechnet, weil sie später, nach Absteckung der Einzelpunkte, als Probe beim Durchmessen (und Numerieren) der ganzen Linie benützt werden soll.

Umformung der Grundformeln.

Wenn γ ein kleiner Winkel ist, so kann man die vorstehenden Formeln zum Teil dadurch in eine bessere Form bringen, dass man den halben Winkel $\frac{\gamma}{2}$ einführt nach der goniometrischen Formel:

$$1 - \cos \gamma = 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \tag{9}$$

Damit wird zunächst (4):

$$\text{Ordinate } AM = r - r \cos \gamma = 2\, r \sin^2 \frac{\gamma}{2} \tag{10}$$

Ferner giebt (5):

$$\frac{1}{\cos \gamma} - 1 = \frac{1 - \cos \gamma}{\cos \gamma} = \frac{2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}}{\cos \gamma} = \frac{2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \gamma \cos \frac{\gamma}{2}}$$

also: Scheitelabstand: $$SM = r\left(\frac{1}{\cos \gamma} - 1\right) = r\, tang\, \gamma\, tang\, \frac{\gamma}{2} \tag{11}$$

Aus (2) und (3) bildet man auch noch:

$$SA = ST - AT = r\, tang\, \gamma - r \sin \gamma = r\, tang\, \gamma\, (1 - \cos \gamma)$$

$$\text{Gegen-Abscisse: } SA = 2\, r\, tang\, \gamma \sin^2 \frac{\gamma}{2} \tag{12}$$

Wir wollen auch nach diesen Formeln die Rechnung für das vorhergehende Beispiel durchführen:

$r = 420^m \quad \alpha = 128°\,53'\,26'' \quad \gamma = 25°\,33'\,17'' \quad , \quad \frac{\gamma}{2} = 12°\,46'\,38{,}5''$

$log\ 2$	0.301 030
$log\ r$	2.623 249
$log\ sin \frac{\gamma}{2}$	9.344 713
$log\ sin \frac{\gamma}{2}$	9.344 713
$log\ A M$	1.613 705

$log\ 2\,r\,sin^2 \frac{\gamma}{2}$	1.613 705
$log\ tang\ \gamma$	9.679 563
$log\ S A$	1.293 268

$log\ r$	2.623 249
$log\ tang\ \gamma$	9.679 563
$log\ tang \frac{\gamma}{2}$	9.355 602
$log\ S M$	1.658 414

$A M = 41{,}087^m \qquad S A = \frac{\gamma}{2} = 19{,}646^m \qquad S M = 45{,}542^m \qquad (13)$

Diese Ergebnisse (13) stimmen mit den früheren (7) und (8) überein, innerhalb der in beiden Fällen eingehaltenen Rechenschärfe von 0,01^m und 0,001^m.

Man kann die Formeln (10), (11) und (12) auch unmittelbar geometrisch deuten, wenn man nach der nachfolgenden Fig. 2. den Winkel $\frac{\gamma}{2}$ einzeichnet.

(Die Formel (11) ist in *Bauernfeinds* „Elementen der Vermessungskunde", 6. Aufl. II. Band, S. 57, (59) angegeben. In der „Zeitschr. f. Verm. 1882", S. 244 wurde von *Schrenk* auf die Nützlichkeit dieser Formel hingewiesen.)

Zwischen-Tangenten.

Wenn der Scheitelabstand $S M$ sehr gross wird, oder wenn die Bogenmitte M sich nicht gut durch rechtwinklige Coordinaten gegen die Haupttangenten bestimmen lässt, so empfiehlt sich das Legen einer Zwischentangente $M S'$ (bzw. $S' M S''$, wenn in Fig. 2. der Punkt symmetrisch zu S' mit S'' bezeichnet wird).

Fig. 2.

Zieht man entsprechend $C S'$, so wird der Winkel $T C S' = S' C M = \frac{\gamma}{2}$, wenn, wie bisher, $C T M = \gamma$ genannt wird.

Betrachtet man nun den Bogen $T M' M$ für sich, mit der Mitte M', so überzeugt man sich, dass hiefür *dieselben* Formeln gelten wie im Vorhergehenden für den Bogen $T M T'$ (Fig. 1. S. 662), wenn man nur überall $\frac{\gamma}{2}$ an Stelle des früheren γ setzt. Man hat nämlich für Fig. 2.:

$$\text{Tangente } S' T = S M = r\, tang \frac{\gamma}{2} \qquad (2^*)$$

$$\text{Abscisse } T A = r\, sin \frac{\gamma}{2} \qquad (3^*)$$

$$\text{Ordinate } A M' = r - r\, cos \frac{\gamma}{2} \qquad (4^*)$$

$$\text{Scheitelabstand } S' M' = \frac{r}{cos \frac{\gamma}{2}} - r \qquad (5^*)$$

$$\text{Bogenlänge } T M' = \frac{r\,\gamma}{2\,\varrho} \qquad (6^*)$$

oder mit Einführung von $\frac{\gamma}{4}$:

$$\text{Ordinate} \qquad A\,M' = 2\,r\,\sin^2\frac{\gamma}{4} \tag{10*}$$

$$\text{Scheitelabstand} \quad S'\,M' \doteq r\,\tang\frac{\gamma}{2}\,\tang\frac{\gamma}{4} \tag{11*}$$

$$\text{Gegen-Abscisse} \quad S'A = 2\,r\,\tang\frac{\gamma}{2}\,\sin^2\frac{\gamma}{4} \tag{12*}$$

Diese Gleichungen (2*) bis (12*) entsprechen den früheren (2) bis (12) auf S. 662—663.

Wenn man will, kann man in dem Punkte M' (Fig. 2. S. 664) abermals eine Tangente legen, und die zugehörigen Formeln erhält man, wenn man in den vorstehenden Formeln (2*) bis (12*) überall $\frac{\gamma}{4}$ an Stelle von $\frac{\gamma}{2}$ setzt.

§ 180. Unzugänglicher Tangentenschnitt.

Es kommt oft vor, dass der Schnittpunkt S der beiden zuerst abgesteckten Tangenten nicht zugänglich ist; sei es, dass er in Wasser, in einen Wald, an einen steilen Bergabhang u. s. w. fällt, oder auch nur, dass dieser Schnittpunkt zu *weit* entfernt, oder unbequem fällt; in allen diesen Fällen kann man durch eine Verbinduug $A\,B$ (Fig. 1.) zwischen den beiden Tangenten, den Schnitt S ersetzen.

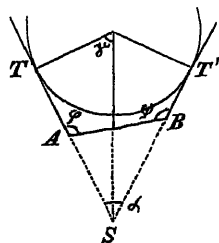
Fig. 1.

Man braucht nur die Entfernung $A\,B$ und die Winkel φ bei A und ψ bei B zu messen, und kann dann berechnen:

$$\alpha = \varphi + \psi - 180^\circ$$

$$\gamma = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \quad \text{oder} \quad \gamma = 180^\circ - \frac{\varphi + \psi}{2}$$

$$S\,A = \frac{A\,B}{\sin\alpha}\sin\psi \qquad S\,B = \frac{A\,B}{\sin\alpha}\sin\varphi.$$

Damit ist die Aufgabe auf die vorhergehende zurückgeführt.

Nachdem so der Grundgedanke unserer Aufgabe an Fig. 1. klar gemacht ist, wollen wir die weitere Ausführung an einem Zahlenbeispiel mit der zugehörigen Fig. 2. S. 666 zeigen.

Es sind in Fig. 2. die beiden Geraden $N\,A$ und $N'\,B$ abgesteckt, und es soll ein berührender Bogen von 300^m Halbmesser angelegt werden. Es ist nicht möglich, den Schnitt S der Geraden zu benützen, dagegen kann eine Gerade $A\,B$ durchgesehen und mit Latten gemessen werden. Man soll erhalten:

$$\text{Entfernung } A\,B = 278{,}14^m \tag{1}$$

und die zwei Winkel in A und B:

$$N\,A\,B = \varphi = 129^\circ\,26'\,35'' \qquad A\,B\,N' = \psi = 116^\circ\,23'\,25'' \tag{2}$$

Nun beginnt die Berechnung im Felde, welche wir für diesen oft vorkommenden Fall in aller Ausführlichkeit hersetzen:

$$\begin{array}{rl} \varphi = & 129^\circ\,26'\,35'' \\ \psi = & 116^\circ\,23'\,25'' \\ \hline \varphi + \psi = & 245^\circ\,50'\;\;0'' \\ \alpha = & 65^\circ\,50'\;\;0'' \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 180^\circ - \varphi = A = & 50^\circ\,33'\,25'' \\ 180^\circ - \psi = B = & 63^\circ\,36'\,35'' \\ \alpha = & 65^\circ\,50'\;\;0'' \\ \hline & 180^\circ\;\;0'\;\;0'' \end{array}$$

log A B	2.444 263
log sin α	9.960 165
log (A B : sin α)	2.484 098
log sin B	9.952 205
log A S	2.436 303

$A\,S = 273{,}09^m$

log A B	2.444 263
Erg. *log sin α*	0.039 835
log (A B : sin α)	2.484 098
log sin A	9.887 761
log B S	2.371 859

$B\,S = 235{,}43^m$ (

Fig. 2.
(Massstab 1 : 10 000, 1cm = 100m.)

Mit dem Winkel α macht man nun im wesentlichen wieder die frühere Berechnung von § 179:

$$\alpha = 65^\circ\,50'\,0''$$

$$\frac{\alpha}{2} = 32^\circ\,55'\,0''$$

$$90^\circ - \frac{\alpha}{2} = \gamma = 57^\circ\;\;5'\,0'' \quad , \quad r = 300^m \quad , \quad \frac{\gamma}{2} = 28^\circ\,32'\,30''$$

log r	2.477 121
log tang γ	0.188 866
log r tang γ	2.665 987

$S\,T = r \; tang\,\gamma = 463{,}43^m$

log r	2.477 121
$log\;tang\,\frac{\gamma}{2}$	9.735 517
$log\;r\;tang\,\frac{\gamma}{2}$	2.212 638

$$P\,T = P\,M = r\;tang\,\frac{\gamma}{2} = 163{,}17 \qquad (4)$$

Nun kann man alle zur Absteckung erforderlichen Masse zusammensetzen:

$$\begin{array}{rlcrl} ST = & 463{,}43^m & \qquad & SU = & 463{,}43^m \\ SA = & 273{,}09 & & SB = & 235{,}43 \\ \hline AT = & 190{,}34^m & & BU = & 228{,}00^m \\ TP = & 163{,}17 & & UQ = & 163{,}17 \\ \hline AP = & 27{,}17^m & & BQ = & 64{,}83^m \end{array} \qquad \begin{array}{r} \\ \\ (5) \\ \\ (6) \end{array}$$

Die so erhaltenen vier Hauptmasse $27{,}17^m$, $190{,}34^m$, $64{,}83^m$, $228{,}00^m$ schreibt man in Fig. 2. übersichtlich ein, und nun beginnt die Absteckung, indem man von A und B diese Masse in der richtigen Weise mit Messlatten oder dem Messband hinausmisst.

Wenn P und Q eingemessen sind, so wird die Verbindung PQ abgesteckt, und ebenfalls gemessen, wodurch die Probe entsteht, dass $PQ = 2 \text{mal } 163{,}17^m = 326{,}34^m$ sein muss. Hiedurch wird auch die Bogenmitte M im Felde bestimmt.

Alles Übrige ist ebenso wie schon in § 179. gezeigt wurde.

Wenn man etwa noch den Bogen-Viertels-Punkt M' von P aus abstecken will, so stellt man in P den Theodolit auf, setzt den Winkel $TPC = 90° - \frac{\gamma}{2} = 61° 27' 30''$ ab, und berechnet dazu die Entfernung:

$$PM' = r \, tang \frac{\gamma}{2} \, tang \frac{\gamma}{4} = 41{,}50^m \tag{7}$$

Damit kann der Punkt M' abgesteckt werden.

Einschaltung eines Hilfspunktes C (Fig. 3. S. 668).

Es kann vorkommen, dass der Tangentenschnitt S selbst nicht zugänglich ist, und dass man auch nicht zwei passende Punkte A und B auf den Tangenten findet, zwischen welchen zusammen gesehen und gemessen werden kann; dann ist es vielleicht möglich, einen *dritten* Punkt C (Fig. 3.) so einzuschalten, dass das Dreieck ACB durch zwei Seiten AC und BC und den eingeschlossenen Winkel bei C bestimmt werden kann.

Man kann dann mit Hilfe dieses Dreiecks ABC die Aufgabe auf die vorhergehende Aufgabe von Fig. 2. S. 666 zurückführen.

Die weitere Ausführung dieses Grundgedankens soll an einem Zahlen-Beispiel gezeigt werden, welches der Fig. 3. S. 668 entspricht.

Es sind die Geraden AP und BQ im Felde abgesteckt; dieselben sollen durch einen berührenden Bogen TMT' vom Halbmesser $r = 450^m$ verbunden werden, und dazu sollen zunächst die drei Punkte T, M, T' abgesteckt werden.

Da AB unmittelbar nicht gemessen werden kann, ist ein Punkt C gewählt, und es wird gemessen:

die zwei Seiten $AC = b = 276{,}28^m$, $BC = a = 304{,}52^m$ (8)

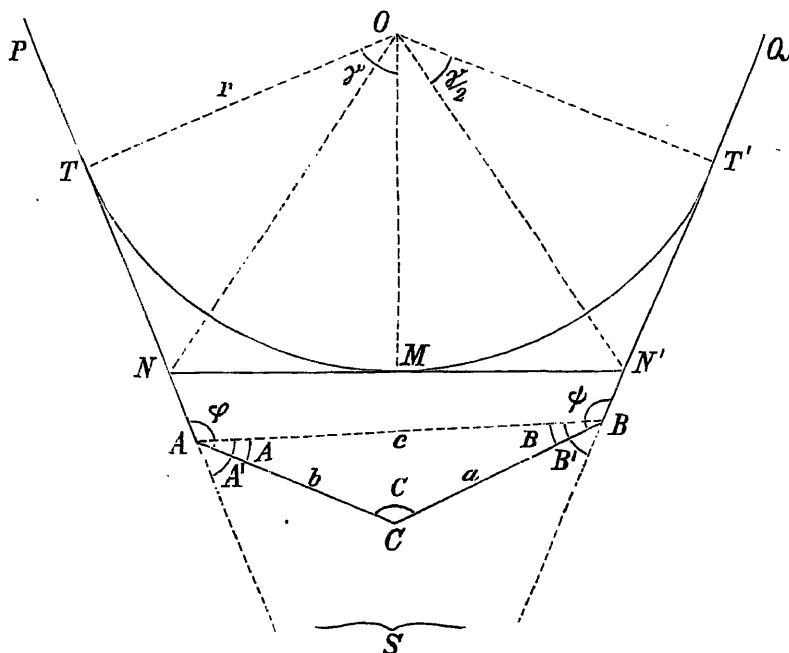
die drei Winkel $PAC = \varphi = 134° \, 18' \, 20''$, $CBQ = \psi = 137° \, 55' \, 18''$ (9)

$$ACB = C = 132° \, 7' \, 12'' \tag{10}$$

Man beginnt damit, das Dreieck ACB aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel aufzulösen, wozu man sich am besten der *Mollweide*schen Gleichungen bedient:

$$tang\,\frac{A-B}{2} = \frac{(a-b)\cos\frac{C}{2}}{(a+b)\sin\frac{C}{2}} \tag{11}$$

$$c = \frac{(a-b)\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}} \quad \text{oder} \quad c = \frac{(a+b)\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}} \tag{12}$$

Fig. 8.
Massstab 1 : 10 000 (1cm = 100m.)
$r = 450^m$.

Die Ausrechnung, deren Logarithmen wir hier nicht hersetzen, giebt:

$$a = 304{,}52 \qquad C = 132^\circ\ 7'\ 12''$$

$$b = 276{,}28 \qquad \frac{C}{2} = 66^\circ\ 3'\ 36''$$

$$a+b = 580{,}80$$

$$a-b = 28{,}24 \qquad 90^\circ - \frac{C}{2} = \frac{A+B}{2} = 23^\circ\ 56'\ 24''$$

$$\frac{A-B}{2} = 1^\circ\ 14'\ 12''$$

$$c = 530{,}96 \qquad \left.\begin{aligned} A &= 25^\circ\ 10'\ 36'' \\ B &= 22^\circ\ 42'\ 12'' \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Es folgt nun die Berechnung des Dreiecks ABS, dessen Winkel mit A', B' und S bezeichnet werden sollen.

$$
\begin{array}{llll}
\text{Nach (9)} & \varphi = 134^\circ\,18'\,20'' & & \psi = 137^\circ\,55'\,18'' \\
\text{Nach (13)} & A = 25^\circ\,10'\,36'' & & B = 22^\circ\,42'\,12'' \\
\hline
& \varphi - A = 109^\circ\,7'\,44'' & & \psi - B = 115^\circ\,13'\,6'' \\
& A' = 70^\circ\,52'\,16'' & & B' = 64^\circ\,46'\,54''
\end{array} \qquad (14)
$$

$$S = 44^\circ\,20'\,50''$$

Dabei ist $A' + S + B' = 180^\circ.$

Nun ist die Aufgabe völlig auf den Fall von Fig. 2. S. 666 zurückgeführt, indem der jetzt mit S bezeichnete Winkel dem früheren Winkel α von Fig. 2. S. 666 entspricht. Wir geben deshalb nur noch die Hauptergebnisse, wobei $r = 450^m$ ist:

$$A\,S = 687{,}20^m \quad , \quad B\,S = 717{,}65^m \qquad (15)$$

$$\gamma = 90^\circ - \frac{S}{2} = 67^\circ\,49'\,35'' \quad , \quad \frac{\gamma}{2} = 33^\circ\,54'\,47{,}5''$$

$$S\,T = S\,T' = r \operatorname{tang} \gamma = 1104{,}11^m \quad , \quad N\,T = N\,M = r \operatorname{tang} \frac{\gamma}{2} = 302{,}54^m$$

$$A\,N = 114{,}40^m \quad , \quad B\,N' = 83{,}95^m \qquad (16)$$

$$A\,T = 416{,}94^m \quad , \quad B\,T' = 386{,}49^m \qquad (17)$$

Berechnung mit Coordinaten. Statt das Hilfsdreieck $A\,C\,B$ aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel aufzulösen, kann man auch alles nach Coordinaten berechnen. Wenn man A zum Ursprung eines Coordinatensystems, und $A\,P$ zu der positiven x-Axe eines solchen Systemes nimmt, so stellt $A\,C\,B$ einen Zug vor, den man in üblicher Weise (vgl. S. 298—299) nach Coordinaten berechnen kann, die Resultate sind:

Punkt	y	x	*Azimute*
A	$0{,}00^m$	$0{,}00^m$	$(A\,C) = 134^\circ\,18'\,20''$
C	$+\,197{,}71^m$	$-\,192{,}98^m$	$(C\,B) = 86^\circ\,25'\,32''$
B	$+\,501{,}64^m$	$-\,173{,}99^m$	$(B\,Q) = 44^\circ\,20'\,50''$

Aus den Coordinaten von A und B berechnet man das Azimut und die Entfernung von A nach B:

$$(A\,B) = 109^\circ\,7'\,43'' \qquad A\,B = c = 530{,}96^m \qquad (18)$$

Da man nun die Azimute $(A\,S)$ und $(B\,S)$ bzw. $(A\,P)$ und $(B\,Q)$ aus der Zugsberechnung hat, und auch das Azimut $(A\,B)$ bzw. $(B\,A)$ soeben bestimmt wurde, kann man auch die Winkel A' und B' ableiten:

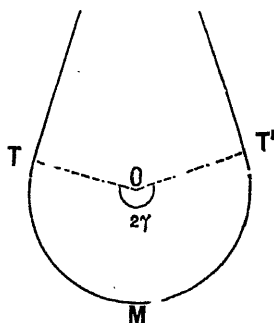
$$
\begin{array}{lll}
(A\,B) = 109^\circ\,7'\,43'' & & (B\,A) = 289^\circ\,7'\,43'' \\
(A\,S) = 180^\circ\,0'\,0'' & & (B\,S) = 224^\circ\,20'\,50'' \\
\hline
A' = 70^\circ\,52'\,17'' & & B' = 64^\circ\,46'\,53''
\end{array} \qquad (19)
$$

Dieses (18) und (19) stimmt mit dem früheren (13) und (14), und die übrige Rechnung (15), (16), (17) bleibt ungeändert.

Diese Coordinaten-Berechnung deutet zugleich an, dass die Verbindung der Tangentenpunkte A und B in Fig. 3. auch durch mehr als *einen* Zwischenpunkt C gemacht werden kann; man könnte einen Zug mit beliebig vielen Zwischenpunkten zwischen A und B anlegen, und daraus die Entfernung $A\,B$ und alle nötigen Winkel berechnen. Wenn z. B. zwischen A und B ein gut gebahnter, aber mehrfach gebrochener Weg besteht, so könnte es sich wohl empfehlen, auf diesem Wege einen scharfen Polygonzug anzulegen (mit sorgfältigster *Centrierung*), und dadurch eine etwa

anderwärts mögliche aber schlecht zu messende Verbindung durch *eine* Gerade AB zu ersetzen.

Im allgemeinen aber sind natürlich Zwischenpunkte möglichst zu vermeiden.

Fig. 4.

Überstumpfer Centriwinkel.

Wenn der abzusteckende Bogen grösser als ein Halbkreis wird, wie in Fig. 4. angenommen ist, wobei der Centriwinkel 2γ grösser als 180°, also γ grösser als 90° ist, so bleibt doch das im vorstehenden beschriebene Absteckungs-Verfahren mit den dazu gehörigen Formeln im wesentlichen bestehen.

Parallele Tangenten.

Wenn dagegen der Bogen ein *Halbkreis* mit dem Centriwinkel 180° ist, was bei parallelen Tangenten eintritt, so wird die im bisherigen beschriebene Behandlung der Absteckung *unmöglich*, wie leicht einzusehen ist. Wir werden diesen Fall in § 186. weiter behandeln.

§ 181. Absteckung der Einzelpunkte nach rechtwinkligen Coordinaten.

Man wendet die Methode der rechtwinkligen Coordinaten in zweifacher Weise an, nämlich erstens mit gleichen Abscissen-Unterschieden, und zweitens mit gleichen Bogenlängen.

Wir werden diese beiden Fälle im Folgenden zuerst getrennt behandeln, und dann gegenseitig vergleichen.

I. Rechtwinklige Coordinaten für Kreispunkte mit gleichen ***Abscissenunterschieden.***

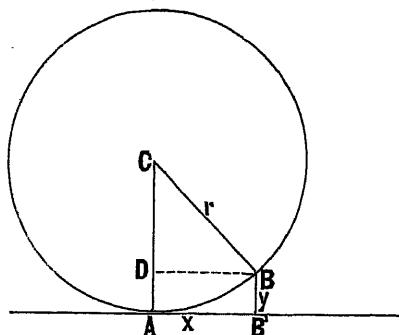
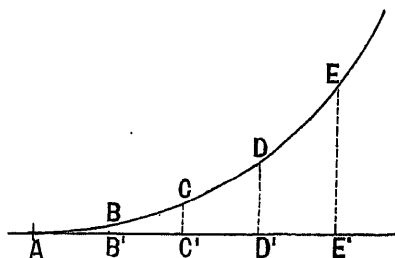



Fig. 1. Fig. 2. $AB' = B'C' = C'D' = D'E'$.

Aus Fig. 1. entnimmt man die Gleichung:

$$y = BB' = AD = CA - CD$$

$$y = r - \sqrt{r^2 - x^2} \qquad (1)$$

Hat man hiernach für einen gegebenen Halbmesser r und beliebig gewählte Abscissen x die Ordinaten y berechnet, so kann die Absteckung nach Andeutung von Fig. 2. S. 670 stattfinden.

Obgleich dabei die Abscissen x willkürlich sind, nimmt man doch meistens dieselben in arithmetischer Reihe, so dass dann die *Bogen*-Abstände AB, BC, CD und DE in Fig. 2. S. 670 *ungleich* werden.

Was die Berechnung der y für gewisse x betrifft, so kann man geradezu die Formel (1) S. 670 anwenden, oder man kann dieselbe so schreiben:

$$y = r - \sqrt{(r+x)(r-x)} \tag{2}$$

Endlich kann man für solche Werte x, welche im Verhältnis zu r verhältnismässig klein sind, die Formel (1) auch in eine Reihe entwickeln:

$$\sqrt{r^2 - x^2} = r\sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}$$

$$\sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} = \left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}\frac{x^2}{r^2} - \frac{1}{8}\frac{x^4}{r^4} - \ldots$$

Durch Zusammenfassung mit (1) S. 670 erhält man hieraus:

$$y = \frac{x^2}{2r} + \frac{x^4}{8r^3} + \ldots \tag{3}$$

Die weitere Fortsetzung dieses Verfahrens giebt:

$$y = \frac{x^2}{2r} + \frac{x^4}{8r^3} + \frac{x^6}{16r^5} + \frac{5r^8}{128r^7} + \frac{7r^{10}}{256r^9} + \ldots \tag{3a}$$

Für viele Zwecke genügt es, nur das *erste* Glied von (3) anzuwenden, d. h. zu setzen:

$$y = \frac{x^2}{2r} \tag{4}$$

Diese Näherungsformel (4) kann man auch so auffassen, dass sie an Stelle des flachen *Kreis*bogens einen flachen *Parabel*bogen setzt. (Die Formel (4) entspricht auch der Korrektion für die Erdkrümmung, $\frac{a^2}{2r}$, welche wir früher für trigonometrische Höhenbestimmung in (4) S. 426 bestimmt haben.)

Die Reihe (3a) ist, sobald man mehr als zwei oder drei Glieder braucht, nicht mehr bequem; namentlich dann nicht, wenn man darauf ausgeht, die letzte Ziffer scharf zu erhalten.

Eine für viele Zwecke ausreichende Tafel der Ordinatenwerte y für gleichförmig wachsende Abscissen x haben wir im Anhang auf Seite [44]—[46] gegeben. Solche Tafeln sind schon wiederholt berechnet und herausgegeben worden.

Die ausführlichste solcher Tafeln ist die von uns berechnete und herausgegebene: „Kreis-Coordinaten für 200 Radien von *Jordan*, Leipzig, Teubner, 1881“.

II. Rechtwinklige Coordinaten für Kreispunkte mit gleichen **Bogen-Abständen.**

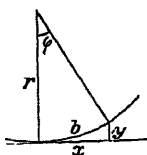
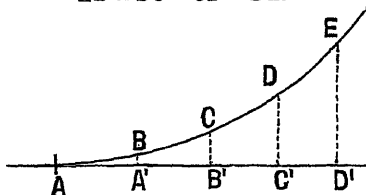
In Fig. 3. S. 672 sei b eine Bogenlänge und φ der zugehörige Centriwinkel, dann ist für den Halbmesser r:

$$\varphi = \frac{b}{r}\varrho \tag{5}$$

Die hiezu gehörige Abscisse x und die Ordinate y findet man nach Fig. 3:

$$x = r \sin \varphi \tag{6}$$

$$y = r - r \cos \varphi \quad \text{oder} \quad y = 2\, r \sin^2 \frac{\varphi}{2} \tag{7}$$

Die Winkel φ lässt man hier meist in arithmetischer Progression wachsen, und dann erhalten die Punkte auf dem Kreis gleiche Bogen-Abstände, wie in Fig. 4. angedeutet ist.

Auch für diese Verhältnisse sind wiederholt Tafeln berechnet worden, namentlich das älteste Werk dieser Art:

„Handbuch zum Abstecken von Kurven auf Eisenbahn- und Wege-Linien, von *H. Kröhnke*, Civilingenieur und bestalltem Landmesser". Leipzig, Teubner, erste Auflage 1851, und spätere Auflagen.

Vergleichung der Verfahrungsarten I. und II.

Zur Vergleichung der Absteckungen mit gleichen Abscissen-Unterschieden und mit gleichen Bogenstücken ist zu bemerken, dass die gleichen Abscissen-Unterschiede bequemer sind, weil hiebei nur die Ordinatenwerte im Auge behalten werden müssen, indem die gleichförmig fortlaufenden Abscissen (z. B. von 20^m zu 20^m) sich von selbst ergeben. Die gleichen Bogen-Abstände der Punkte haben dann Wert, wenn man die einzelnen abgesteckten Punkte sofort zur endgültigen Verpflockung und Numerierung des Bogens brauchen kann. Dieses ist aber sehr selten der Fall, weil im allgemeinen kein Punkt der Numerierung und Verpflockung mit dem Bogen-Anfang oder Bogen-Ende zusammenfällt. Die gleichen Bogenstücke haben bei der Absteckung den Vorzug, dass man die Stetigkeit mit dem Auge besser verfolgen kann, doch ist dieses auch bei gleichen Abscissen-Unterschieden noch genügend der Fall.

§ 182. Absteckung der Einzelpunkte durch Peripheriewinkel.

Der Satz von der Gleichheit der Peripheriewinkel, welche auf gleichen Bögen stehen, lässt sich in zweifacher Weise zur Bogen-Absteckung verwenden.

I. *Abstecken mit feststehendem Instrumente (Theodolit).*

II. *Abstecken mit wanderndem Freihand-Instrument* (Sextant, Prismenkreis u. s. w.).

Wir werden diese beiden Verfahren hier nacheinander behandeln:

I. Abstecken durch Peripheriewinkel von einem festen Punkte A aus (Fig. 1.).

Fig. 1.
Konstante Peripheriewinkel α mit dem gemeinsamen Scheitel A.

Wenn in Fig. 1. die Punkte $A\,B\,C\,D\,E$ unter sich gleichen Abstand haben, so sind auch die Peripheriewinkel, welche die Sehnen AB AC AD AE unter sich bilden, einander gleich; und wenn AT eine Tangente in A ist, so ist auch noch der Winkel BAT den Peripheriewinkeln gleich. Wenn α der gemeinsame Wert dieser Winkel, und s der zugehörige konstante Sehnenwert ist, so hat man nach Fig. 1.:

$$\sin \alpha = \frac{s}{2\,r} \qquad (1)$$

Hiernach ist folgende Tafel berechnet, wobei $s = 20$ angenommen ist, entsprechend der gewöhnlichen Messband- oder Ketten-Länge von 20^m.

Peripheriewinkel α für die Sehnenlänge 20.

r	α	r	α	r	α	r	α
100	5° 44′ 21″	240	2° 23′ 17″	360	1° 35′ 30″	700	0° 49′ 7″
120	4 46 49	250	2 17 33	380	1 30 29	800	0 42 58
140	4 5 46	260	2 12 15	400	1 25 57	900	0 38 12
150	3 49 21	280	2 2 48	450	1 16 24	1000	0 34 23
160	3 35 0	300	1 54 37	500	1 8 46	1500	0 22 55
180	3 11 5	320	1 47 27	550	1 2 30	2000	0 17 11
200	2 51 58	340	1 41 7	600	0 57 18	2500	0 13 45
220	2 36 19	350	1 38 14	650	0 52 53	3000	0 11 28

Um nun hiernach einen Bogen z. B. vom Halbmesser 380^m abzustecken, stellt man einen Theodolit in A auf, orientiert nach der Tangente AT, dreht um den Winkel $1°\,30'\,29''$ nach links, und misst mit dem 20-Meter-Band von A an den Punkt B ein, dann wird die Richtung AC mittelst des doppelten Winkels $TAC = 2\alpha = 3°\,0'\,58''$ eingewiesen, und $BC = 20^m$ abgemessen u. s. f.

Eine ausführliche Tafel der Sehnenwinkel und der Vielfachen derselben ist im Anhange Seite [47]—[49] gegeben; die dabei angewendete Abrundung auf Minuten giebt genügende Genauigkeit.

Wir haben hiebei für die Sehne s eine runde Zahl 20^m angenommen; man kann aber auch umgekehrt für den Peripheriewinkel α eine runde Zahl, z B. $\alpha = 1°$ oder $\alpha = 30'$ etc. nehmen, und den zugehörigen Sehnenwert nach (1) berechnen, nämlich:

$$s = 2\,r \sin \alpha \qquad (2)$$

Eine hiezu gehörige Hilfstafel ist im Anhang Seite [50] gegeben. Man entnimmt z. B. daraus, dass man einen Bogen vom Halbmesser $r = 500^m$ mit drei verschiedenen Centriwinkeln abstecken kann, nämlich:

1) mit $\alpha = 2°$ und $s = 34,900^m$
2) mit $\alpha = 1°$ und $s = 17,452^m$
3) mit $\alpha = 30'$ und $s = 8,727^m$

Um hiernach bequem abzustecken, muss man sich ein Bandmass oder eine Kette oder dergleichen von veränderlicher Länge herstellen, was keine Schwierigkeiten verursachen kann. Nötigenfalls kann man sich für diesen Zweck wohl auch einer guten, mit Öl getränkten, Hanfleine bedienen, welche man an zwei Stäben in richtiger, für den einzelnen Fall gut abgemessener Länge befestigt.

II. Abstecken durch Peripheriewinkel mit wanderndem Instrument.

Fig. 2.
Konstante Peripheriewinkel mit der gemeinsamen Sehne AB.

Wenn A und B in Fig. 2. zwei feste Punkte sind, so bekommt man irgend welche weitere Punkte $P, Q \ldots$, welche mit A und B auf einer Kreisperipherie liegen, wenn man diese Punkte so bestimmt, dass die Strahlen nach A und B einen konstanten Winkel einschliessen. Für den Kreishalbmesser r berechnet man diesen konstanten Winkel α durch die Formel:

$$\sin \alpha = \frac{AB}{2r} \quad (3)$$

wo AB die Sehnenlänge zwischen A und B ist.

Hat man in A eine Tangente $T'AT$, so kommt dort der Winkel $\alpha = T'AB$ unmittelbar zum Vorschein.

Um diese theoretischen Beziehungen zur Absteckung verwerten zu können, braucht man ein leicht versetzbares Winkelmess-Instrument, am besten ein Freihand-Instrument. Ein solches Instrument (Arkograph) wurde von *Pockels* in der „Deutschen Bauzeitung 1875“ S. 22 beschrieben. Dasselbe ist wie ein Winkelspiegel gebaut (vgl. unsere frühere Fig. 1. und 2. S. 6), nur mit dem Unterschiede, dass die beiden Spiegel gegen einander beweglich sind.

Da Reflexions-Winkelmess-Instrumente für andere Zwecke, namentlich für seemännische Beobachtungen, allgemein im Gebrauche sind, nämlich Spiegel-Sextanten, Prismenkreise u. s. w., so braucht man für die oben beschriebenen Kreis-Absteckuugen keine besonderen Instrumente zu bauen; denn der *gewöhnliche Sextant oder Prismenkreis* eignet sich vorzüglich zu dem angegebenen Zweck.

(Ausführliche Beschreibung dieser Instrumente findet man in des Verfassers „Grundzüge der astronomischen Zeit- und Orts-Bestimmung, Berlin 1885“, S. 154 u. ff.)

Für Landmesser, welche eines jener bekannten seemännischen bzw. astronomischen Instrumente nicht haben, ist ein kleines Prismen-Instrument zu empfehlen, welches, nach Angabe von Dr. *Decher*, von *Reinfelder & Hertel* in München unter dem Namen *Prismentrommel* geliefert wird (mit einer Schrift: „Die Prismentrommel“, ein Tascheninstrument zum Abstecken von Kreisbögen, München 1882).

Fig. 3.
Prismentrommel (Durchmesser = 6cm).

(Hannov. Sammlung, Mechaniker *Reinfelder & Hertel.*)

Wir geben in Fig. 3. die äussere Ansicht dieses Instrumentchens, wozu nur bemerkt wird, dass die *Reinfelder-Hertel*sche Anordnung *keine* Kreis-Teilung hat; die in Fig. 3. mit T bezeichnete Teilung, welche an dem Zeiger Z abgelesen wird (nur auf 1°, mit Schätzung von 0,1°) wurde von uns nachher zugefügt, und soll weniger zum eigentlichen Winkelmessen, als dazu dienen, dass man irgend eine Einstellung wenigstens näherungsweise bezeichnen und wiederherstellen kann.

Im übrigen haben wir zwei rechtwinklig gleichschenklige Prismen, ein oberes Q und ein unteres P, welche durch die Schraube H gegen einander gedreht werden können.

Zu der Theorie des Instrumentes übergehend, können wir bemerken, dass ein besonderer Fall desselben, das *Bauernfeind*sche *Prismenkreuz*, welches zum Abstecken von gestreckten Winkeln (180°) dient, bereits früher in Fig. 3. und 3a. S. 10 von uns behandelt worden ist.

Früher in § 6. S. 9 haben wir bewiesen, dass die Hypotenusen-Ebene eines gleichseitig rechtwinkligen Prismas für den Ein- und Austritt eines Lichtstrahls an den Katheten-Ebenen wie ein ebener Spiegel wirkt, welcher einen Strahl unter gleichen Winkeln einfallen und austreten lässt.

Fig. 4.

Eine hiezu gehörige Hilfstafel ist im Anhang Seite [50] gegeben. Man entnimmt z. B. daraus, dass man einen Bogen vom Halbmesser $r = 500^m$ mit drei verschiedenen Centriwinkeln abstecken kann, nämlich:

1) mit $\alpha = 2°$ und $s = 34{,}900^m$
2) mit $\alpha = 1°$ und $s = 17{,}452^m$
3) mit $\alpha = 30'$ und $s = 8{,}727^m$

Um hiernach bequem abzustecken, muss man sich ein Bandmass oder eine Kette oder dergleichen von veränderlicher Länge herstellen, was keine Schwierigkeiten verursachen kann. Nötigenfalls kann man sich für diesen Zweck wohl auch einer guten, mit Öl getränkten, Hanfleine bedienen, welche man an zwei Stäben in richtiger, für den einzelnen Fall gut abgemessener Länge befestigt.

II. Abstecken durch Peripheriewinkel mit wanderndem Instrument.

Fig. 2.
Konstante Peripheriewinkel mit der gemeinsamen Sehne AB.

Wenn A und B in Fig. 2. zwei feste Punkte sind, so bekommt man irgend welche weitere Punkte $P, Q \ldots$, welche mit A und B auf einer Kreisperipherie liegen, wenn man diese Punkte so bestimmt, dass die Strahlen nach A und B einen konstanten Winkel einschliessen. Für den Kreishalbmesser r berechnet man diesen konstanten Winkel α durch die Formel:

$$\sin \alpha = \frac{AB}{2r} \qquad (3)$$

wo AB die Sehnenlänge zwischen A und B ist.

Hat man in A eine Tangente $T'AT$, so kommt dort der Winkel $\alpha = T'AB$ unmittelbar zum Vorschein.

Um diese theoretischen Beziehungen zur Absteckung verwerten zu können, braucht man ein leicht versetzbares Winkelmess-Instrument, am besten ein Freihand-Instrument. Ein solches Instrument (Arkograph) wurde von *Pockels* in der „Deutschen Bauzeitung 1875“ S. 22 beschrieben. Dasselbe ist wie ein Winkelspiegel gebaut (vgl. unsere frühere Fig. 1. und 2. S. 6), nur mit dem Unterschiede, dass die beiden Spiegel gegen einander beweglich sind.

Da Reflexions-Winkelmess-Instrumente für andere Zwecke, namentlich für seemännische Beobachtungen, allgemein im Gebrauche sind, nämlich Spiegel-Sextanten, Prismenkreise u. s. w., so braucht man für die oben beschriebenen Kreis-Absteckuugen keine besonderen Instrumente zu bauen; denn der *gewöhnliche Sextant oder Prismenkreis* eignet sich vorzüglich zu dem angegebenen Zweck.

(Ausführliche Beschreibung dieser Instrumente findet man in des Verfassers „Grundzüge der astronomischen Zeit- und Orts-Bestimmung, Berlin 1885“, S. 154 u. ff.)

Für Landmesser, welche eines jener bekannten seemännischen bzw. astronomischen Instrumente nicht haben, ist ein kleines Prismen-Instrument zu empfehlen, welches, nach Angabe von Dr. *Decher*, von *Reinfelder & Hertel* in München unter dem Namen *Prismentrommel* geliefert wird (mit einer Schrift: „Die Prismentrommel“, ein Tascheninstrument zum Abstecken von Kreisbögen, München 1882).

Fig. 3.
Prismentrommel (Durchmesser = 6cm).

(Hannov. Sammlung, Mechaniker *Reinfelder & Hertel.*)

Wir geben in Fig. 3. die äussere Ansicht dieses Instrumentchens, wozu nur bemerkt wird, dass die *Reinfelder-Hertel*sche Anordnung *keine* Kreis-Teilung hat; die in Fig. 3. mit T bezeichnete Teilung, welche an dem Zeiger Z abgelesen wird (nur auf 1°, mit Schätzung von 0,1°) wurde von uns nachher zugefügt, und soll weniger zum eigentlichen Winkelmessen, als dazu dienen, dass man irgend eine Einstellung wenigstens näherungsweise bezeichnen und wiederherstellen kann.

Im übrigen haben wir zwei rechtwinklig gleichschenklige Prismen, ein oberes Q und ein unteres P, welche durch die Schraube H gegen einander gedreht werden können.

Zu der Theorie des Instrumentes übergehend, können wir bemerken, dass ein besonderer Fall desselben, das *Bauernfeind*sche *Prismenkreuz*, welches zum Abstecken von gestreckten Winkeln (180°) dient, bereits früher in Fig. 3. und 3a. S. 10 von uns behandelt worden ist.

Früher in § 6. S. 9 haben wir bewiesen, dass die Hypotenusen-Ebene eines gleichseitig rechtwinkligen Prismas für den Ein- und Austritt eines Lichtstrahls an den Katheten-Ebenen wie ein ebener Spiegel wirkt, welcher einen Strahl unter gleichen Winkeln einfallen und austreten lässt.

Fig. 4.

Nach diesen Vorbemerkungen liefert uns die vorstehende Fig. 4. S. 675 folgende Theorie:

Zwei Prismen $P P_1 P_2$ und $Q Q_1 Q_2$ sind übereinander gestellt, wobei die Hypotenusen $P_1 P_2$ und $Q_1 Q_2$ unter sich den Winkel ψ bilden. Von zwei entfernten Punkten L und R fallen Lichtstrahlen auf die Prismen, und zwar trifft der linke Strahl L das untere Prisma P, und der rechte Strahl R das obere Prisma Q. Die Strahlen L und R erleiden (entsprechend dem vorhin citierten Gesetze von Fig. 1. und Fig. 2. S. 9) durch die Prismen Brechungen und Reflexionen (die in Fig. 4. S. 675 *nicht im einzelnen* angegeben sind) und treten in der Richtung A *gemeinsam* aus, so dass ein in A befindliches Auge die beiden Punkte L und R in Deckung sieht.

Der Winkel, welchen die beiden von ferne herkommenden Strahlen L und R bilden, sei $= \varphi$, und der Winkel der beiden Hypotenusen-Ebenen ist $= \psi$; dann handelt es sich darum, zu zeigen, dass φ das doppelte von ψ ist.

Hiezu betrachten wir den Weg $L p A$ des linkseitigen Strahls, welcher im Innern des Prismas nicht wirklich, sondern fingiert ist, jedoch nach der früheren Fig. 1. S. 9 so, dass er der wirklichen Ablenkung entspricht, so dass die beiden Winkel α, welche die Strahlen Lp und pA mit der Normalen pp' zur Hypotenuse bilden, gleich sind. Ebenso verhält es sich beim andern Prisma mit β und β.

Nach diesem wird es keine Schwierigkeit mehr haben, aus Fig. 4. S. 675 die Gleichungen zu lesen:

$$\varphi + 2\alpha + 2\beta = 360° \quad \text{oder} \quad \varphi = 360° - (2\alpha + 2\beta)$$

$$\alpha' = 90° - \alpha \quad , \quad \beta' = 90° - \beta$$

$$\psi = \alpha' + \beta' = 180° - (\alpha + \beta) = \frac{\varphi}{2}.$$

Nachdem so bewiesen ist, dass der Prismenkreis oder die Prismentrommel Fig. 3. S. 675 zur Winkelmessung, bzw. Winkelabsteckung in freier Hand, ähnlich wie das Prismenkreuz oder wie der Winkelspiegel, gebraucht werden kann, ist auch einzusehen, wie nun ein Kreisbogen nach Fig. 2. S. 674 abgesteckt werden kann.

Das einzig missliche dabei ist nur, dass alle diese Verhältnisse nur für die *Ebene* gelten. Auf Gebirgsboden, wo es sich um die Horizontalwinkel zwischen verschieden geneigten Zielstrahlen handelt, kann man Reflexions-Instrumente nicht anwenden.

Für solche Fälle möchten wir am liebsten eine süddeutsche *Kegelkreuzscheibe* (vgl. die frühere Fig. 1. S. 5) anwenden, welche mit Teilung von etwa 2′ Genauigkeit versehen ist (sog. „Gradscheibe") oder besser noch, welche mit zwei fest einstellbaren Zielspalten zu versehen wäre.

Im Gebirge könnte man eine solche Einrichtung oft brauchen, weniger zur endgültigen Absteckung, als zur vorläufigen Aufsuchung eines zu bahnenden Weges, auf den dann die endgültige Kurve zu liegen kommt.

§ 183. Einrückungs-Verfahren und Näherungsformeln.

Unter Einrückungen versteht man solche, bei beschränktem Raum nützliche Absteckungs-Verfahren, bei welchen man sich möglichst wenig weit von dem Bogen entfernt, und, nach jeder Abweichung von dem Bogen, wieder möglichst nahe an denselben heranrückt.

1) Das einfachste Einrückungs-Verfahren besteht darin, dass man mit einem Winkelmess-Instrument ein regelmässiges Polygon absteckt, dessen Seiten Sehnen oder Tangenten des Kreises sind; diese Methode wird namentlich bei Kurventunneln angewendet.

2) Durch rechtwinklige Coordinaten werden zunächst von der Tangente AT aus zwei Punkte B und C abgesteckt (Fig. 1.), und zwar so, dass die Abstände AB und BC gleich sind. Wenn also $AB = BC = b$ die Bogenlänge ist, so hat man nach § 181. (6) und (7) S. 672:

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi = \frac{b}{r}\,\varrho & \\ AB' = r \sin \varphi = x & B'B = 2r \sin^2 \frac{\varphi}{2} = y \\ AC' = r \sin 2\varphi & C'C = 2r \sin^2 \varphi \end{array}\right\} \quad (1)$$

Fig. 1.*) Einrückung.

Es handelt sich nun darum, die neue Tangente $B''\,C$ in C zu bestimmen, und hiezu braucht man nur den kleinen Abstand $B'\,B''$. Betrachtet man das rechtwinklige kleine Dreieck $B\,B'\,B''$, so erkennt man, dass näherungsweise die Proportion besteht:

$$B'\,B'' : y = x : r$$

also:

$$B'\,B'' = \frac{x\,y}{r} \qquad (2)$$

Hat man auf diese Weise den Punkt B'' gefunden, so benützt man die Tangente $B''\,C\,T'$ ebenso weiter wie vorher die Tangente AT.

3) Noch mehr auf Näherung als das vorhergehende Verfahren, beruht die in Fig. 2. angedeutete Einrückung mit kurzen Strecken b und kleinen Abweichungen y.

Fig. 2. Näherungs-Einrückung.

Wir betrachten die unter sich gleich abstehenden Punkte $A\,B\,C\,D$, deren gegenseitiger Abstand $AB = b$ so klein sei (etwa $= 20^m$), dass man die Ordinate y_0 des Punktes B nach der früher in (4) § 181. S. 671 angegebenen Näherungsformel entwickeln kann, nämlich:

$$y_0 = \frac{b^2}{2r} \qquad (3)$$

Auch die Ordinate von C, in Bezug auf die Tangente in A als Abscisse, wird noch so berechnet, nämlich:

$$\text{Ordinate von } C = \frac{(2b)^2}{2r} = 2\,\frac{b^2}{r} = 4\,y_0$$

Nun lässt sich vollends einsehen, dass der in der Fig. 2. mit y bezeichnete Abstand des Punktes C von der Sehne AB, die Hälfte der soeben berechneten Ordinate von C ist, d. h.:

$$y = 2\,y_0 = \frac{b^2}{r} \qquad (4)$$

z. B. mit $b = 200^m$ und $r = 480^m$ hat man:

$$y_0 = 0{,}417^m \qquad y = 0{,}833^m$$

womit sich die ganze Absteckung durch aufeinander folgendes Einrücken ausführen lässt.

---

*) Nach *Bauernfeind* „Elemente der Vermessungskunde“, 6. Aufl. II. Bd., S. 63.

Man macht dieses am besten mit dem Messband, dabei stellt man den einen Bandstab in A auf, spannt das Band in der Tangentenrichtung aus und rückt um $y_0 = 0{,}417^m$ gegen B herein. Nachdem das Band um seine Länge weiter gezogen ist, steht der hintere Stab in B und der vordere zuerst in der Verlängerung von AB, worauf er um $y = 0{,}833^m$ hereingerückt wird. Das konstante Stück $y = 0{,}833^m$ kann man auf einem Stocke bezeichnen, um die Messlatte nicht jedesmal anlegen zu müssen.

Dieses Verfahren geht ungemein rasch von statten, nahezu mit derselben Geschwindigkeit, wie das gewöhnliche Messen, denn das Einrücken macht fast keine Mühe, und da man keinen andern Weg als den abzusteckenden Bogen selbst zu begehen hat, so ist das Verfahren in Wäldern, Kornfeldern etc. von hohem Wert.

Natürlich ist aber die *Fehlerfortpflanzung* eine ungünstige, es gelten hiefür die schon früher für Polygonzüge entwickelten Gesetze, und zwar ist nach (8) S. 328 der mittlere Querfehler nach n Einrückungen:

$$q = s\,\varepsilon\sqrt{\frac{n^3}{3}} = e\sqrt{\frac{n^3}{3}}$$

wenn nun $s\,\varepsilon = e$ den mittleren Fehler einer Einrückung bedeutet. Setzt man dieses $e = \pm 1^{cm}$, so findet man

Zahl der Einrückungen	$n =$	5	10	20
Mittlerer Fehler	$q =$	$\pm 6^{cm}$	$\pm 18^{cm}$	$\pm 52^{cm}$.

Hiernach ist zu beurteilen, ob das bequeme aber ungenaue Einrückungs-Verfahren im einzelnen Falle anzuwenden ist.

Verschiedene Näherungsformeln.

Wenn es sich um Abstecken von Bögen handelt, deren Länge verhältnismässig klein ist gegen den Halbmesser, oder wenn es nicht darauf ankommt, dass der abgesteckte Bogen genau ein *Kreis*bogen ist, so hält man sich häufig an die einfache Näherungsformel (4) § 181. S. 671, nämlich:

$$y = \frac{x^2}{2r} \tag{6}$$

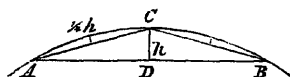
Die Pfeilhöhe eines flachen Bogens von der Länge l und dem Halbmesser r ist hiernach:

$$\text{Pfeilhöhe } h = \frac{l^2}{8r} \tag{7}$$

Die Pfeilhöhe wächst also mit dem Quadrat der Bogenlänge.

Hiemit kann man zwischen je 2 Punkte eines Bogens, welche den Abstand l haben, einen weiteren Punkt einschalten, sofern der Halbmesser r bekannt ist.

Auch wenn der Halbmesser nicht bekannt ist, lässt sich ein Kreisbogen abstecken durch Anwendung der auf die Näherungsformel (7) gegründeten sogenannten „*Viertelsmethode*“.

Fig. 3.
Viertelsmethode.

Um über der Sehne AB (Fig. 3.) einen flachen Bogen von der Höhe $CD = h$ zu konstruieren, nimmt man $^1/_4 h$ als Pfeilhöhe für die Sehnen AC und CB u. s. f.

Sind also drei Punkte ABC eines Kreises gegeben, so kann man weitere Punkte einschalten, ohne den Halbmesser zu kennen.

Ferner lässt sich hiemit über jeder Sehne AB ein Bogen von beliebiger Pfeilhöhe h abstecken.

§ 184. Verschiedene Bestimmungsarten für Kreisbögen und Tangenten.

Nachdem in den bisherigen § 179. bis § 183. im wesentlichen solche Absteckungen behandelt worden sind, bei welchen zuerst die Tangenten und dann die Bögen ins Feld gebracht werden, gehen wir nun, entsprechend der in § 178. S. 661 unter II. gemachten Einteilung, zunächst zu dem entgegengesetzten Verfahren über, wonach zuerst die Bögen abgesteckt und dann die Geraden berührend angelegt werden.

I. Es sind zwei Punkte A und B im Felde abgesteckt, es soll ein Bogen von gegebenem Halbmesser durch diese Punkte geführt werden. (Fig. 1.)

Fig. 1.

Man kann diese Aufgabe auf verschiedene Art lösen:

1) Das zuerst sich darbietende Verfahren gründet sich auf den Satz der konstanten Peripheriewinkel. Man stellt in A einen Theodolit auf, richtet denselben zuerst auf B ein, und weist mit fortgesetztem Drehen um einen konstanten Winkel δ weitere Punkte C, D u. s. w. ein. Wenn hiebei der Sehnenabstand $BC = CD = s$ ist und der Halbmesser $= r$, so hat man nach (1) § 182. S. 673:

$$sin\, \delta = \frac{s}{2\,r} \tag{1}$$

2) Wenn in Fig. 2. die zwei Punkte $A\,B$ gegeben sind, so kann man auch mit einem wandernden Winkelmess-Instrument auf dem Kreise herumgehen, und so die Punkte C, D u. s. w. mit dem konstanten Winkel α abstecken. Um den Wert dieses Winkels zu bestimmen, muss man die Sehne $A\,B$ messen, und hat dann für einen Halbmesser r:

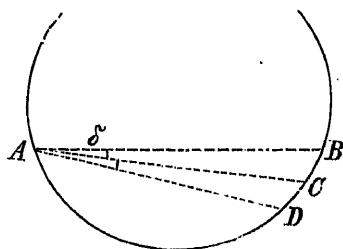
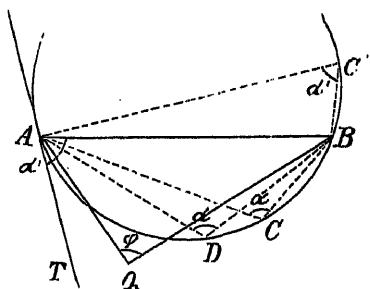
Fig. 2.

$$sin\, \alpha = sin\, \alpha' = \frac{A\,B}{2r} \tag{2}$$

damit kann man auch die Tangenten abstecken, wie in Fig. 2. durch $A\,T$ mit dem Winkel $B\,A\,T = \alpha'$ angedeutet ist.

Wenn das Messen der Sehne $A\,B$ nicht unmittelbar angeht, so kann man einen Hilfspunkt Q (Fig. 2.) annehmen und durch Messung der Entfernungen $Q\,A$ und $Q\,B$, sowie des Winkels $A\,Q\,B = \varphi$, die Entfernung $A\,B$ mittelbar bestimmen nach der Formel:

$$A\,B = \sqrt{Q\,A^2 + Q\,B^2 - 2\,Q\,A \times Q\,B\, cos\, \varphi} \tag{3}$$

3) *Näherungs Verfahren.* Wenn man, nach Andeutung von Fig. 3. S. 680 einen Punkt Q gefunden hat, welcher *nahezu* auf dem Kreise liegt, so kann man von hier aus einen Kreispunkt P bestimmen in folgender Weise:

Man misst den Winkel φ genau, und sieht zu, ob er dem Winkel γ gleich ist, wobei γ in Fig. 3. dieselbe Bedeutung hat wie α in (2) S. 679, nämlich:

$$\sin \gamma = \frac{A\,B}{2\,r} \tag{4}$$

Der genau gemessene Winkel φ gebe gegen diesen berechneten Winkel γ die Differenz ε:

$$\gamma - \varphi = \varepsilon \tag{5}$$

Dann berechnet man:

$$Q\,P = A\,Q\,\frac{\sin \varepsilon}{\sin \gamma} \tag{6}$$

In gleicher Weise könnte man auch einen Punkt P' auf $Q\,A$ bestimmen.

Fig. 3.

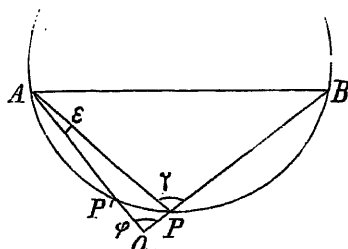
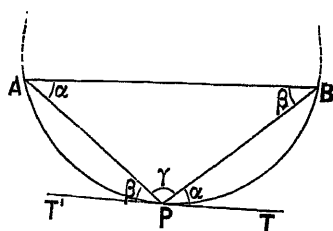



Fig. 4.

Auch die Tangenten-Richtung in P kann man auf diesem Wege finden, denn es ist nach Fig. 4.:

$$\sin \alpha = \frac{B\,P}{A\,B} \sin \gamma \quad , \quad \sin \beta = \frac{A\,P}{A\,B} \sin \gamma \tag{7}$$

Hat man so den Winkel α oder β bestimmt, so kann man damit die Tangente $T\,P\,T'$ in Fig. 4. anlegen.

II. Es ist (nach Andeutung von Fig. 5.) eine Gerade $A\,B$ und ein ausserhalb derselben liegender Punkt C im Feld abgesteckt; es soll ein Bogen von gegebenem Halbmesser r so gelegt werden, dass er die Gerade berührt, und durch den gegebenen Punkt geht. Es kommt zuerst darauf an, den Berührungspunkt T zu bestimmen. Hiezu fällt man von C eine Senkrechte $C\,D$ auf die Tangente $A\,B$; und wenn man $T\,D = x$ setzt, so besteht die Gleichung:

Fig. 5.
$TD = x \quad , \quad DC = y$

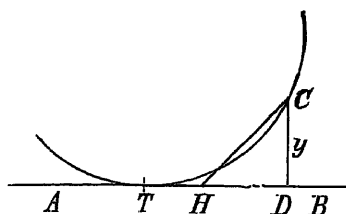
$$r^2 = (r - y)^2 + x^2$$

wonach man berechnet:

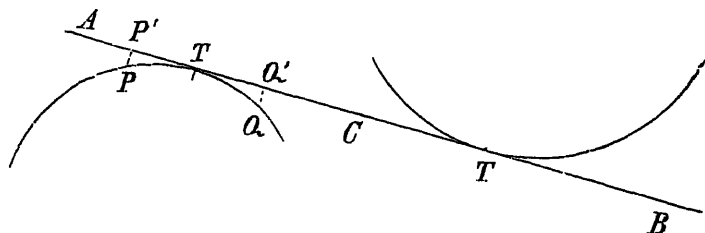
$$x = \sqrt{y\,(2\,r - y)} = D\,T \tag{8}$$

damit kann der Punkt T von D aus abgesteckt werden.

Wenn das unmittelbare Fällen der Senkrechten $C\,D$ oder das Messen von $D\,T$ nicht thunlich ist, so kann man einen Hilfspunkt H nehmen, und nach Andeutung von Fig. 5. das rechtwinklige Hilfsdreieck $H\,C\,D$ durch Messung der Hypotenuse $H\,C$ und des Winkels $C\,H\,D = \alpha$ bestimmen, wornach ist:

$$H\,D = H\,C \cos \alpha \qquad C\,D = H\,C \sin a = y$$

Darauf lässt sich die Formel (8) anwenden, und das Einmessen der Strecke $HT = x - HD$, von H aus, bestimmt den Berührungspunkt T.

III. *Anlegen der Tangenten.* Wenn in der soeben beschriebenen Weise die Kreisbögen ganz oder teilweise *vor* den Geraden abgesteckt sind, so entsteht noch die Aufgabe, die Geraden nachher berührend anzulegen. Diese Aufgabe kann lediglich empirisch gelöst werden, wie in Fig. 6. angedeutet ist.

Fig. 6.
Gemeinsame Tangente TT'.

Wenn nach Fig. 6. zwei Bögen im Felde bereits abgesteckt sind, und eine gemeinsame Tangente TT' gesucht wird, so überzeugt man sich zuerst, an welchen Stellen T und T' ungefähr die Berührungen stattfinden werden; daselbst steckt man die Bögen sehr dicht, etwa von 5^m zu 5^m, bei scharfen Krümmungen nötigenfalls von 2^m zu 2^m ab, und weist die Gerade AB durch Probieren von A oder B aus, vielleicht auch mittelst eines Theodolits von einem Zwischenpunkte C aus, ein.

Wenn man nicht nur die Tangentenlagen selbst, sondern auch die Berührungs*punkte* genau haben will, so kann man die Ordinaten benachbarter Punkte benützen, d. h. man berechnet: $P'T = \sqrt{PP'(2r - PP')}$ $\quad Q'T = \sqrt{QQ'(2r - QQ')}$
womit der Punkt T doppelt bestimmt ist.

§ 185. Absteckung nach einem allgemeinen Coordinatensystem.

Bei den kleinen Beispielen, die wir im bisherigen behandelt haben, wurden rechtwinklige Coordinaten nur in Bezug auf einzelne Tangenten als Hauptaxen u. dergl. benützt; man kann aber eine zusammenhängende Trassierungs-Arbeit mit Vorteil auch an ein allgemeines Landesvermessungs-Coordinatensystem anschliessen.

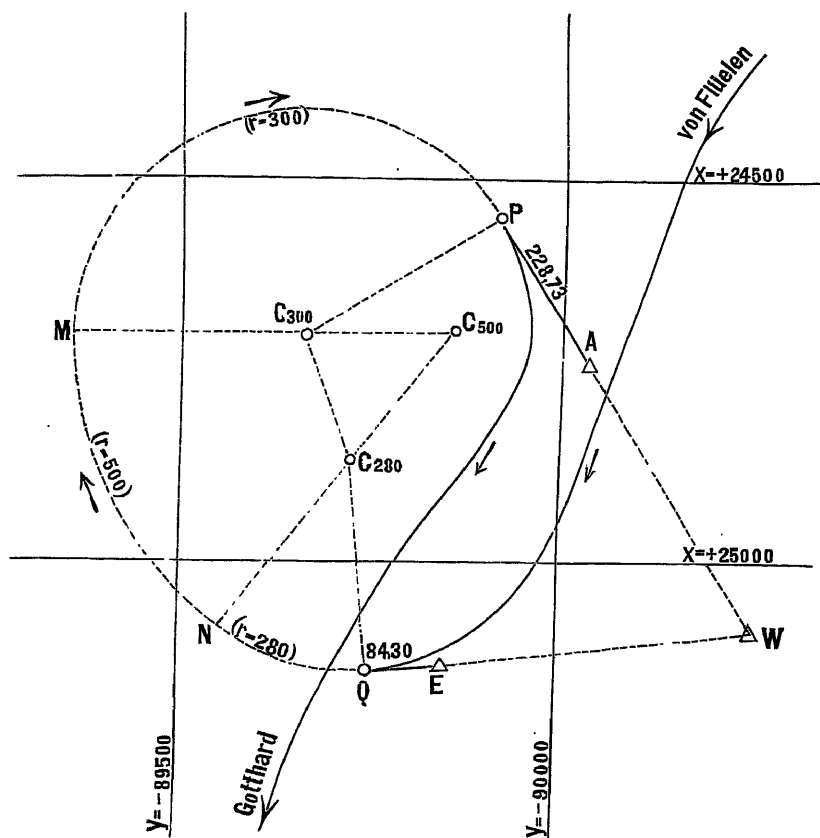
Teils um dieses zu zeigen, teils um auch in anderer Beziehung noch ein zusammengesetztes Beispiel vorzuführen, geben wir in der nachstehenden Fig. 1. S. 682 die Absteckung des Pfaffensprung-Kehrtunnels der Gotthardbahn bei Wasen, nach einer Mitteilung: „Über die Bestimmung der Absteckungs-Elemente für die sieben Kehrtunnels der Gotthardbahn, von Dr. *C. Koppe*“, Separatabdruck aus der „Eisenbahn“, Band XIII, Nr. 6. und 7. vom 7. und 14. August 1880. Das dabei benützte Coordinaten-System ist das schweizerische, mit dem Coordinaten-Ursprung Bern, mit $+x$ nach Süden, $+y$ nach Westen, und entsprechender Azimut-Zählung von Süd über West (vgl. das badische System, S. 186, Fig. 2.).

Die nachstehende Fig. 1. S. 682 zeigt zunächst den Verlauf der Trasse im allgemeinen: die offene Bahn kommt nördlich von Flüelen her zu der Tunnelmündung Q. Die Linie $QNMP$ ist Tunnel, und von P wendet sich die Bahn wieder offen nach Süden, dem Gotthard zu.

Die Tunneltrasse, mit der wir uns hier beschäftigen wollen, besteht aus drei verschiedenen Bögen:

$$\left.\begin{array}{llll} QN & \text{mit dem Halbmesser} & r = 280^m \\ NM & \;\;„ \quad „ \quad „ & r = 500^m \\ MP & \;\;„ \quad „ \quad „ & r = 300^m \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Zur weiteren Bestimmung dienen die Tangenten in Q und P, welche sich in W schneiden; und auf diesen Tangenten sind zwei Punkte E (in der Nähe des Eingangs) und A (in der Nähe des Ausgangs) fest bezeichnet.

Fig. 1.
Pfaffensprung-Kehrtunnel der Gotthard-Bahn bei Wasen.
Massstab 1 : 10 000 ($1^{cm} = 100^{cm}$).

Die drei Punkte W, E und A sind durch eine Triangulierung an das allgemeine Coordinatensystem angeschlossen, und haben folgende Coordinaten:

	y	x
W	$-90259,848^m$	$+25095,146^m$
E	$-89838,163$	$+25139,362$
A	$-90041,229$	$+24740,765$

(2)

Die Punkte Q und P sind durch Einmessen auf den Tangenten WEQ und WAP bestimmt, mit den Massen:

$$EQ = 84{,}30^m \qquad AP = 228{,}73^m \tag{3}$$

Dadurch ist alles bestimmt, und die Rechnung kann beginnen.

Man berechnet aus den Coordinaten von W, E und A nach (2) S. 682 zuerst die zwei Azimute und den Tangentenwinkel:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Azimut } (WE) = 84^\circ\ \ 0'\ 50{,}7'' \\ \text{Azimut } (WA) = 148^\circ\ 19'\ 45{,}9''\end{array} \quad \text{Winkel } EWA = 64^\circ\ 18'\ 55{,}2''\right\} \tag{4}$$

Mit diesen Azimuten und den zwei gemessenen Längen EQ und AP nach (3) berechnet man auch die Coordinaten von Q und P:

	y	x	
Q	$-89754{,}323$	$+25148{,}153$	(5)
P	$-89921{,}138$	$+24546{,}097$	(6)

Da QC als Halbmesser rechtwinklig auf der Tangente QW steht, und gleiches bei P stattfindet, erhält man aus (4) auch die Azimute von Q und P nach den Mittelpunkten, nämlich:

$$\text{Azimut } (QC_{280}) = 174^\circ\ \ 0'\ 50{,}7'' \quad \text{mit} \quad QC_{280} = 280^m \tag{7}$$

$$\text{Azimut } (PC_{300}) = 58^\circ\ 19'\ 45{,}9'' \quad \text{mit} \quad PC_{300} = 300^m \tag{8}$$

Dieses führt auch auf die Coordinaten der beiden Mittelpunkte:

	y	x	
C_{280}	$-89725{,}123$	$+24869{,}680$	(9)
C_{300}	$-89665{,}814$	$+24703{,}607$	(10)

Hieraus wieder Azimut und Entfernung von C_{280} nach C_{300}:

$$\text{Azimut} \quad (C_{280}\,C_{300}) = 160^\circ\ 20'\ 49{,}3'' \tag{11}$$

$$\text{Entfernung} \quad C_{280}\,C_{300} = 176{,}346 \tag{12}$$

Nun hat man in dem Dreieck $C_{280}\,C_{300}\,C_{500}$ alle drei Seiten gegeben, man kann daher auch die Winkel dieses Dreiecks berechnen:

$$\begin{array}{rl} C_{300}\,C_{280} = 176{,}346 = a \ , & s - a = 121{,}827 \\ 500 - 300 = C_{300}\,C_{500} = 200{,}000 = b \ , & s - b = 98{,}173 \\ 500 - 280 = C_{280}\,C_{500} = 220{,}000 = c \ , & s - c = 78{,}173 \\ \hline 2s = 596{,}346 & 298{,}173 \\ s = 298{,}173 & \end{array}$$

Nach bekannten Formeln giebt dieses weiter berechnet:

$$\begin{array}{rl} \alpha = \text{Winkel } C_{500} = & 49^\circ\ 22'\ 15{,}2'' \\ \beta = & 59\ \ \ 23\ \ \ 59{,}2 \\ \gamma = & 71\ \ \ 13\ \ \ 45{,}6 \\ \hline & 180^\circ\ \ 0'\ \ 0{,}0'' \end{array} \tag{13}$$

Mit diesen Winkeln und den Azimuten (7), (8) und (11) berechnet man weiter:

$$\begin{array}{rl} \text{Azimut } (C_{280}\,C_{300}) = & 160^\circ\ 20'\ 49{,}3'' \\ +\beta = & +\ 59^\circ\ 23'\ 59{,}2'' \\ \hline (C_{280}\,C_{500}) = (NC_{280}) = & 219^\circ\ 44'\ 48{,}5'' \\ \text{nach (7) } (Q\,C_{280}) = & 174^\circ\ \ 0'\ 50{,}7'' \\ \hline \text{Winkel } C_{280} = & 45^\circ\ 43'\ 57{,}8'' \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Azimut } (C_{300}\,C_{280}) = & 340^\circ\ 20'\ 49{,}3'' \\ -\gamma = & -\ 71^\circ\ 13'\ 45{,}6'' \\ \hline (C_{300}\,C_{500}) = (MC_{300}) = & 269^\circ\ \ 7'\ \ 3{,}7'' \\ \text{nach (8) } (PC_{300}) = & 58^\circ\ 19'\ 45{,}9'' \\ \hline \text{Winkel } C_{300} = & 149^\circ\ 12'\ 42{,}2'' \end{array} \tag{14}$$

Nun haben wir in (13) und (14) die Centriwinkel der drei Tunnelbögen, mit denen man dann auch die Bogenlängen berechnen kann, wie folgende Zusammenstellung zeigt:

Bogen	*Mittelpunkt*	*Centriwinkel*	*Halbmesser*	*Bogenlänge*
QN	C_{280}	45° 43′ 57′8″	280^m	223,492^m
NM	C_{500}	49° 22′ 15,2″	500^m	430,842^m
MP	C_{300}	149° 12′ 42,2″	300^m	781,271^m
		244° 18′ 55,2″		1435,605^m

Die Summe der drei Centriwinkel giebt die Rechenprobe, dass sie mit dem Tangentenwinkel nach (4) S. 683, nämlich 64° 18′ 55,2″ auf 180° stimmen muss, was hier der Fall ist.

Nun hat man am Tunnel-Eingang bei Q die Tangenten-Richtung QE und ebenso beim Ausgang PA. Im Innern des Tunnels hat man die Halbmesser, Centriwinkel und Bogenlängen, und damit kann die Absteckung gemacht werden.

§ 186. Verschiedene Wahl der Bestimmungs-Punkte und Bestimmungs-Tangenten.

Die Bestimmungs-Punkte für eine abzusteckende *Gerade* wählt man natürlich möglichst an den Endpunkten der Geraden.

Weniger einfach ist die Frage zu beantworten, in welcher Weise die Bestimmungs-Punkte oder Bestimmungs-Tangenten für die Absteckung eines *Kreisbogens* zu wählen sind, damit die unvermeidlichen Fehler dieser Bestimmungen möglichst wenig Einfluss auf die Bogen-Absteckung erlangen.

Den richtigen Halbmesser wird ein abgesteckter Bogen immer hinreichend genau bekommen, denn diesen Halbmesser legt man der Absteckung unmittelbar als genaue *Zahlen*-Angabe zu Grunde; auch Längenmessungen und Winkelmessungen können im Felde immer genügend genau ausgeführt werden; dagegen können die von dem *Plan* ins Feld übertragenen bestimmenden Punkte und Tangenten, womit wir uns hier beschäftigen, verhältnismässig viel fehlerhafter sein. Es entsteht daher die Frage, welche Abweichungen stattfinden zwischen zweien Kreisbögen, deren Halbmesser gleich sind, welche aber verschiedene Lage haben.

Die grösste Abweichung findet statt auf der Central-Linie beider Kreise, und sie ist gleich dem Abstand der beiden Kreismittelpunkte. Wir werden deshalb zuerst die durch fehlerhafte Lage der bestimmenden Punkte oder Tangenten erzeugte Verschiebung des *Kreismittelpunktes* hier untersuchen.

Es kommt dabei wesentlich auf den Tangentenwinkel an; denn wenn dieser $= 0$ ist, d. h. wenn die Tangenten parallel sind, versagt die Absteckung von den Tangenten aus völlig, wie wir schon am Schlusse von § 180. S. 670 eingesehen haben.

Dieses führt dazu, zunächst die Verdrehung einer bestimmenden Tangente zu untersuchen.

Nach Andeutung von Fig. 1. S. 685 seien SA und SB zwei Tangenten, zwischen welchen ein Bogen vom Halbmesser r berührend angelegt werden soll.

Wenn die linksseitige Tangente SA zwar durch den richtigen Punkt T geht, aber um den kleinen Winkel δ verdreht ist, so dass sie statt AS die Lage $A'S'$ bekommt, so wird dadurch der Kreismittelpunkt M doch nicht erheblich ungenau be-

stimmt, wie schon daraus zu ersehen ist, dass in Fig. 1. eine sehr übertrieben grosse Verdrehung angenommen werden musste, um die Mittelpunkts-Verschiebung MM' überhaupt in einer Figur deutlich darstellen zu können.

Um die Mittelpunkts-Verschiebung MM' durch Rechnung zu bestimmen,

Fig. 1.

Verdrehung einer Tangente um den Winkel $\alpha' - \alpha = \delta$.

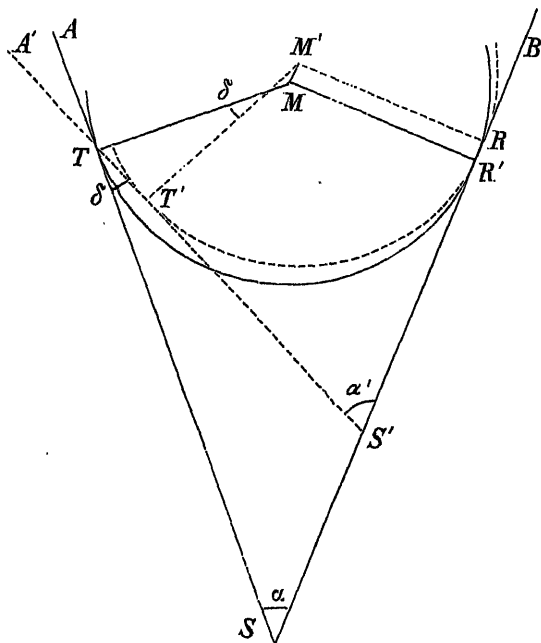
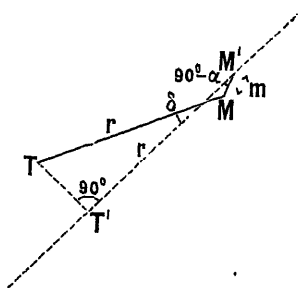



Fig. 2.

betrachten wir das verschränkte Viereck $T\,T'\,M'\,M$, welches bei T' rechtwinklig ist. Dieses Viereck wurde in Fig. 2. besonders gezeichnet.

Hierin ist $MT = M'\,T' = r$, und der Winkel $M\,M'\,T'$ ist hinreichend genau $= 90° - \alpha$ (eigentlich $= 90° - \alpha' = 90° - (\alpha + \delta)$); wenn man daher das Viereck auf die Seite $M'\,T'$ projiziert, so erhält man:

$$M\,M' \cos(90° - \alpha) + M\,T \cos \delta = M'\,T'$$

oder mit $M\,T = M'\,T' = r$ und $M\,M' = m$:

$$m \sin \alpha + r \cos \delta = r \quad , \quad m = \frac{r}{\sin \alpha}(1 - \cos \delta)$$

Wenn man $\cos \delta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\delta}{2}$ setzt, so erhält man:

$$m = 2 \frac{r}{\sin \alpha} \sin^2 \frac{\delta}{2} \tag{1}$$

Setzt man z. B. $\delta = 1°$, ferner $\alpha = 90°$ und $r = 500^m$, so erhält man:

$$m = 0{,}076^m$$

Die Mittelpunkts-Verschiebung m ist also hier verhältnismässig sehr klein.

Nur wenn α ein sehr spitzer Winkel ist, wird die Verschiebung m beträchtlich, und wenn $\alpha = 0$ wird, so wird sogar $m = \infty$, womit die schon vorher erkannte Thatsache bestätigt wird, dass bei parallelen Tangenten SA und SB die ganze Bestimmung unbrauchbar wird.

Wichtiger als die Verdrehung einer Tangente um den Berührungspunkt, ist die Parallelverschiebung (Fig. 3.). Der Einfluss einer solchen Parallelverschiebung ist leicht zu beurteilen, denn man überzeugt sich, dass in diesem Falle die Mittelpunkts-Verschiebung MM' gleich ist der Verschiebung SS' des Tangentenschnittes, und zwar, sowohl wenn nur *eine* Tangente eine Querverschiebung hat, als auch wenn beide Tangenten solche Querverschiebungen erfahren haben. Wenn u und v die Querverschiebungen beider Tangenten sind, so erhält man nach Fig. 3. die Verschiebung SS' als Diagonale eines Parallelogramms, dessen Seiten bzw. $\frac{u}{\sin \alpha}$ und $\frac{v}{\sin \alpha}$ sind, und dessen Winkel $= \alpha$ ist, es ist deswegen:

Fig. 3.
Parallelverschiebungen der Tangenten.

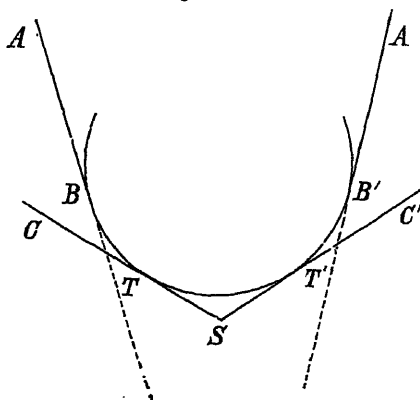
$$MM' = SS' = \frac{\sqrt{u^2 + v^2 + 2\,u\,v\cos\alpha}}{\sin\alpha} \qquad (3)$$

Wenn man hier, als besonderen Fall, $v = u$ setzt, und dabei $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$ berücksichtigt, so geht der Ausdruck (3) nach einiger Reduktion über in:

$$MM' = \frac{u}{\sin\frac{\alpha}{2}} \qquad (4)$$

wie sich auch unmittelbar einsehen lässt.

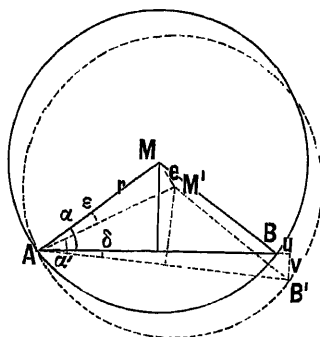
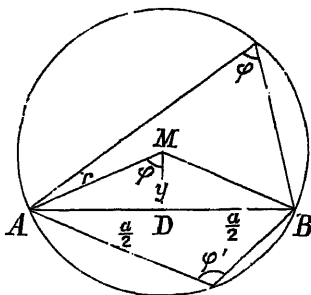
Da sowohl $\sin\alpha$, als auch $\sin\frac{\alpha}{2}$, im allgemeinen kleiner als 1 ist, und nur $\sin 90°$ nicht kleiner als 1 ist, so folgt aus (3) und (4), dass die Tangenten-Verschiebungen u und v im allgemeinen vergrössert auf die Mittelpunkts-Verschiebung übergehen, und da mit $\alpha = 0$ die Verschiebung $MM' = \infty$ wird, so wird man abermals darauf hingeführt, keinen sehr spitzen Tangentenschnitt zuzulassen.

Fig. 4.
Ersatz-Tangenten SC und SC'.

Wenn daher, entsprechend Fig. 4., zwei Tangenten AB und $A'B'$, welche sich unter spitzem Winkel schneiden würden, als Bestandteile der Trasse abgesteckt werden müssen, so soll man dennoch diese Tangenten nicht als Bestimmungsstücke für den Bogen nehmen, sondern zwei andere Tangenten SC und SC' nehmen, welche nicht selbst Bestandteile der Trasse werden sollen, welche sich aber unter günstigem stumpfem Winkel schneiden. Die Tangenten AB und $A'B'$ sind in diesem Fall *nachher* anzulegen (wie in § 184. Fig. 6. S. 681 gezeigt wurde).

Wir gehen über zu dem Fall, dass ein Kreis durch *zwei Punkte* bestimmt wird, und überlegen, wie diese Punkte liegen müssen, wenn die Kreisbestimmung gut sein soll.

Wir betrachten zu diesem Zwecke im Anschluss an Fig. 5. und Fig. 6. den Fall, dass einer der beiden Bestimmungs-Punkte sich von B nach B' verschiebt; und wir denken die Verschiebung BB' in zwei Teile u und v zerlegt, wovon u in der Geraden AB und v rechtwinklig hiezu liegt.

Fig. 5. Fig. 6.

Kreisbestimmung durch zwei Punkte A und B, mit Verschiebungen u, v.

Die Mittelpunkts-Verschiebung ist nach Fig. 6.:

$$MM' = e = r\,\varepsilon \tag{5}$$

wobei ε bestimmt wird durch:

$$\alpha + \delta = \alpha' + \varepsilon \quad , \quad \varepsilon = \delta + (\alpha - \alpha') \tag{6}$$

Hierin ist δ die Verdrehung der Geraden AB, entsprechend der Querverschiebung v, also mit $AB = a$:

$$\delta = \frac{v}{a} \tag{7}$$

Der zweite Teil von (6), die Differenz $(\alpha - \alpha')$, kann als Differential von α berechnet werden; es ist zuerst:

$$\cos\alpha = \frac{a}{2\,r}$$

Dieses giebt differentiiert:

$$-\sin\alpha\, d\alpha = \frac{d\,a}{2\,r}$$

$$(\alpha' - \alpha) = d\alpha = -\frac{d\,a}{2\,r\sin\alpha} = -\frac{u}{2\,r\sin\alpha} \tag{8}$$

Man hat also jetzt aus (6), (7) und (8):

$$\varepsilon = \frac{v}{a} + \frac{u}{2\,r\sin\alpha}$$

Hiebei ist $\frac{a}{2} = r\sin\varphi$, $\sin\alpha = \cos\varphi$, also $e = r\,\varepsilon$ nach (5):

$$e = \frac{v}{2\sin\varphi} + \frac{u}{2\cos\varphi} \tag{9}$$

Wenn u und v als *mittlere* Verschiebungen mit unbestimmten Vorzeichen $\pm$ eingeführt werden, so erhält man auch die *mittlere* Verschiebung e durch die Gleichung:

$$e^2 = \frac{v^2}{4\sin^2\varphi} + \frac{u^2}{4\cos^2\varphi} = \frac{1}{4}\,\frac{v^2\cos^2\varphi + u^2\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi} \tag{10}$$

Setzt man $\pm u = \pm v = \pm \frac{m}{\sqrt{2}}$, so wird:

$$c^2 = \frac{m^2}{8} \frac{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} = \frac{m^2}{2} \frac{1}{\sin 2\varphi} \tag{11}$$

Dieses gilt für die Verschiebung *eines* Punktes B (Fig. 6. S. 687).

Werden *beide* Punkte, A und B, verschoben, so wird statt (9) zu setzen sein:

$$e = \frac{1}{2}\left(\frac{\pm v \pm v'}{\sin \varphi} \pm \frac{\pm u \pm u'}{\cos \varphi}\right)$$

und dieses giebt, weiter behandelt, statt (11) die Gleichung:

$$e = \frac{m}{\sin 2\varphi} \tag{12}$$

Hier ist $\pm m$ die mittlere Verschiebung (nach irgend welcher Richtung) der Punkte A und B, und e die entsprechende Verschiebung des Kreismittelpunktes.

Man sieht aus (12), dass e im allgemeinen grösser als m ist, dass sich also die Punktunsicherheiten von A und B auf den Mittelpunkt M *vergrössert* übertragen. Nur in einem Falle wird $e = m$, wenn $2\varphi = 90°$, $\varphi = 45°$.

Die Absteckung eines Kreises aus zwei gegebenen Punkten A und B wird also dann am günstigsten, wenn die beiden Punkte einen Quadranten zwischen sich fassen.

Die Formeln (4) und (12), welche bzw. den Einfluss fehlerhafter Lagen bestimmender *Tangenten* und bestimmender *Punkte* angeben, haben gleiche algebraische Form, es lässt sich daher hiernach nicht angeben, ob es im allgemeinen nützlicher ist, Tangenten oder Punkte vom Plan in das Feld zu übertragen; da aber die Übertragung einer Tangente wegen der Versicherung durch *mehrere* Tangentenpunkte genauer ausgeführt werden kann, als die Übertragung eines Punktes, so ist doch die Kurvenbestimmung durch Tangenten nicht ohne besondere Gründe zu verlassen.

Zusammenfassung der Ergebnisse von § 186.

Wenn ein Kreisbogen durch zwei Endtangenten bestimmt wird, so sollen diese sich nicht unter einem spitzen Winkel schneiden; ist der Schnittwinkel erheblich kleiner als 90°, so muss eine andere Bestimmungsart, etwa nach Fig. 4. S. 686, gewählt werden.

Bei den bestimmenden Tangenten kommt es hauptsächlich auf die *Lage* in der Nähe der Berührungsstelle an, *Verdrehungen* der Tangenten haben wenig Einfluss auf die Lage des Bogens.

Die Bestimmung eines Bogens durch zwei *Tangenten* ist im allgemeinen der Bestimmung durch zwei *Punkte* vorzuziehen; werden zwei Punkte gewählt, so soll ihr Bogenabstand möglichst nahe ein Quadrant sein.

Eine Untersuchung über den Fehler-Einfluss der Kreis-Tangenten wurde von *Helmert* mitgeteilt in der „Zeitschr. des Hannov. Arch.- u. Ing.-Vereins, Band 21, 1875," Heft 3. (Über die günstigste Wahl der Kardinalpunkte bei dem Abstecken einer Trasse.)

§ 187. Übergangskurven.

Ein aus Geraden und Kreisbögen zusammengesetzter Linienzug ist weder eine stetige Kurve, noch überhaupt eine flüssige, den Ansprüchen des Eisenbahn-Betriebs genügende Linie. Ein Hauptübelstand dabei ist die Unmöglichkeit, am Übergang des

Bogens in die Gerade die richtige, der Krümmung entsprechende Überhöhung des äusseren Schienenstrangs herzustellen. Diesem Übelstand wird dadurch abgeholfen, dass zwischen die Gerade und den Kreisbogen eine beiderseits berührende Kurve eingeschaltet wird, welche sich mit der Krümmung Null an die Gerade anlegt, und mit stetig wachsender Krümmung den Übergang zu der Krümmung des Kreisbogens vermittelt; dadurch wird erreicht, dass die Bahn in jedem Punkte eine der Krümmung entsprechende Überhöhung des äusseren Schienenstranges erhalten kann.

Um eine Beziehung zwischen der Überhöhung z des äusseren Schienenstrangs und dem Krümmungs-Halbmesser R der Bahn zu finden, betrachten wir in Fig. 1. den Querschnitt der Bahn, nebst einem darauf laufenden Räderpaar. Die Schienen seien A und B, und zwar ist B um z über A erhöht, so dass die Neigung α gegen den Horizont entsteht.

Fig. 1.

Wenn M die Masse des Fahrzeugs ist, so ist das nach unten wirkende Gewicht $= Mg$, wobei g die Beschleunigung der Schwere ist. Wenn ferner v die Fahrgeschwindigkeit ist, so ist die nach aussen horizontal wirkende Centrifugalkraft $= \frac{Mv^2}{R}$. Durch Projektion der Kräfte Mg und $\frac{Mv^2}{R}$ auf die Richtung AB bekommt man die Bedingung des Gleichgewichts:

$$\frac{Mv^2}{R} \cos\alpha = Mg \sin\alpha \tag{1}$$

Wenn w die Spurweite der Bahn ist, so hat man $\sin\alpha = \frac{z}{w}$, und $\cos\alpha$ kann hinreichend genau $= 1$ gesetzt werden; damit giebt die Gleichung (1):

$$\frac{v^2}{R} = \frac{g\,z}{w} \tag{2}$$

Nun wird die Bahnkurve im *Grundriss* betrachtet, und auf ein rechtwinkliges Coordinaten-System x , y bezogen, dessen x-Axe die Tangente ist, an welche sich die Kurve berührend anlegen soll, und dessen Ursprung der Berührungspunkt zwischen der Tangente und der Kurve ist.

In der nachher zu benützenden Fig. 2. S. 691 ist AKB die fragliche Kurve; wir denken uns A als Coordinaten-Ursprung, die Tangente AQ als x-Axe und die Ordinaten y rechtwinklig hiezu.

Es wird nun zur weiteren Bestimmung der Kurve die (willkürliche) Annahme gemacht, dass die Überhöhung z des äusseren Schienenstrangs, vom Berührungspunkt A der Kurve mit der Geraden an gezählt, *gleichförmig* wachse, d. h.

$$z : s = 1 : n \tag{3}$$

wo s die Kurvenlänge vom Berührungspunkt an gezählt, und $1 : n$ das Steigungs-Verhältnis ist.

Zugleich machen wir aber die weitere Näherungs-Annahme, die Kurve soll so *flach* sein, dass die Bogenlänge s gleich der Abscisse x angenommen werden kann, d. h. wir schreiben statt (3) die neue Gleichung:

$$z : x = 1 : n \tag{4}$$

Für eine so flache Kurve hat auch der Krümmungs-Halbmesser R eine sehr einfache genäherte Formel, nämlich:

$$R = \frac{1}{\frac{d^2 y}{d x^2}} \tag{5}$$

Zur Begründung der bei (4) und (5) gemachten Näherungen ist daran zu erinnern, dass die genauen Ausdrücke für s und R bekanntlich sind:

$$s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{d y}{d x}\right)^2} d x \qquad R = \frac{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{d y}{d x}\right)^2\right)^3}}{\frac{d^2 y}{d x^2}}$$

es ist deshalb in (4) und (5) gemeinsam die Annahme gemacht $\left(\frac{d y}{d x}\right)^2 = 0$.

Aus (2), (4) und (5) erhält man:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{g}{n w v^2} x \tag{6}$$

Man setzt nun zur Abkürzung:

$$\frac{n w v^2}{g} = q \tag{7}$$

Damit wird (6):

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{x}{q} \tag{8}$$

Dieses ist die Differentialgleichung der Übergangskurve.

Wenn man diese Gleichung zweimal integriert, und bedenkt, dass für $x = 0$ sowohl $y = 0$ als auch $\frac{d y}{d x} = 0$ sein soll, so erhält man:

$$\frac{d y}{d x} = \frac{x^2}{2 q} \tag{9}$$

$$y = \frac{x^3}{6 q} \tag{10}$$

Die Konstante q, welche nach (7) namentlich von der Fahrgeschwindigkeit v abhängt, bestimmt die Übergangskurve vollständig; einige Zahlenwerte hiefür sind berechnet mit $w = 1{,}5^m$ und $g = 9{,}81^m$, wie folgende Tabelle zeigt:

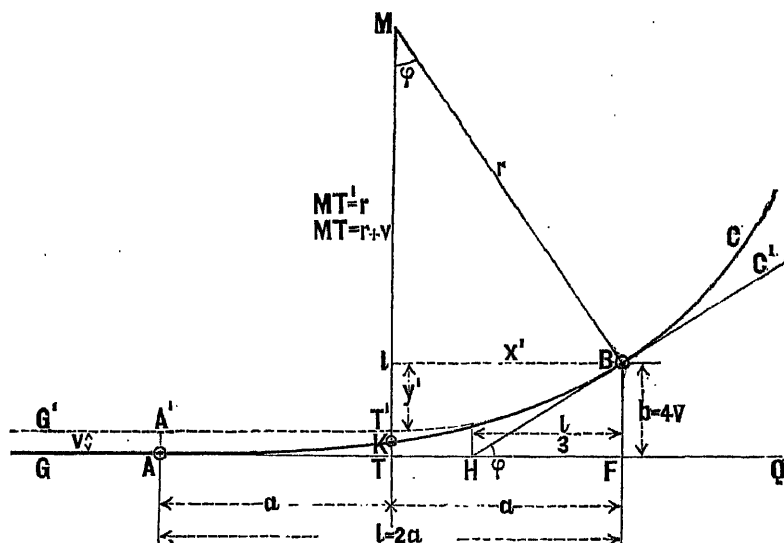
$1:n =$	1:100	1:200	1:400	1:500	1:1000	
$v = 20^m$ $v = 50^m$ in 1 Sekunde.	$q = 6116$ $q = 38226$	$q = 12232$ $q = 76453$	$q = 24465$ $q = 152905$	$q = 30581$ $q = 191131$	$q = 61162$ $q = 382263$	(7*)

Ein häufig benützter Wert ist $q = 12\,000$.

Je grösser q, desto flacher und länger wird die Übergangskurve.

Ohne auf die besonderen Verhältnisse des Eisenbahnbetriebes näher einzugehen, nach welchen die Wahl der Konstanten q im einzelnen Falle zu treffen ist, behandeln wir die rein geometrischen Verhältnisse mit Beziehung zu der nachstehenden Fig. 2. Seite 691.

In Fig. 2. ist AKB die Übergangskurve, welche in A die Gerade GA berührt und andererseits in B einen Kreis vom Halbmesser r berührt. Es soll jedoch nicht bloss gewöhnliche Berührung stattfinden, sondern die Kurve AB soll in A und in B Berührung zweiter Ordnung (Oskulation) haben, d. h. der Krümmungs-Halbmesser der Kurve soll in A der Geraden entsprechend, $= \infty$ sein, und in B soll der Krümmungs-Halbmesser $= r$ sein.

Fig. 2.
Übergangskurve AKB.

Der allgemeine Ausdruck für den Krümmungs-Halbmesser ist mit der bei (5) eingeführten Näherung, nach (8):

$$R = \frac{1}{\frac{d^2 y}{d x^2}} = \frac{q}{x} \tag{11}$$

Im Punkte A, mit $x = 0$, giebt dieses $R = \infty$, wie es nach dem Kurvengesetz immer der Fall ist; und im Punkte B, dessen Abscisse $= l$ gesetzt werden soll, giebt die Bedingung $R = r$ nun folgende Gleichung:

$$\frac{q}{l} = r \quad \text{oder} \quad l = \frac{q}{r} \tag{12}$$

Die Ordinate b des Punktes B ist zunächst vermöge der Kurvengleichung:

$$b = \frac{l^3}{6\,q} \tag{13}$$

und wenn man hier (12) berücksichtigt, so hat man:

$$b = \frac{q^2}{6\,r^3} \tag{14}$$

Es handelt sich ferner um die Lage des in B berührenden Kreises $T'BC$ mit dem Mittelpunkte M.

Da die Kreis-Tangente in B zugleich Tangente der Übergangskurve ist, haben wir:

$$tang\,\varphi = \frac{dy}{dx}\Big]_{x=l}$$

h. nach (9) und dann nach (13):

$$tang\,\varphi = \frac{l^2}{2\,q} = \frac{3\,b}{l} = b : \frac{l}{3} \tag{15}$$

In dieser letzten Form spricht diese Gleichung einen Satz aus, welcher lautet: ie Subtangente HF des Punktes B ist *ein Drittel* der Abscisse $AF = l$. (Dieser atz gilt für jeden Kurvenpunkt.)

Nachdem somit φ bestimmt ist, können wir auch die in Fig. 2. S. 691 eingeschriebenen Kreis-Coordinaten $x'\,y'$ angeben, nämlich:

$$x' = r\,sin\,\varphi \quad \text{und} \quad y' = r - r\,cos\,\varphi \tag{16}$$

Da jedoch φ klein sein soll, darf man setzen:

$$sin\,\varphi = tang\,\varphi = \frac{l^2}{2\,q} \quad , \quad cos\,\varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{l^2}{2\,q}\right)^2} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{l^2}{2\,q}\right)^2 \tag{17}$$

Dieses in (16) gesetzt, giebt zuerst mit Rücksicht auf (12):

$$x' = \frac{q}{l}\,\frac{l^2}{2\,q} = \frac{l}{2} \tag{18}$$

ann der zweite Teil von (16) und (17) mit Rücksicht auf (13):

$$y' = \frac{q}{2\,l}\,\frac{l^4}{4\,q^2} = \frac{l^3}{8\,q} = \frac{3}{4}\,b \tag{19}$$

Nach (18) und (19) ist also die Lage des Punktes T' so bestimmt, dass er im inne der Abscissen die Entfernung AF *halbiert* und aus diesem Grunde ist noch $A\,T = T\,F = a = \frac{l}{2}$ eingeschrieben.

Im Sinne der Ordinaten hat man wegen (19):

$$T\,T' = b - y' = \frac{1}{4}\,b = v \tag{20}$$

Dieser Wert v spielt bei den Absteckungen eine Hauptrolle, wir können nach 4) auch dafür schreiben:

$$v = \frac{q^2}{24\,r^3} \tag{21}$$

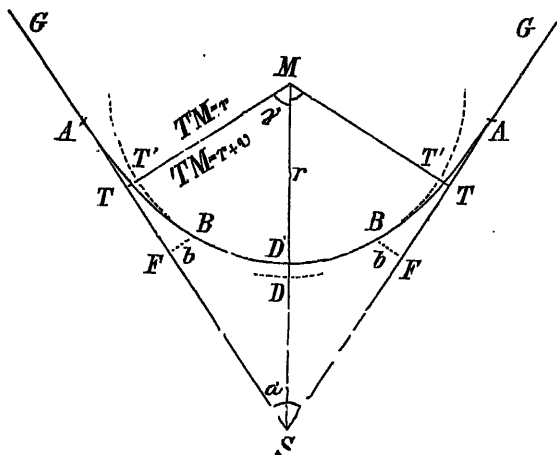
Endlich kann man noch zeigen, dass auch das Stück $TT' = v$ durch die Kurve elbst in dem Punkte K halbiert wird, denn es ist TK als Ordinate zu der Abscisse $= \frac{l}{2}$ nach der Kurvengleichung:

$$TK = \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^3}{6\,q} = \frac{l^3}{48\,q} = \frac{1}{2}\,v \tag{22}$$

Einige Zahlenwerte für die Hauptformeln der vorstehenden Entwicklung haben ir in der Hilfstafel auf Seite [51] des Anhangs zusammengestellt.

Hauptaufgabe für die Anlage einer Übergangskurve.

Nach Andeutung von Fig. 3. sind zwei Gerade SG und SG abgesteckt, welche durch einen Kreisbogen vom Halbmesser r mit Übergangskurven verbunden werden sollen.

Fig. 3.
Kreisbogen mit Übergangskurven.

Nach den vorstehenden Entwicklungen bekommt man folgenden Gang der Berechnung und der Absteckung, den wir zugleich durch ein Zahlen-Beispiel erläutern:

1) Man entscheidet sich für einen bestimmten Wert q als Konstante der Formel $y = \frac{x^3}{6\,q}$. Entweder wählt man q nach den Forderungen des Eisenbahnbetriebs (vgl. oben Gleichung (7) und die Tabelle (7*) S. 690) und dann ist mit dem Halbmesser r des anzuschliessenden Kreises sofort auch die Länge l der Übergangskurve bestimmt, nämlich nach (12) S. 691:

$$l = \frac{q}{r}$$

Es kann auch umgekehrt vorkommen, dass man sich zuerst für die Länge l entscheidet, und bei gegebenem r die Konstante nach vorstehender Gleichung bemisst.

Wir wollen beispielshalber annehmen:

$$q = 12\,000 \quad \text{und} \quad r = 300$$

damit wird:

$$\text{Kurvenlänge } l = \frac{12\,000}{300} = 40^m \quad , \quad \frac{l}{2} = a = 20^m$$

2) Man berechnet die Parallelverschiebung der Tangenten nach (21) S. 692:

$$v = \frac{q^2}{24\,r^3} = 0{,}222^m$$

3) Man macht die Absteckung der Tangenten-Punkte T (Fig. 3.) mit einem Halbmesser $r + v$ statt r, indem man sich zuerst einen Bogen TDT (Fig. 3.) vom Halbmesser $r + v$ angelegt denkt.

Hiezu misst man, wie sonst, den Winkel α, derselbe werde $\alpha = 82^\circ\ 50'\ 0''$, also $\frac{\alpha}{2} = 41^\circ\ 25'\ 0''$

$$\gamma = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 48^\circ\ 35'\ 0''.$$

Hiezu wird berechnet:

$$ST = (r + v)\, tang\, \gamma = 300{,}222^m\, tang\, 48^\circ\ 35'\ 0''$$
$$ST = 340{,}336^m$$

damit können die beiden Punkte T abgesteckt werden.

4) Man nimmt $a = \frac{l}{2} = 20^m$ und misst diesen Wert von T aus nach beiden Seiten ab, damit bekommt man die beiden Punkte A und F (Fig. 3. S. 693).

Ferner berechnet man nach (14):

$$b = \frac{q^2}{24\, r^3} = 4\, v = 0{,}889^m$$

womit der Punkt B, d. h. der Übergangs-Berührungspunkt zwischen der Übergangskurve und dem Kreisbogen abgesteckt werden kann.

5) Man steckt die Übergangskurve selbst ab, wozu man die Coordinaten x und y entweder nach der Kurven-Gleichung $y = \frac{x^3}{6\, q}$ berechnet, oder aus einer hiezu berechneten Hilfstafel entnimmt (vgl. S. [51] des Anhangs).

Im Falle unseres Beispiels hat man:

$x = 0$	5^m	10^m	15^m	20^m	25^m	30^m	35^m	40^m
$y = 0$	$0{,}002^m$	$0{,}014^m$	$0{,}047^m$	$0{,}111^m$	$0{,}217^m$	$0{,}375^m$	$0{,}595^m$	$0{,}889^m$

Die Abscissen x sind hiebei von A an in der Richtung AS gezählt.

6) Man steckt den Kreisbogen ab mit den rechtwinkligen Coordinaten, für $r = 300^m$, wobei man jedoch die Ordinaten sämtlich um $v = 0{,}22^m$ vergrössert. Die Abscissen x sind von T an in der Richtung TS gezählt, also:

$x = 0^m$ (Übergangskurve)
$x = 10$ (Übergangskurve)
$x = 20$ $y = 0{,}67 + 0{,}22 = 0{,}89^m$ wie bei der Übergangskurve mit $x = 40^m$
$x = 30$ $y = 1{,}50 + 0{,}22 = 1{,}72$
$x = 40$ $y = 2{,}68 + 0{,}22 = 2{,}90$
$x = 50$ $y = 4{,}20 + 0{,}22 = 4{,}42$
. . . .

Statt die Ordinaten um $v = 0{,}22$ zu vergrössern, kann man natürlich auch die Abscissen-Axe um 0,22 verschieben, und dann die Kreisordinaten für $r = 300^m$ selbst abtragen.

§ 188. Litteratur über Linien-Absteckung und Verwandtes.

I. Linien-Absteckung im allgemeinen.

1851. *Kröhnke.* Handbuch zum Abstecken von Kurven auf Eisenbahnen und Wegelinien. Erste Auflage, Leipzig 1851, und spätere Auflagen.

1865. *Heyne.* Das Tracieren von Eisenbahnen. Erste Auflage 1865, vierte Auflage Wien 1872.

1872. *Helmert.* Die Übergangskurven für Eisenbahngeleise, mit Rechnungsbeispielen und Tafeln Aachen 1872.

1873. *Winckel.* Handbuch zum Abstecken von Kurven. Berlin 1873.

1873. *Knoll.* Taschenbuch zum Abstecken der Kurven an Eisenbahnen und Strassen. Stuttgart 1873.

1874. *Sarrazin* und *Oberbeck.* Taschenbuch zum Abstecken von Kreisbögen und Übergangskurven. Berlin 1874. Vierte Auflage, Berlin 1888.

1874. *Hanhard* und *Waldner.* Tracierungs-Handbuch für die Ingenieur-Arbeiten im Felde. Berlin 1874.

1875. *Helmert.* Über die günstigste Wahl der Kardinalpunkte bei dem Abstecken einer Trace. Zeitschr. d. Hannov. Ing - u. Arch.-Vereins 1875, Heft 3. S. 337—348.

1875. *Pockels.* Der Arkograph, Spiegel-Instrument zum Abstecken von Kreisbögen. Deutsche Bauzeitung, 9. Jahrgang, 1875, S. 22—24.

1876. *Becker.* Die Absteckung von Strassen- und Eisenbahnkurven. Wien 1876.

1877. *Dörflinger.* Absteckung der Kehrtunnel bei Wasen. Zeitschr. f. Verm. 1877, S. 526—533.

1879. *Elb.* Taschenbuch zum Abstecken von Kreisbögen und Übergangskurven. Wilhelmshaven 1879.

1880. *Koppe.* Über die Bestimmung der Absteckungs-Elemente für die sieben Kehrtunnels der Gotthardbahn, von Dr. *C. Koppe.* Separat-Abdruck aus der „Eisenbahn“, Band XIII, Nr. 6 und 7 vom 7. und 14. August 1880.

1881. *Jordan.* Kreis-Coordinaten für 200 Radien. Leipzig 1881.

1882. *Decher.* Die Prismentrommel, ein Taschen-Instrument zum Abstecken von Kreisbögen, ausgeführt in der optischen Anstalt von *Reinfelder & Hertel* in München.

1885. *Gysin.* Peripheriewinkel-Tafeln in *alter* Teilung zum Abstecken von Eisenbahn- und Strassenkurven, Liestal 1885, und Tafeln zum Abstecken von Eisenbahn- und Strassenkurven in *neuer* Teilung. Liestal 1885.

1888. *Launhardt.* Theorie des Trassierens. Heft II: Die technischen Trassierungen der Eisenbahnen. Hannover 1888.

II. Tunnel-Absteckungen.

Rheinische Eisenbahn.

Mitteilungen von Obergeometer *Winckel* über drei Tunnel-Absteckungen der Rheinischen Eisenbahn; Zeitschr. f. Verm. 1873, S. 249—254:

1) Metttericher Tunnel 410^m lang, in einer Kurve von 377^m Halbmesser. Absteckung eines *in* den Kreis einbeschriebenen Polygons von 53^m Sehnenlänge und $1{,}04^m$ Pfeilhöhe. Durchschlag-Widerspruch $= 6^{cm}$.
2) Friedrich-Wilhelms-Tunnel 328^m lang, in einer Kurve von 339^m Halbmesser. Durchschlag-Widerspruch $= 1{,}5^{cm}$.
3) Philippsheimer Tunnel 260^m lang, in einer Kurve von 339^m Halbmesser. Durchschlags-Widerspruch $= 0{,}4^m$.

Ernst August-Stollen im Harz.

Nach einer Mitteilung von *Koppe* in der „Zeitschr. f. Verm. 1876“, S. 377 betrug bei 9 Durchschlägen der Fehler im Mittel nur $2{,}3^{cm}$, wobei die Ausdehnung der erforderlichen Theodolit-Messungen für einen Durchschlag im Mittel etwa 4000^m betrug.

Im Anschluss hieran ist auch anzuführen:

Nagel. Über Tiefenlotungen. „Civilingenieur“ 24. Band, 1878, 8. Heft. Separat-Abdruck S. 20.

Schmidt. Das Problem der Schachtlotung und seine Lösung mit schwingendem Lote. Jahrbuch für das Berg- und Hüttenwesen im Königreiche Sachsen auf das Jahr 1882, S. 145—161.

Der Mont-Cenis-Tunnel (vgl. S. 697).

Die Absteckung der Axe des *Mont-Cenis*-Tunnels wurde in den Jahren 1857 bis 1858 ohne Triangulierung, mit Hilfe eines hochgelegenen Observatoriums *unmittelbar* ausgeführt, wie in der Zeichnung von S. 697 angedeutet ist.

Die Tunnellänge wurde durch Triangulierung bestimmt, und die Höhen über en Berg hinweg nivelliert.

Weiteres giebt ein „Rapport sur le percement du grand tunnel des alpes par *I. Conte*, ingénieur en chef des ponts et chaussées“ in den „Annales des pontes et haussées, 4e série 1863“ 1er semestre, S. 1—51 mit Tafel 37—41. Auszug hieraus . „Civilingenieur“ 1863, neue Folge 9. Band, S. 341—370 und Tafel 24—26.

Der Durchschlag des Mont-Cenis-Tunnels erfolgte am 26. Dezember 1870; über ie dabei gefundene Abweichung ist nichts bekannt geworden.

Der Gotthard-Tunnel (vgl. S. 697).

Dieser grösste bis jetzt ausgeführte Tunnel hat nahezu 15000m Länge. Die)urchbohrung geschah vom September 1872 bis Februar 1880. Die Absteckung vurde durch Triangulierung bestimmt. Folgendes sind die wichtigsten Nachweise hiefür:

870. *Gelpke.* Bericht über die Bestimmung der St. Gotthard-Tunnel-Axe, von *O. Gelpke*, eidgenössischer Ingenieur. „Civilingenieur“ 16. Band (1870) S. 143—168. Dreiecksnetz mit einer 1450,44m langen Grundlinie bei Andermatt. Mitteilung von 20 Originaldreiecken.

875. *Koppe.* Bestimmung der Axe des Gotthard-Tunnels. Ausgeführt in den Jahren 1874/1875 von *C. Koppe*, Geometer der Gotthardbahn; mit einer Dreiecksnetz-Karte. Zeitschr. f. Verm. 1875, S. 369—444.

.876. *Koppe.* Bestimmung der Axe des Gotthard-Tunnels. Nachtrag (Berichtigung) zu S. 390—394 des vorigen. Zeitschr. f. Verm. 1876, S. 86—90.

876. *Koppe.* Trigonometrische Höhenmessung zur Tunnel-Triangulation. Zeitschr. f. Verm. 1876, S. 129—145.

876. *Helmert.* Diskussion der Beobachtungsfehler in *Koppe*s Vermessung für die Gotthard-Tunnel-Axe. Zeitschr. f. Verm. 1876, S. 146—155.

.876. *Koppe.* Bestimmung der Axe des Gotthard-Tunnels. Zeitschr. f. Verm. 1876, S. 353—382.

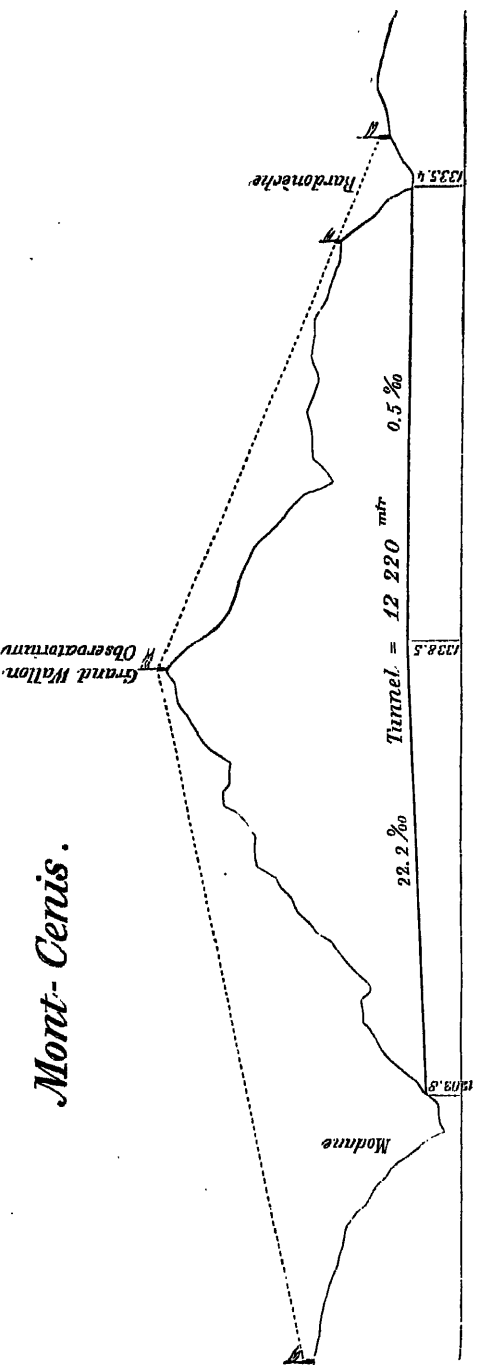
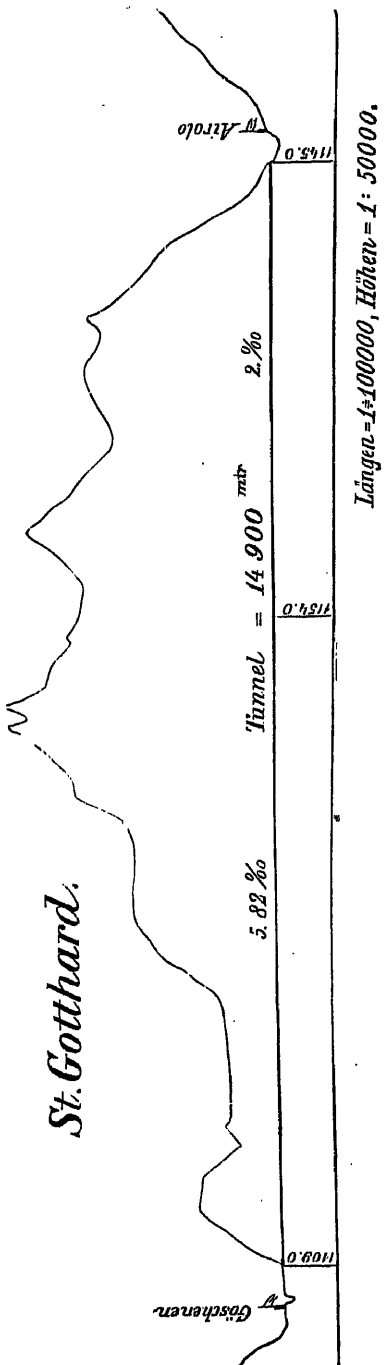
877. *Pestalozzi.* Die Absteckung der Axe des Gotthard-Tunnels. Vortrag, gehalten in der X. Sitzung des Züricherischen Ing.- u. Arch.-Vereins vom 23. Februar 1877, von *S. Pestalozzi*, Ingenieur (mit einer Beilage, enthaltend die Triangulierungs-Netze von *Gelpke* und von *Koppe*). Siehe „Die Eisenbahn“, Schweizerische Zeitschr. f. Bau- u. Verkehrswesen, VI. Band 1877, Nr. 12 und Nr. 13, S. 89—91 und S. 97—99.

878. *Dolezalek.* Hilfsmittel für die Richtungsangabe im Gotthard-Tunnel. Zeitschr. des Arch.- und Ing.-Vereins zu Hannover, Band 24, 1878, Heft 2. S. 185—194.

880. *Koppe.* Die Absteckung der Axe im Gotthard-Tunnel, von Dr. *C. Koppe*. Separat-Abdruck aus der „Eisenbahn“ Band XXII, Nr. 8, vom 20. Februar 1880.

880. *Gelpke.* Die letzten Richtungs-Verifikationen und der Durchschlag am grossen St. Gotthardt-Tunnel. Zeitschr. f. Verm. 1880, S. 101—116, 137—148, 149—163.

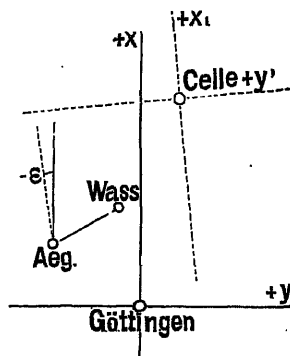
880. *Dolezalek.* Der Durchschlag und die Richtungsbestimmung des Gotthard-Tunnels. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Vereins zu Hannover 1880, S. 317—320.

Der Durchschlag des Gotthard-Tunnels geschah am 28. Februar 1880, mit einer ım 7,6 Meter kleineren Länge als erwartet wurde, d. h. die beiderseitigen Stollen rafen bereits zusammen, als man noch 7,6 Meter dazwischen zu haben glaubte. In er Höhe stimmte der Durchschlag auf 0,05 Meter und in der Richtung bei erster Iessung auf 0,49 Meter, bei zweiter Messung auf 0,33 Meter. („Zeitschr. f. Verm. 1880“ S. 157, 159, 161 und „Zeitschr. d. Ing.- u. Arch.-Vereins zu Hannover 1880“, S. 318.)

Mont-Cenis.
Bardonèche
Grand Wallon. Observatorium
Modane
1335.4
1338.5
Tunnel = 12 220 mtr
0.5 ‰
22.2 ‰
St. Gotthard.
Airolo
Göschenen
1145.0
1154.0
1109.0
Tunnel = 14 900 mtr
2 ‰
5.82 ‰
Längen = 1:100000, Höhen = 1: 50000.

Nachtrag zu § 73. und zu § 97.

In der Zwischenzeit seit dem Druck von § 73. sind die Neubestimmungen der Landes-Aufnahme für die zwei Hannoverschen Hauptpunkte *Ägidius* und *Wasserturm* bekannt geworden.

Die neuen rechtwinkligen Coordinaten beziehen sich auf den Ursprung *Celle*, und die gegenseitige Umformung der alten und neuen Coordinaten geschieht durch ähnliche Formeln, wie die schon in § 61. S. 196 (19) und (20) angegebenen.

In nebenstehender Figur bedeuten x, y die alten Coordinaten mit dem Ursprung Göttingen, und x', y' die neuen Coordinaten mit dem Ursprung Celle, und die entsprechenden Formeln sind:

$$y' = (y-b) - m'(y-b) + n'(x-a) \quad , \quad x' = (x-a) - n'(y-b) - m'(x-a)$$
$$y = y' + b + m\,y' - n\,x' \qquad\qquad x = x' + a + n\,y' + m\,x'$$

Dazu gehören folgende Zahlenwerte:

$$v \sin \varepsilon = -n \quad , \quad \log n = 7.276\,353 \qquad \Big| \qquad v \cos \varepsilon = 1 + m \quad , \quad \log m = 6.511\,994$$
$$\frac{1}{v} \sin \varepsilon = -n' \quad , \quad \log n' = 7.276\,070 \qquad \Big| \qquad \frac{1}{v} \cos \varepsilon = 1 - m' \quad , \quad \log m' = 6.516\,593$$
$$b = +\,9346{,}099^{m} \qquad\qquad a = +\,121\,937{,}460^{m}$$

Weiteres hierüber s. „Zeitschr. f. Vermessungswesen 1888" S. 305—310.

Nach den vorstehenden Formeln sind die folgenden, zu § 73. S. 234 gehörigen Coordinaten berechnet:

	y'	x'
1. Agidius Helmstange	— 23 271,813^m	— 28 308,395^m
2. Wasserturm, Flaggenstange . .	— 25 538,488	— 29 071,474
„ Pfeiler	— 25 537,808	— 29 071,058
3. Techn. Hochschule Hauptturm *S*.	— 24 709,778	— 26 868,341
„ „ südöstl. Turm *SO*.	— 24 667,098	— 26 852,031
„ „ Eisenplatte *E*.	— 24 655,721	— 26 879,835
„ „ „ *S'*.	— 24 709,921	— 26 871,990
4. Kunst	— 26 398,919	— 26 910,911
5. Badenstedter Weg	— 26 824,250	— 29 301,629
6. Tönjesberg	— 25 852,643	— 30 494,325
7. Bahnhof (Linden)	— 24 750,641	— 29 868,898
8. Markt-Turm	— 23 545,576	— 28 046,915
9. Kreuz-Turm	— 23 722,921	— 27 866,305
10. Neustädter Turm	— 24 008,651	— 28 114,280
11. Waterloo-Säule	— 24 049,898	— 28 628,324
12. Rathaus-Turm in Linden . . .	— 24 597,348	— 28 688,837
13. Martins-Turm	— 25 273,930	— 28 710,901
14. Katholische Kirche, Turm . . .	— 24 897,076	— 28 926,178
15. Zionkirche, Turm	— 24 583,972	— 29 153,511
16. Zuckerfabrik, Schornstein . . .	— 24 947,309	— 30 199,501
17. Christus-Turm	— 24 158,298	— 26 989,669.

Anhang.

Hilfstafeln.

Reduktion für Wärme-Ausdehnung oder für kleine Massstabsfehler.

Wärme-Ausdehnung eines Massstabes von 1 Meter Länge.

Messing				Eisen				Tannenholz			
C°	*mm*	C°	*mm*	C°	*mm*	C°	*mm*	C°	*mm*	C°	*mm*
1°	0,02	16°	0,30	1°	0,01	16°	0,18	1°	0,00	16°	0,06
2	0,04	17	0,32	2	0,02	17	0,19	2	0,01	17	0,07
3	0,06	18	0,34	3	0,03	18	0,20	3	0,01	18	0,07
4	0,08	19	0,36	4	0,05	19	0,21	4	0,02	19	0,08
5	0,09	20	0,38	5	0,06	20	0,23	5	0,02	20	0,08
6°	0,11	21°	0,40	6°	0,07	21°	0,24	6°	0,02	21°	0,08
7	0,13	22	0,41	7	0,08	22	0,25	7	0,03	22	0,09
8	0,15	23	0,43	8	0,09	23	0,26	8	0,03	23	0,09
9	0,17	24	0,45	9	0,10	24	0,27	9	0,04	24	0,10
10	0,19	25	0,47	10	0,11	25	0,28	10°	0,04	25	0,10
11°	0,21	26°	0,49	11°	0,12	26°	0,29	11	0,04	26°	0,10
12	0,23	27	0,51	12	0,14	27	0,30	12	0,05	27	0,11
13	0,25	28	0,53	13	0,15	28	0,32	13	0,05	28	0,11
14	0,26	29	0,55	14	0,16	29	0,33	14	0,06	29	0,12
15	0,28	30	0,56	15	0,17	30	0,34	15	0,06	30	0,12

Reduktion für eine Mass-Änderung n.

1 Latten-Meter $= 1^m + n$	Gemessene Länge oder Höhe									
	2^m	4^m	5^m	6^m	8^m	10^m	20^m	30^m	40^m	50^m	100^m
mm	*mm*	*mm*	*mm*	*mm*	*mm*	*mm*	*mm*	*mm*	*mm*	*mm*	*mm*
$n =$ 0,01	0,0	0,0	0,0	0,1	0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	1,0
0,02	0,0	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	2,0
0,03	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	3,0
0,04	0,1	0,2	0,2	0,2	0,3	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	4,0
0,05	0,1	0,2	0,3	0,3	0,4	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	5,0
0,06	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	1,2	1,8	2,4	3,0	6,0
0,07	0,1	0,3	0,4	0,4	0,6	0,7	1,4	2,1	2,8	3,5	7,0
0,08	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1,6	2,4	3,2	4,0	8,0
0,09	0,2	0,4	0,5	0,5	0,7	0,9	1,8	2,7	3,6	4,5	9,0
0,10	0,2	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	10,0
0,11	0,2	0,4	0,6	0,7	0,9	1,1	2,2	3,3	4,4	5,5	11,0
0,12	0,2	0,5	0,6	0,7	1,0	1,2	2,4	3,6	4,8	6,0	12,0
0,13	0,3	0,5	0,7	0,8	1,0	1,3	2,6	3,9	5,2	6,5	13,0
0,14	0,3	0,6	0,7	0,8	1,1	1,4	2,8	4,2	5,6	7,0	14,0
0,15	0,3	0,6	0,8	0,9	1,2	1,5	3,0	4,5	6,0	7,5	15,0
0,16	0,3	0,6	0,8	1,0	1,3	1,6	3,2	4,8	6,4	8,0	16,0
0,17	0,3	0,7	0,9	1,0	1,4	1,7	3,4	5,1	6,8	8,5	17,0
0,18	0,4	0,7	0,9	1,1	1,4	1,8	3,6	5,4	7,2	9,0	18,0
0,19	0,4	0,8	1,0	1,1	1,5	1,9	3,8	5,7	7,6	9,5	19,0
0,20	0,4	0,8	1,0	1,2	1,6	2,0	4,0	6,0	8,0	10,0	20,0

(vgl. S. 21 und S. 380.)

Reduktion schiefgemessener Längen auf den Horizont. $L - L \cos \alpha$.

α	Schiefe Länge L											α
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	
1°	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1°
2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,01	0,01	2
3	0,00	0,00	0,00	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,03	3
4	0,00	0,00	0,01	0,01	0,01	0,01	0,02	0,02	0,02	0,02	0,05	4
5	0,00	0,00	0,01	0,02	0,02	0,02	0,03	0,03	0,03	0,04	0,08	5
6	0,01	0,01	0,02	0,02	0,03	0,03	0,04	0,04	0,05	0,05	0,11	6
7	0,01	0,01	0,02	0,03	0,04	0,04	0,05	0,06	0,07	0,07	0,15	7
8	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,19	8
9	0,01	0,02	0,04	0,05	0,06	0,07	0,09	0,10	0,11	0,12	0,25	9
10	0,02	0,03	0,05	0,06	0,08	0,09	0,11	0,12	0,14	0,15	0,30	10
11	0,02	0,04	0,06	0,07	0,09	0,11	0,13	0,15	0,17	0,18	0,37	11
12	0,02	0,04	0,07	0,09	0,11	0,13	0,15	0,17	0,20	0,22	0,44	12
13	0,03	0,05	0,08	0,10	0,13	0,15	0,18	0,21	0,23	0,26	0,51	13
14	0,03	0,06	0,09	0,12	0,15	0,18	0,21	0,24	0,27	0,30	0,50	14
15	0,03	0,07	0,10	0,14	0,17	0,20	0,24	0,27	0,31	0,34	0,68	15
16	0,04	0,08	0,12	0,15	0,19	0,23	0,27	0,31	0,35	0,39	0,77	16
17	0,04	0,09	0,13	0,17	0,22	0,26	0,31	0,35	0,39	0,44	0,87	17
18	0,05	0,10	0,15	0,20	0,24	0,29	0,34	0,39	0,44	0,49	0,98	18
19	0,05	0,11	0,16	0,22	0,27	0,33	0,38	0,44	0,49	0,54	1,09	19
20	0,06	0,12	0,18	0,24	0,30	0,36	0,42	0,48	0,54	0,60	1,21	20
21	0,07	0,13	0,20	0,27	0,33	0,40	0,46	0,53	0,60	0,66	1,33	21
22	0,07	0,15	0,22	0,29	0,36	0,44	0,51	0,58	0,66	0,73	1,46	22
23	0,08	0,16	0,24	0,32	0,40	0,48	0,56	0,64	0,72	0,79	1,59	23
24	0,09	0,17	0,26	0,35	0,43	0,52	0,61	0,69	0,78	0,86	1,73	24
25	0,09	0,19	0,28	0,37	0,47	0,56	0,66	0,75	0,84	0,94	1,87	25
26	0,10	0,20	0,30	0,40	0,51	0,61	0,71	0,81	0,91	1,01	2,02	26
27	0,11	0,22	0,33	0,44	0,54	0,65	0,76	0,87	0,98	1,09	2,18	27
28	0,12	0,23	0,35	0,47	0,59	0,70	0,82	0,94	1,05	1,17	2,34	28
29	0,13	0,25	0,38	0,50	0,63	0,75	0,88	1,00	1,13	1,25	2,51	29
30	0,13	0,27	0,40	0,54	0,67	0,80	0,94	1,07	1,21	1,34	2,68	30
0,5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,5
1,0	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,002	0,003	1,0
1,5	0,000	0,001	0,001	0,001	0,002	0,002	0,002	0,003	0,003	0,003	0,007	1,5
2,0	0,001	0,001	0,002	0,002	0,003	0,004	0,004	0,005	0,006	0,006	0,012	2,0
2,5	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009	0,010	0,019	2,5
3,0	0,001	0,003	0,004	0,005	0,007	0,008	0,010	0,011	0,012	0,014	0,027	3,0
3,5	0,002	0,004	0,006	0,007	0,009	0,011	0,013	0,015	0,017	0,019	0,037	3,5
4,0	0,002	0,005	0,007	0,010	0,012	0,015	0,017	0,019	0,022	0,024	0,049	4,0
4,5	0,003	0,006	0,009	0,012	0,015	0,018	0,022	0,025	0,028	0,031	0,062	4,5
5,0	0,004	0,008	0,011	0,015	0,019	0,023	0,027	0,030	0,034	0,038	0,076	5,0
5,5	0,005	0,009	0,014	0,018	0,023	0,028	0,032	0,037	0,041	0,046	0,092	5,5
6,0	0,005	0,011	0,016	0,022	0,027	0,033	0,038	0,044	0,049	0,055	0,110	6,0
6,5	0,006	0,013	0,019	0,026	0,032	0,039	0,045	0,051	0,058	0,064	0,129	6,5
7,0	0,007	0,015	0,022	0,030	0,037	0,045	0,052	0,060	0,067	0,075	0,149	7,0
7,5	0,009	0,017	0,026	0,034	0,043	0,051	0,060	0,068	0,077	0,086	0,171	7,5

(vgl. S. 18.)

Verwandlung der Sexagesimalteilung in Centesimalteilung.

Grade.

°	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
00	0,0..	1,1..	2,2..	3,3..	4,4..	5,5..	6,6..	7,7..	8,8..	10,0..
10	11,1..	12,2..	13,3..	14,4..	15,5..	16,6..	17,7..	18,8..	20,0..	21,1..
20	22,2..	23,3..	24,4..	25,5..	26,6..	27,7..	28,8..	30,0..	31,1..	32,2..
30	33,3..	34,4..	35,5..	36,6..	37,7..	38,8..	40,0..	41,1..	42,2..	43,3..
40	44,4..	45,5..	46,6..	47,7..	48,8..	50,0..	51,1..	52,2..	53,3..	54,4..
50	55,5..	56,6..	57,7..	58,8..	60,0..	61,1..	62,2..	63,3..	64,4..	65,5..
60	66,6..	67,7..	68,8..	70,0..	71,1..	72,2..	73,3..	74,4..	75,5..	76,6..
70	77,7..	78,8..	80,0..	81,1..	82,2..	83,3..	84,4..	85,5..	86,6..	87,7..
80	88,8..	90,0..	91,1..	92,2..	93,3..	94,4..	95,5..	96,6..	97,7..	98,8..
90	100,0..	101,1..	102,2..	103,3..	104,4..	105,5..	106,6..	107,7..	108,8..	110,0..
100	111,1..	112,2..	113,3..	114,4..	115,5..	116,6..	117,7..	118,8..	120,0..	121,1..
110	122,2..	123,3..	124,4..	125,5..	126,6..	127,7..	128,8..	130,0..	131,1..	132,2..
120	133,3..	134,4..	135,5..	136,6..	137,7..	138,8..	140,0..	141,1..	142,2..	143,3..
130	144,4..	145,5..	146,6..	147,7..	148,8..	150,0..	151,1..	152,2..	153,3..	154,4..
140	155,5..	156,6..	157,7..	158,8..	160,0..	161,1..	162,2..	163,3..	164,4..	165,5..
150	166,6..	167,7..	168,8..	170,0..	171,1..	172,2..	173,3..	174,4..	175,5..	176,6..
160	177,7..	178,8..	180,0..	181,1..	182,2..	183,3..	184,4..	185,5..	186,6..	187,7..
170	188,8..	190,0..	191,1..	192,2..	193,3..	194,4..	195,5..	196,6..	197,7..	198,8..
180	200,0..	201,1..	202,2..	203,3..	204,4..	205,5..	206,6..	207,7..	208,8..	210,0..
190	211,1..	212,2..	213,3..	214,4..	215,5..	216,6..	217,7..	218,8..	220,0..	221,1..

Minuten.

′	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,
00	000000	018519	037037	055556	074074	092593	111111	129630	148148	166667
10	185185	203704	222222	240741	259259	277778	296296	314815	333333	531852
20	370370	388889	407407	425926	444444	462963	481481	500000	518519	537037
30	555556	574074	592593	611111	629630	648148	666667	685185	703704	722222
40	740741	759259	777778	796296	814815	833333	851852	870370	888889	907407
						1,	1,	1,	1,	1,
50	925926	944444	962963	981481	000000	018519	037037	055556	074074	092593

Sekunden.

″	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,
00	000000	000309	000617	000926	001235	001543	001852	002160	002469	002778
10	003086	003395	003704	004012	004321	004630	004938	005247	005556	005864
20	006173	006481	006790	007099	007407	007716	008025	008333	008642	008951
30	009259	009568	009877	010185	010494	010803	011111	011420	011728	012037
40	012346	012654	012963	013272	013580	013889	014198	014506	014815	015123
50	015432	015741	016049	016358	016667	016975	017284	017593	017901	018210

″	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,
0,0	000000	000003	000006	000009	000012	000015	000019	000022	000025	000028
0,1	31	34	37	40	43	46	49	52	56	59
0,2	62	65	68	71	74	77	80	83	86	90
0,3	93	96	99	102	105	108	111	114	117	120
0,4	123	127	130	133	136	139	142	145	148	151
0,5	000154	000157	000160	000164	000167	000170	000173	000176	000179	000182
0,6	185	188	191	194	198	201	204	207	210	213
0,7	216	219	222	225	228	231	235	238	241	244
0,8	247	250	253	256	259	262	265	269	272	275
0,9	278	281	284	287	290	293	296	299	302	306

(vgl. S. 1 und S. 175.)

Verwandlung der Centesimalteilung in Sexagesimalteilung.

Grade.

⊖	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
00	0° 0′	0° 54′	1° 48′	2° 42′	3° 36′	4° 30′	5° 24′	6° 18′	7° 12′	8° 6′
10	9 0	9 54	10 48	11 42	12 36	13 30	14 24	15 18	16 12	17 6
20	18 0	18 54	19 48	20 42	21 36	22 30	23 24	24 18	25 12	26 6
30	27 0	27 54	28 48	29 42	30 36	31 30	32 24	33 18	34 12	35 6
40	36 0	36 54	37 48	38 42	39 36	40 30	41 24	42 18	43 12	44 6
50	45 0	45 54	46 48	47 42	48 36	49 30	50 24	51 18	52 12	53 6
60	54 0	54 54	55 48	56 42	57 36	58 30	59 24	60 18	61 12	62 6
70	63 0	63 54	64 48	65 42	66 36	67 30	68 24	69 18	70 12	71 6
80	72 0	72 54	73 48	74 42	75 36	76 30	77 24	78 18	79 12	80 6
90	81 0	81 54	82 48	83 42	84 36	85 30	86 24	87 18	88 12	89 6
100	90 0	90 54	91 48	92 42	93 36	94 30	95 24	96 18	97 12	98 6
110	99 0	99 54	100 48	101 42	102 36	103 30	104 24	105 18	106 12	107 6
120	108 0	108 54	109 48	110 42	111 36	112 30	113 24	114 18	115 12	116 6
130	117 0	117 54	118 48	119 42	120 36	121 30	122 24	123 18	124 12	125 6
140	126 0	126 54	127 48	128 42	129 36	130 30	131 24	132 18	133 12	134 6
150	135 0	135 54	136 48	137 42	138 36	139 30	140 24	141 18	142 12	143 6
160	144 0	144 54	145 48	146 42	147 36	148 30	149 24	150 18	151 12	152 6
170	153 0	153 54	154 48	155 42	156 36	157 30	158 24	159 18	160 12	161 6
180	162 0	162 54	163 48	164 42	165 36	166 30	167 24	168 18	169 12	170 6
190	171 0	171 54	172 48	173 42	174 36	175 30	176 24	177 18	178 12	179 6

Minuten.

⊖	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	0′ 0,0″	0′32,4″	1′ 4,8″	1′37,2″	2′ 9,6″	2′42,0″	3′14,4″	3′46,8″	4′19,2″	4′51,6″
0,10	5 24,0	5 56,4	6 28,8	7 1,2	7 33,6	8 6,0	8 38,4	9 10,8	9 43,2	10 15,6
0,20	10 48,0	11 20,4	11 52,8	12 25,2	12 57,6	13 30,0	14 2,4	14 34,8	15 7,2	15 39,6
0,30	16 12,0	16 44,4	17 16,8	17 49,2	18 21,6	18 54,0	19 26,4	19 58,8	20 31,2	21 3,6
0,40	21 36,0	22 8,4	22 40,8	23 13,2	23 45,6	24 18,0	24 50,4	25 22,8	25 55,2	26 27,6
0,50	27 0,0	27 32,4	28 4,8	28 37,2	29 9,6	29 42,0	30 14,4	30 46,8	31 19,2	31 51,6
0,60	32 24,0	32 56,4	33 28,8	34 1,2	34 33,6	35 6,0	35 38,4	36 10,8	36 43,2	37 15,6
0,70	37 48,0	38 20,4	38 52,8	39 25,2	39 57,6	40 30,0	41 2,4	41 34,8	42 7,2	42 39,6
0,80	43 12,0	43 44,4	44 16,8	44 49,2	45 21,6	45 54,0	46 26,4	46 58,8	47 31,2	48 3,6
0,90	48 36,0	49 8,4	49 40,8	50 13,2	50 45,6	51 18,0	51 50,4	52 22,8	52 55,2	53 27,6

Sekunden.

⊖	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0000	0,000″	0,324″	0,648″	0,972″	1,296″	1,620″	1,944″	2,268″	2,592″	2,916″
0,0010	3,240	3,564	3,888	4,212	4,536	4,860	5,184	5,508	5,832	6,156
0,0020	6,480	6,804	7,128	7,452	7,776	8,100	8,424	8,748	9,072	9,396
0,0030	9,720	10,044	10,368	10,692	11,016	11,340	11,664	11,988	12,312	12,636
0,0040	12,960	13,284	13,608	13,932	14,256	14,580	14,904	15,228	15,552	15,876
0,0050	16,200	16,524	16,848	17,172	17,496	17,820	18,144	18,468	18,792	19,116
0,0060	19,440	19,764	20,088	20,412	20,736	21,060	21,384	21,708	22,032	22,356
0,0070	22,680	23,004	23,328	23,652	23,976	24,300	24,624	24,948	25,272	25,596
0,0080	25,920	26,244	26,568	26,892	27,216	27,540	27,864	28,188	28,512	28,836
0,0090	29,160	29,484	29,808	30,132	30,456	30,780	31,104	31,428	31,752	32,076

=	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
	0,0324″	0,0648″	0,0972″	0,1296″	0,1620″	0,1944″	0,2268″	0,2592″	0,2916″

(vgl. S. 1 und S. 175.)

Tafel zur Division von Winkelsummen durch 4.

	0″	10″	20″	30″	40″	50″
0′	0′ 0″	0′ 2,5″	0′ 5″	0′ 7,5″	0′ 10″	0′ 12,5″
1	0 15	0 17,5	0 20	0 22,5	0 25	0 27,5
2	0 30	0 32,5	0 35	0 37,5	0 40	0 42,5
3	0 45	0 47,5	0 50	0 52,5	0 55	0 57,5
4	1 0	1 2,5	1 5	1 7,5	1 10	1 12,5
5′	1′ 15″	1′ 17,5″	1′ 20″	1′ 22,5″	1′ 25″	1′ 27,5″
6	1 30	1 32,5	1 35	1 37,5	1 40	1 42,5
7	1 45	1 47,5	1 50	1 52,5	1 55	1 57,5
8	2 0	2 2,5	2 5	2 7,5	2 10	2 12,5
9	2 15	2 17,5	2 20	2 22,5	2 25	2 27,5
10′	2′ 30″	2′ 32,5″	2′ 35″	2′ 37,5″	2′ 40″	2′ 42,5″
11	2 45	2 47,5	2 50	2 52,5	2 55	2 57,5
12	3 0	3 2,5	3 5	3 7,5	3 10	3 12,5
13	3 15	3 17,5	3 20	3 22,5	3 25	3 27,5
14	3 30	3 32,5	3 35	3 37,5	3 40	3 42,5
15′	3′ 45″	3′ 47,5″	3′ 50″	3′ 52,5″	3′ 55″	3′ 57,5″
16	4 0	4 2,5	4 5	4 7,5	4 10	4 12,5
17	4 15	4 17,5	4 20	4 22,5	4 25	4 27,5
18	4 30	4 32,5	4 35	4 37,5	4 40	4 42,5
19	4 45	4 47,5	4 50	4 52,5	4 55	4 57,5
20′	5′ 0″	5′ 2,5″	5′ 5″	5′ 7,5″	5′ 10″	5′ 12,5″
21	5 15	5 17,5	5 20	5 22,5	5 25	5 27,5
22	5 30	5 32,5	5 35	5 37,5	5 40	5 42,5
23	5 45	5 47,5	5 50	5 52,5	5 55	5 57,5
24	6 0	6 2,5	6 5	6 7,5	6 10	6 12,5
25′	6′ 15″	6′ 17,5″	6′ 20″	6′ 22,5″	6′ 25″	6′ 27,5″
26	6 30	6 32,5	6 35	6 37,5	6 40	6 42,5
27	6 45	6 47,5	6 50	6 52,5	6 55	6 57,5
28	7 0	7 2,5	7 5	7 7,5	7 10	7 12,5
29	7 15	7 17,5	7 20	7 22,5	7 25	7 27,5
30′	7′ 30″	7′ 32,5″	7′ 35″	7′ 37,5″	7′ 40″	7′ 42,5″
31	7 45	7 47,5	7 50	7 52,5	7 55	7 57,5
32	8 0	8 2,5	8 5	8 7,5	8 10	8 12,5
33	8 15	8 17,5	8 20	8 22,5	8 25	8 27,5
34	8 30	8 32,5	8 35	8 37,5	8 40	8 42,5
35′	8′ 45″	8′ 47,5″	8′ 50″	8′ 52,5″	8′ 55″	8′ 57,5″
36	9 0	9 2,5	9 5	9 7,5	9 10	9 12,5
37	9 15	9 17,5	9 20	9 22,5	9 25	9 27,5
38	9 30	9 32,5	9 35	9 37,5	9 40	9 42,5
39	9 45	9 47,5	9 50	9 52,5	9 55	9 57,5
40′	10′ 0″	10′ 2,5″	10′ 5″	10′ 7,5	10′ 10″	10′ 12,5″
41	10 15	10 17,5	10 20	10 22,5	10 25	10 27,5
42	10 30	10 32,5	10 35	10 37,5	10 40	10 42,5
43	10 45	10 47,5	10 50	10 52,5	10 55	10 57,5
44	11 0	11 2,5	11 5	11 7,5	11 10	11 12,5

0″	0,00″
1	0,25
2	0,50
3	0,75
4	1,00
5″	1,25″
6	1,50
7	1,75
8	2,00
9	2,25

(vgl. S. 210—211.)

Hilfstafeln zur Berechnung mittlerer Nivellierungsfehler.

I. $\sqrt{s}$ (*s* in Kilometern).

s	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,00	0,10	0,14	0,17	0,20	0,22	0,24	0,26	0,28	0,30
0,1	0,32	0,33	0,35	0,36	0,37	0,39	0,40	0,41	0,42	0,44
0,2	0,45	0,46	0,47	0,48	0,49	0,50	0,51	0,52	0,53	0,54
0,3	0,55	0,56	0,57	0,57	0,58	0,59	0,60	0,61	0,62	0,62
0,4	0,63	0,64	0,65	0,66	0,66	0,67	0,68	0,69	0,69	0,70
0,5	0,71	0,71	0,72	0,73	0,73	0,74	0,75	0,75	0,76	0,77
0,6	0,77	0,78	0,79	0,79	0,80	0,81	0,81	0,82	0,82	0,83
0,7	0,84	0,84	0,85	0,85	0,86	0,87	0,87	0,88	0,88	0,89
0,8	0,89	0,90	0,91	0,91	0,92	0,92	0,93	0,93	0,94	0,94
0,9	0,95	0,95	0,96	0,96	0,97	0,97	0,98	0,98	0,99	0,99
1,0	1,00	1,00	1,01	1,01	1,02	1,02	1,03	1,03	1,04	1,04
1,1	1,05	1,05	1,06	1,06	1,07	1,07	1,08	1,08	1,09	1,09
1,2	1,10	1,10	1,10	1,11	1,11	1,12	1,12	1,13	1,13	1,14
1,3	1,14	1,14	1,15	1,15	1,16	1,16	1,17	1,17	1,17	1,18
1,4	1,18	1,19	1,19	1,20	1,20	1,20	1,21	1,21	1,22	1,22
1,5	1,22	1,23	1,23	1,24	1,24	1,24	1,25	1,25	1,26	1,26
1,6	1,26	1,27	1,27	1,28	1,28	1,28	1,29	1,29	1,30	1,30
1,7	1,30	1,31	1,31	1,32	1,32	1,32	1,33	1,33	1,33	1,34
1,8	1,34	1,35	1,35	1,35	1,36	1,36	1,36	1,37	1,37	1,37
1,9	1,38	1,38	1,39	1,39	1,39	1,40	1,40	1,40	1,41	1,41
2,0	1,41	1,42	1,42	1,42	1,43	1,43	1,44	1,44	1,44	1,45

II. $\frac{d}{\sqrt{s}}$ (*d* in Millimetern, *s* in Kilometern).

s	*d*														
	1mm	2mm	3mm	4mm	5mm	6mm	7mm	8mm	9mm	10mm	12mm	14mm	16mm	18mm	20mm
0,1km	3,2	6,3	9,5	12,6	15,8	19,0	22,1	25,3	28,5	31,6	37,9	44,3	50,6	56,9	63,2
0,2	2,2	4,5	6,7	8,9	11,2	13,4	15,7	17,9	20,1	22,4	26,8	31,3	35,8	40,2	44,7
0,3	1,8	3,7	5,5	7,3	9,1	11,0	12,8	14,6	16,4	18,3	21,9	25,6	29,2	32,9	36,5
0,4	1,6	3,2	4,7	6,3	7,9	9,5	11,1	12,6	14,2	15,8	19,0	22,1	25,3	28,5	31,6
0,5	1,4	2,8	4,2	5,7	7,1	8,5	9,9	11,3	12,7	14,1	17,0	19,8	22,6	25,5	28,3
0,6	1,3	2,6	3,9	5,2	6,5	7,7	9,0	10,3	11,6	12,9	15,5	18,1	20,7	23,2	25,8
0,7	1,2	2,4	3,6	4,8	6,0	7,2	8,4	9,6	10,8	12,0	14,3	16,7	19,1	21,5	23,9
0,8	1,1	2,2	3,4	4,5	5,6	6,7	7,8	8,9	10,1	11,2	13,4	15,7	17,9	20,1	22,4
0,9	1,1	2,1	3,2	4,2	5,3	6,3	7,4	8,4	9,5	10,5	12,6	14,8	16,9	19,0	21,1
1,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	12,0	14,0	16,0	18,0	0,0
1,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	12,0	14,0	16,0	18,0	20,0
2,0	0,7	1,4	2,1	2,8	3,5	4,2	4,9	5,7	6,4	7,1	8,5	9,9	11,3	12,7	14,1
3,0	0,6	1,2	1,7	2,3	2,9	3,5	4,0	4,6	5,2	5,8	6,9	8,1	9,2	10,4	11,5
4,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
5,0	0,4	0,9	1,3	1,8	2,2	2,7	3,1	3,6	4,0	4,5	5,4	6,3	7,2	8,0	8,9
6,0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,9	3,3	3,7	4,1	4,9	5,7	6,5	7,3	8,2
7,0	0,4	0,8	1,1	1,5	1,9	2,3	2,6	3,0	3,4	3,8	4,5	5,3	6,0	6,8	7,6
8,0	0,4	0,7	1,1	1,4	1,8	2,1	2,5	2,8	3,2	3,5	4,2	4,9	5,7	6,4	7,1
9,0	0,3	0,7	1,0	1,3	1,7	2,0	2,3	2,7	3,0	3,3	4,0	4,7	5,3	6,0	6,7
10,0	0,3	0,6	0,9	1,3	1,6	1,9	2,2	2,5	2,8	3,2	3,8	4,4	5,1	5,7	6,3

(vgl. S. 392.)

Hilfstafeln zur Berechnung mittlerer Nivellierungsfehler.

III. $\frac{d^2}{s}$ (d in Millimetern, s in Kilometern.)

s	d 1mm	2mm	3mm	4mm	5mm	6mm	7mm	8mm	9mm	10mm
0,1km	10,1	40,0	90,0	160,0	250,0					
0,2	5,0	20,0	45,0	80,0	125,0	180,0	245,0			
0,3	3,3	13,3	30,0	53,3	83,3	120,0	163,3	213,3		
0,4	2,5	10,0	22,5	40,0	62,5	90,0	122,5	160,0	202,5	
0,5	2,0	8,0	18,0	32,0	50,0	72,0	98,0	128,0	162,0	200,0
0,6	1,7	6,7	15,0	26,7	41,7	60,0	81,7	106,7	135,0	166,7
0.7	1,4	5,7	12,9	22,9	36,7	51,4	70,0	91,4	115,7	142,9
0,8	1,2	5,0	11,2	20,0	31,2	45,0	61,2	80,0	101,2	125,0
0,9	1,1	4,4	10,0	17,8	31,1	40,0	54,4	71,1	90,0	111,1
1,0	1,0	4,0	9,0	16,0	25,0	36,0	49,0	64,0	81,0	100,0
1,1	0,9	3,6	8,0	14,5	22,7	32,7	44,5	58,2	73,6	90,9
1,2	0,8	3,3	7,5	13,3	20,8	30,0	40,8	53,3	67,5	83,3
1,3	0,8	3,1	6,9	12,3	19,2	27,7	37,7	49,2	62,3	76,9
1,4	0,7	2,9	6,4	11,4	17,9	25,7	35,0	45,7	57,9	71,4
1,5	0,7	3,0	6,0	10,7	16,7	24,0	32,7	42,7	54,0	66,7
1,6	0,6	2,5	5,6	10,0	15,6	22,5	30,6	40,0	50,6	62,5
1,7	0,6	2,4	5,3	9,4	14,7	21,2	28,8	37,6	47,6	58,8
1.8	0,6	2,2	5,0	8,9	13,9	20,0	27,2	35,6	45,0	55,6
1,9	0,5	2,1	4,7	8,4	13,2	19,0	25,8	33,7	42,6	52,6
2,0	0,5	2,0	4,5	8,0	12,5	18,0	24,5	32,0	40,5	50,0

s	d mm 0,5	mm 1,0	mm 1,5	mm 2,0	mm 2,5	mm 3,0	mm 3,5	mm 4,0	mm 4,5	mm 5,0	mm 5,5	mm 6,0	mm 6,5	mm 7,0	mm 7,5
km 0,2	1,2	5,0	11,2	20,0	31,3	45,0	61,2	80,0							
0.4	0,6	2,5	5,6	10,0	15,6	22,5	30,6	40,0	51,0	62,5	75,6	90,0			
0,6	0,4	1,7	3,7	6,7	10,4	15,0	20,4	26,7	33,8	41,7	50,4	60,0	70,4	81,7	93,8
0,8	0,3	1,2	2,6	5,0	7,8	11,2	15,3	20,0	25,4	31,2	37,8	45,0	52,8	61,2	70,3
1,0	0,2	1,0	2,2	4,0	6,2	9,0	12,2	16,0	20,2	25,0	30,2	36,0	42,2	49,0	56,2
1,2	0,2	0,8	1,9	3,3	5,2	7,5	10,2	13,3	16,8	20,8	25,2	30,0	35,2	40,8	46,9
1,4	0,2	0,7	1,6	2,9	4,5	6,4	8,8	11,4	14,4	17,9	21,6	25,7	30,2	35,0	40,2
1,6	0,2	0,6	1,4	2,5	3,9	5,6	7,7	10,0	12,7	15,6	18,9	22,5	26,4	30,6	35,2
1,8	0,1	0,6	1,2	2,2	3,5	5,0	6,8	8,9	11,3	13,9	16,8	20,0	23,5	27,2	31,2
2,0	0,1	0,5	1,1	2,0	3,1	4,5	6,1	8,0	10,1	12,5	15,1	18,0	21,2	24,5	28,1
2,2	0,1	0,5	1,0	1,8	2,8	4,1	5,6	7,3	9,2	11,4	13,8	16,4	19,2	22,3	25,6
2,4	0,1	0,4	0,9	1,7	2,6	3,8	5,1	6,7	8,4	10,4	12,6	15,0	17,6	20,4	23,4
2,6	0,1	0,4	0,9	1,5	2,4	3,5	4,7	6,2	7,8	9,6	11,6	13,8	16,2	18,8	21,6
2,8	0,1	0,4	0,8	1,4	2,2	3,2	4,4	5,7	7,2	8,9	10,8	12,9	15,1	17,5	20,1
3,0	0,1	0,3	0,7	1,3	2,1	3,0	4,1	5,3	6,7	8,3	10,1	12,0	14,1	16,3	18,7
3,2	0,1	0,3	0,7	1,2	2,0	2,8	3,8	5,0	6,3	7,8	9,5	11,2	13,2	15,3	17,6
3,4	0,1	0,3	0,7	1,2	1,8	2,6	3,6	4,7	6,0	7,4	8,9	10,6	12,4	14,4	16,5
3,6	0,1	0,3	0,6	1,1	1,7	2,5	3,4	4,4	5,6	6,9	8.4	10,0	11,7	13,6	15,6
3,8	0,1	0,3	0,6	1,1	1,6	2,4	3,2	4,2	5,3	6,6	8,0	9,5	11,1	12,9	14,8
4,0	0,1	0,2	0,6	1,0	1,6	2,2	3,1	4,0	5,1	6,2	7,6	9,0	10,6	12,2	14,1
4,2	0,1	0,2	0,5	0,9	1,5	2,1	2,9	3,8	4,8	6,0	7,2	8,6	10,1	11,7	13,4
4,4	0,1	0,2	0,5	0,9	1,4	2,0	2,8	3,6	4,6	5,7	6,9	8,2	9,6	11,1	12,8
4,6	0,1	0,2	0,5	0,9	1,4	2,0	2,8	3,5	4,4	5,4	6,6	7,8	9,2	10,7	12,2
4,8	0,1	0,2	0,5	0,8	1,3	1,9	2,6	3,3	4,2	5,2	6,3	7,5	8,8	10,2	11,7
5,0	0,1	0,2	0,4	0,8	1,2	1,8	2,4	3,2	4,0	5,0	6,0	7,2	8,4	9,8	11,2

(vgl. S. 392.)

Trigonometrische Höhenmessung.

Erdkrümmung und mittlere Refraktion.

Erdhalbmesser $= r$, $\log r = 6.80489$. Refraktions-Coëfficient $k = 0,13$.

Entfernung a	Erdkrümmung $\frac{a^2}{2r}$	Diff.	Refraktion $\frac{a^2k}{2r}$	Diff.	Reduktion $\frac{1-k}{2r}a^2$	Diff.	Refrakt.-Winkel δ	Entfernung a
km	m	+	m	+	m	+		km
1	0,1	0,2	0,0	0,0	0,1	0,2	2″	1
2	0,3	0,4	0,0	0,1	0,3	0,3	4	2
3	0,7	0,6	0.1	0,1	0,6	0,5	6	3
4	1,3	0,7	0,2	0,1	1,1	0,6	8	4
5	2,0	0,8	0,3	0,1	1,7	0,7	11	5
km	m		m		m			km
6	2,8	1,0	0,4	0,1	2,4	0,9	13″	6
7	3,8	1,2	0,5	0,2	3,3	1,1	15	7
8	5,0	1,3	0,7	0,1	4,4	1,1	17	8
9	6,3	1,5	0,8	0,2	5,5	1,3	19	9
10	7,8	1,7	1,0	0,2	6,8	1,5	21	10
km	m		m		m			km
11	9,5	1,8	1,2	0,3	8,3	1,5	23″	11
12	11,3	1,9	1,5	0,2	9,8	1,7	25	12
13	13,2	2,2	1,7	0,3	11,5	1,9	27	13
14	15,4	2,2	2,0	0,3	13,4	1,9	29	14
15	17,6	2,5	2,3	0,3	15,3	2,2	32	15
km	m		m		m			km
16	20,1	2,6	2,6	0,3	17,5	2,2	34″	16
17	22,7	2,7	2,9	0,4	19,7	2,4	36	17
18	25,4	2,9	3,3	0,4	22,1	2,5	38	18
19	28,3	3,0	3,7	0,4	24,6	2,7	40	19
20	31,3	3,3	4,1	0,4	27,3	2,8	42	20
km	m		m		m			km
21	34,6	3,3	4,5	0,4	30,1	2,9	44″	21
22	37,9	3,6	4,9	0,5	33,0	3,1	46	22
23	41,5	3,6	5,4	0,5	36,1	3,2	48	23
24	45,1	3,9	5,9	0,5	39,3	3,3	50	24
25	49,0	4,0	6,4	0,5	42,6	3,5	53	25
km	m		m		m			km
26	53,0	4,1	6,9	0,5	46,1	3,6	55″	26
27	57,1	4,3	7,4	0,6	49,7	3,7	57	27
28	61,4	4,5	8,0	0,6	53,4	3,9	59	28
29	65,9	4,6	8,6	0,6	57,3	4,1	61	29
30	70,5		9,2		61,4		63	30
km	m		m		m			km
30	71	54	9	7	61	48	1′ 3″	30
40	125	71	16	9	109	61	1 24	40
50	196	86	25	12	170	75	1 45	50
60	282	102	37	13	245	89	2 6	60
km	m		m		m			km
70	384	117	50	15	334	102	2′ 27″	70
80	501	134	65	18	436	116	2 48	80
90	635	149	83	19	552	130	3 9	90
100	784		102		682		3 30	100

(vgl. S. 435 und 436.)

Trigonometrische Höhenmessung.

Horizontkorrektion $\frac{1-k}{2r}a^2$, $\log r = 6.80489$, $k = 0{,}13$

als Funktion der Entfernung a.

a	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	Diff.
m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	+
0	0,000	0,001	0,003	0,006	0,011	0,017	0,025	0,033	0,044	0,055	13
1 000	0,068	0,082	0,098	0,115	0,134	0,153	0,175	0,197	0,221	0,246	27
2 000	0,273	0,30	0,33	0,36	0,39	0,43	0,46	0,50	0,53	0,57	4
3 000	0,61	0,66	0,70	0,74	0,79	0,84	0,88	0,93	0,98	1,04	5
4 000	1,09	1,15	1,20	1,26	1,32	1,38	1,44	1,51	1,57	1,64	6
5 000	1,70	1,77	1,84	1,91	1,99	2,06	2,14	2,21	2,29	2,37	8
6 000	2,45	2,54	2,62	2,71	2,79	2,88	2,97	3,06	3,15	3,25	10
7 000	3,34	3,44	3,53	3,63	3,73	3,83	3,94	4,04	4,15	4,25	11
8 000	4,36	4,47	4,58	4,70	4,81	4,93	5,04	5,16	5,28	5,40	12
9 000	5,52	5,65	5,77	5,90	6,02	6,15	6,28	6,41	6,55	6,68	13
10 000	6,82	6,95	7,09	7,23	7,37	7,52	7,66	7,80	7,95	8,10	15
11 000	8,25	8,40	8,55	8,70	8,86	9,02	9,17	9,33	9,49	9,65	17
12 000	9,82	9,98	10,15	10,31	10,48	10,65	10,82	10,99	11,17	11,34	18
13 000	11,52	11,70	11,88	12,06	12,24	12,42	12,61	12,79	12,98	13,17	19
14 000	13,36	13,55	13,75	13,94	14,14	14,33	14,53	14,73	14,93	15,13	21
15 000	15,34	15,54	15,75	15,96	16,17	16,38	16,59	16,80	17,02	17,23	22
16 000	17,45	17,67	17,89	18,11	18,34	18,56	18,78	19,01	19,24	19,47	23
17 000	19,70	19,93	20,17	20,40	20,64	20,88	21,12	21,36	21,60	21,84	25
18 000	22,09	22,33	22,58	22,83	23,08	23,33	23,58	24,84	24,09	24,35	26
19 000	24,61	24,87	25,13	25,39	25,66	25,92	26,19	26,46	26,73	27,00	27
20 000	27,27	27,54	27,82	28,09	28,37	28,65	28,93	29,21	29,49	29,78	28
21 000	30,06	30,35	30,64	30,93	31,22	31,51	31,81	32,10	32,40	32,69	30
22 000	32,99	33,30	33,60	33,90	34,20	34,51	34,82	35,13	35,44	35,75	31
23 000	36,06	36,38	36,69	37,01	37,33	37,65	37,97	38,29	38,61	38,94	33
24 000	39,27	39,59	39,92	40,25	40,59	40,92	41,25	41,59	41,93	42,27	34
25 000	42,61	42,95	43,29	43,64	43,98	44,33	44,68	45,03	45,38	45,73	35
26 000	46,08	46,44	46,79	47,15	47,51	47,87	48,23	48,60	48,96	49,33	37
27 000	49,70	50,06	50,44	50,81	51,18	51,55	51,93	52,31	52,68	53,06	39
28 000	53,45	53,83	54,21	54,60	54,98	55,37	55,76	56,15	56,54	56,94	39
29 000	57,33	57,73	58,12	58,52	58,92	59,33	59,73	60,13	60,54	60,94	41
30 000	61,35	61,76	62,17	62,59	63,00	63,42	63,83	64,25	64,67	65,09	42

Logarithmische Korrektion für die mittlere Meereshöhe $\frac{H+H'}{2}$, $\log\left(1+\frac{H+H'}{2r}\right)$

$\frac{H+H'}{2}$	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
m										
0	0.00000	0.00001	0.00001	0.00002	0.00003	0.00003	0.00004	0.00005	0.00005	0.00006
1000	0.00007	0.00007	0.00008	0.00009	0.00010	0.00010	0.00011	0.00012	0.00012	0.00013
2000	0.00014	0.00014	0.00015	0.00016	0.00016	0.00017	0.00018	0.00018	0.00019	0.00020
3000	0.00020	0.00021	0.00022	0.00022	0.00023	0.00024	0.00025	0.00025	0.00026	0.00027
4000	0.00027	0.00028	0.00029	0.00029	0.00030	0.00031	0.00031	0.00032	0.00033	0.00033
5000	0.00034	0.00035	0.00035	0.00036	0.00037	0.00037	0.00038	0.00039	0.00039	0.00040

(vgl. S. 436 und S. 432.)

Trigonometrische Höhenmessung.

Horizontkorrektion $\frac{1-k}{2r}a^2$, $\log r = 6.80489$, $k = 0{,}13$

als Funktion von *log a*.

log a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.
	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	
2.0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,01	0,02	0,03	0,04	
	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	
2.9	0,04	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,06	0,06	0,06	0,07	0
3.0	0,07	0,07	0,07	0,08	0,08	0,09	0,09	0,09	0,10	0,10	1
3.1	0,11	0,11	0,12	0,12	0,13	0,14	0,14	0,15	0,16	0,16	1
3.2	0,17	0,18	0,19	0,20	0,21	0,22	0,23	0,24	0,25	0,26	1
3.3	0,27	0,28	0,30	0,31	0,33	0,34	0,36	0,37	0,39	0,41	2
	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	
3.4	0,43	0,45	0,47	0,49	0,52	0,54	0,57	0,59	0,62	0,65	3
3.5	0,68	0,71	0,75	0,78	0,82	0,86	0,90	0,94	0,98	1,03	5
3.6	1,08	1,13	1,18	1,24	1,30	1,36	1,42	1,49	1,56	1,64	7
3.7	1,71	1,79	1,88	1,97	2,06	2,16	2,26	2,36	2,47	2,59	12
3.8	2,71	2,84	2,98	3,12	3,26	3,42	3,58	3,75	3,92	4,11	19
	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	
3.90	4,30	4,32	4,34	4,36	4,38	4,40	4,42	4,44	4,46	4,48	2
3.91	4,50	4,52	4,55	4,57	4,59	4,61	4,63	4,65	4,67	4,69	3
3.92	4,72	4,74	4,76	4,78	4,80	4,83	4,85	4,87	4,89	4,92	2
3.93	4,94	4,96	4,98	5,01	5,03	5,05	5,08	5,10	5,12	5,15	2
3.94	5,17	5,20	5,22	5,24	5,27	5,29	5,32	5,34	5,37	5,39	3
	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	
3.95	5,42	5,44	5,47	5,49	5,52	5,54	5,57	5,59	5,62	5,64	3
3.96	5,67	5,70	5,72	5,75	5,78	5,80	5,83	5,86	5,88	5,91	3
3.97	5,94	5,96	5,99	6,02	6,05	6,08	6,10	6,13	6,16	6,19	3
3.98	6,22	6,25	6,27	6,30	6,33	6,36	6,39	6,42	6,45	6,48	3
3.99	6,51	6,54	6,57	6,60	6,63	6,66	6,69	6,72	6,75	6,79	3
	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	
4.00	6,82	6,85	6,88	6,91	6,94	6,98	7,01	7,04	7,07	7,11	3
4.01	7,14	7,17	7,20	7,24	7,27	7,30	7,34	7,37	7,41	7,44	3
4.02	7,47	7,51	7,54	7,58	7,61	7,65	7,68	7,72	7,76	7,79	4
4.03	7,83	7,86	7,90	7,94	7,97	8,01	8,05	8,08	8,12	8,16	4
4.04	8,20	8,23	8,27	8,31	8,35	8,39	8,43	8,46	8,50	8,54	4
	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	
4.05	8,58	8,62	8,66	8,70	8,74	8,78	8,82	8,86	8,90	8,94	5
4.06	8,99	9,03	9,07	9,11	9,15	9,20	9,24	9,28	9,32	9,37	4
4.07	9,41	9,45	9,50	9,54	9,59	9,63	9,67	9,72	9,76	9,81	4
4.08	9,85	9,90	9,95	9,99	10,04	10,08	10,13	10,18	10,22	10,27	5
4.09	10,32	10,37	10,41	10,46	10,51	10,56	10,61	10,66	10,71	10,75	5
	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	
4.10	10,80	10,85	10,90	10,95	11,01	11,06	11,11	11,16	11,21	11,26	5
4.11	11,31	11,37	11,42	11,47	11,52	11,58	11,63	11,68	11,74	11,79	6
4.12	11,85	11,90	11,96	12,01	12,07	12,12	12,18	12,23	12,29	12,35	6
4.13	12,41	12,46	12,52	12,58	12,63	12.69	12,75	12,81	12,87	12,93	6
4.14	12,99	13,05	13,11	13,17	13,23	13,29	13,35	13,42	13,48	13,54	6
	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	
4.15	13,60	13,66	13,73	13,79	13,85	13,92	13,98	14,05	14,11	14,18	6
4.16	14,24	14,31	14,37	14,44	14,51	14,57	14,64	14,71	14,78	14,85	6
4.17	14,91	14,98	15,05	15,12	15,19	15,26	15,33	15,40	15,47	15,55	7
4.18	15,62	15,69	15,76	15,83	15,91	15,98	16,05	16,13	16,20	16,28	7
4.19	16,35	16,43	16,50	16,58	16,66	16,73	16,81	16,89	16,97	17,05	7

(vgl. S. 436.)

Trigonometrische Höhenmessung.

Näherungswerte $h = a\, tang\, \alpha + \frac{1-k}{2r} a^2$

$(log\, r = 6.80380 \quad k = 0{,}16)$

Höhen-winkel α	Entfernung a in Kilometern. 2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
0° 0′	0	1	2	4	7	10	13	17	21	26	32	38	45	52	59	68	76	86	95	106
0° 5′	3	7	11	16	21	27	33	40	48	55	64	73	83	93	104	114	126	138	151	164
0° 10′	6	13	20	28	36	44	54	64	74	85	96	108	121	134	147	160	175	191	207	223
0° 15′	9	19	29	39	50	62	74	87	100	114	128	143	159	175	191	207	225	243	262	281
0° 20′	12	24	37	51	65	79	95	110	126	143	160	178	297	215	235	253	274	296	317	338
0° 25′	15	30	46	63	79	97	115	134	152	172	192	213	234	256	278	300	324	348	373	396
0° 30′	18	36	55	74	94	114	135	157	179	201	224	248	272	296	321	347	373	401	427	454
0° 35′	21	42	64	86	109	132	156	180	205	230	256	283	310	337	365	393	423	452	482	512
0° 40′	24	48	72	97	123	149	176	203	231	259	288	318	347	377	408	440	472	504	537	570
0° 45′	27	54	81	109	138	167	197	227	257	289	320	353	385	418	452	486	521	556	592	629
0° 50′	29	59	90	121	152	184	217	250	284	318	352	388	423	459	496	533	570	609	648	687
0° 55′	32	65	99	132	167	202	237	273	310	347	385	423	460	500	539	579	620	661	703	745
1° 0′	35	71	107	144	181	219	258	297	336	376	416	457	498	540	583	626	669	714	758	803
1° 5′	38	77	116	156	196	237	278	320	362	405	448	492	536	581	626	672	719	766	814	862
1° 10′	41	83	125	167	210	254	299	343	388	434	480	527	574	622	670	719	768	818	869	920
1° 15′	44	89	134	179	225	272	319	367	415	463	512	562	612	663	714	766	818	871	924	978
1° 20′	47	94	142	191	240	289	339	390	441	492	544	597	650	703	757	812	867	923	980	
1° 25′	50	100	151	202	254	307	360	413	467	521	576	632	687	744	801	859	917	976		
	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m			
1° 30′	53	106	160	214	269	324	380	437	493	550	608	666	725	785	845	905	966			
1° 35′	56	112	168	226	283	342	401	460	519	579	640	701	763	826	888	952				
1° 40′	59	118	177	237	298	359	421	483	545	608	672	736	801	866	932	999				
1° 45′	61	123	186	249	313	377	441	506	571	637	704	771	839	907	976					
1° 50′	64	129	195	261	327	394	462	529	597	667	736	806	877	948						
1° 55′	67	135	203	273	342	412	482	552	624	696	768	841	914	989						
	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m							
2° 0′	70	141	212	284	356	429	502	576	650	725	800	876	952							
2° 5′	73	147	221	296	371	446	522	599	676	254	832	911	990							
2° 10′	76	153	230	307	385	463	543	622	702	783	864	946								
2° 15′	79	158	238	319	400	481	563	646	729	812	896	981								
2° 20′	82	164	247	331	414	498	583	669	755	841	928									
2° 25′	85	170	256	342	429	516	604	692	781	870	960									
	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m									
2° 30′	88	176	265	354	444	533	624	715	807	900	992									
2° 35′	91	182	273	366	458	551	645	739	833	929										
2° 40′	94	188	282	377	473	568	665	762	860	958										
2° 45′	96	193	291	389	487	586	685	785	886	988										
2° 50′	99	199	800	401	502	603	706	809	912											
2° 55′	102	205	308	412	517	621	726	832	938											
	m	m	m	m	m	m	m	m	m											
3° 0′	105	211	317	424	532	639	747	856	965											
3° 5′	108	217	326	435	545	656	767	879	991											
3° 10′	111	222	334	447	560	674	788	902												
3° 15′	114	228	343	458	574	691	808	926												
3° 20′	118	234	352	470	589	708	828	949												
3° 25′	120	240	361	482	604	726	849	972												
3° 30′	123	246	369	493	618	743	869	996												

(vgl. S. 436.)

Verwandlung von Barometer- und Thermometer-Teilungen.

I. Barometer-Teilungen.

Verwandlung von Pariser Linien und Pariser Zollen in Millimeter.
1 Pariser Linie = 2,255829 Millimeter, 1 Pariser Zoll = 27,069948 Millimeter.

Par. L.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
250	563,96	566,21	568,47	570,72	572,98	575,24	577,49	579,75	582,00	584,26
260	586,52	588,77	591,03	593,28	595,54	597,79	600,05	602,31	602,56	606,82
270	609,07	611,33	613,59	615,84	618,10	620,35	622,61	624,86	627,12	629,38
280	631,63	633,89	636,14	638,40	640,66	642,91	645,17	647,42	649,68	651,93
290	654,19	656,45	658,70	660,96	663,21	665,47	667,73	669,98	672,24	674,49
300	676,75	679,00	681,26	683,52	685,77	688,03	690,28	692,54	694,80	697,05
310	699,31	701,56	703,82	706,07	708,33	710,59	712,84	715,10	717,35	719,61
320	721,87	724,12	726,38	728,63	730,89	733,14	735,40	737,66	739,91	742,17
330	744,42	746,68	748,94	751,19	753,45	755,70	757,96	760,21	762,47	764,73
340	766,98	769,24	771,49	773,75	776,01	778,26	780,52	782,77	785,03	787,28

Par. L.	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
0,0	0,00	0,02	0,05	0,07	0,09	0,11	0,14	0,16	0,18	0,20
0,1	0,23	0,25	0,27	0,29	0,32	0,34	0,36	0,38	0,41	0,43
0,2	0,45	0,47	0,50	0,52	0,54	0,56	0,59	0,61	0,63	0,65
0,3	0,68	0,70	0,72	0,74	0,77	0,79	0,81	0,83	0,86	0,88
0,4	0,90	0,92	0,95	0,97	0,99	1,02	1,04	1,06	1,08	1,11
0,5	1,13	1,15	1,17	1,20	1,22	1,24	1,26	1,29	1,31	1,33
0,6	1,35	1,38	1,40	1,42	1,44	1,47	1,49	1,51	1,53	1,56
0,7	1,58	1,60	1,62	1,65	1,67	1,69	1,71	1,74	1,76	1,78
0,8	1,80	1,83	1,85	1,87	1,89	1,92	1,94	1,96	1,99	2,01
0,9	2,03	2,05	2,08	2,10	2,12	2,14	2,17	2,19	2,21	2,23

21″ = 252‴ = 568,47 mm 24″ = 288‴ = 649,68 mm 27″ = 324‴ = 730,89 mm
22 = 264 = 595,54 25 = 300 = 676,75 28 = 336 = 757,96
23 = 276 = 622,61 26 = 312 = 703,82 29 = 348 = 785,03

II. Thermometer-Teilungen.

Vergleichung zwischen *Celsius*, *Réaumur* und *Fahrenheit*.

Temperaturen.

C	R	F
+ 100°	+ 80°	+ 212°
+ 50	+ 40	+ 122
+ 40	+ 32	+ 104
+ 30	+ 24	+ 86
+ 20	+ 16	+ 68
+ 10	+ 8	+ 50
0	0	+ 32
− 10	− 8	+ 14
− 17,78	− 14,22	0
− 20	− 16	− 4
− 30	− 24	− 22

Temperaturunterschiede.

ΔF	ΔC	ΔR	ΔF	ΔC	ΔR
°	°	°	°	°	°
1	0,56	0,44	10	5,56	4,44
2	1,11	0,89	11	6,11	4,89
3	1,67	1,33	12	6,67	5,33
4	2,22	1,78	13	7,22	5,78
5	2,78	2,22	14	7,78	6,22
6	3,33	2,67	15	8,33	6,67
7	3,89	3,11	16	8,89	7,11
8	4,44	3,56	17	9,44	7,56
9	5,00	4,00	18	10,00	8,00

$$C = \frac{10}{8} R \qquad \Delta C = \frac{10}{8} \Delta R = 1{,}25\, \Delta R$$

$$C = \frac{10}{18} (F - 32°) \qquad \Delta C = \frac{10}{18} \Delta F = 0{,}555\,..\, \Delta F$$

$$R = \frac{8}{18} (F - 32°) \qquad \Delta R = \frac{8}{18} \Delta F = 0{,}444\,..\, \Delta F$$

(vgl. S. 479 und S. 514—515.)

Reduktion des Quecksilber-Barometers auf 0°

ohne Rücksicht auf die Ausdehnung des Massstabes $-0{,}000180\,B\,t$.

t C°	Barometerstand B in Millimetern.													t C
	600	620	640	660	680	700	710	720	730	740	750	760	770	
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	
1°	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	1°
2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	2
3	0,3	0,3	0,3	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	3
4	0,4	0,4	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,6	4
5	0,5	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	5
6°	0,6	0,7	0,7	0,7	0,7	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	6°
7	0,8	0,8	0,8	0,8	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	1,0	1,0	7
8	0,9	0,9	0,9	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	8
9	1,0	1,0	1,0	1,1	1,1	1,1	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	9
10	1,1	1,1	1,2	1,2	1,2	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,4	1,4	10
11°	1,2	1,2	1,3	1,3	1,3	1,4	1,4	1,4	1,4	1,5	1,5	1,5	1,5	11°
12	1,3	1,3	1,4	1,4	1,5	1,5	1,5	1,6	1,6	1,6	1,6	1,6	1,7	12
13	1,4	1,5	1,5	1,5	1,6	1,6	1,7	1,7	1,7	1,7	1,8	1,8	1,8	13
14	1,5	1,6	1,6	1,7	1,7	1,8	1,8	1,8	1,8	1,9	1,9	1,9	1,9	14
15	1,6	1,7	1,7	1,8	1,8	1,9	1,9	1,9	2,0	2,0	2,0	2,1	2,1	15
16°	1,7	1,8	1,8	1,9	2,0	2,0	2,0	2,1	2,1	2,1	2,2	2,2	2,2	16°
17	1,8	1,9	2,0	2,0	2,1	2,1	2,2	2,2	2,2	2,3	2,3	2,3	2,4	17
18	1,9	2,0	2,1	2,1	2,2	2,3	2,3	2,3	2,4	2,4	2,4	2,5	2,5	18
19	2,1	2,1	2,2	2,3	2,3	2,4	2,4	2,5	2,5	2,5	2,6	2,6	2,6	19
20	2,2	2,2	2,3	2,4	2,4	2,5	2,6	2,6	2,6	2,7	2,7	2,7	2,8	20
21°	2,3	2,3	2,4	2,5	2,6	2,6	2,7	2,7	2,8	2,8	2,8	2,9	2,9	21°
22	2,4	2,5	2,5	2,6	2,7	2,8	2,8	2,9	2,9	2,9	3,0	3,0	3,0	22
23	2,5	2,6	2,6	2,7	2,8	2,9	2,9	3,0	3,0	3,1	3,1	3,1	3,2	23
24	2,6	2,7	2,8	2,9	2,9	3,0	3,1	3,1	3,2	3,2	3,2	3,3	3,3	24
25	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	3,1	3,2	3,2	3,3	3,3	3,4	3,4	3,5	25
26°	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	3,3	3,4	3,4	3,5	3,5	3,6	3,6	26°
27	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,5	3,5	3,6	3,6	3,7	3,7	27
28	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,6	3,7	3,7	3,8	3,8	3,9	28
29	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,7	3,7	3,8	3,8	3,9	3,9	4,0	4,0	29
30	3,2	3,3	3,5	3,6	3,7	3,8	3,8	3,9	3,9	4,0	4,0	4,1	4,2	30
31°	3,3	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	4,0	4,1	4,1	4,2	4,2	4,3	31°
32	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1	4,1	4,2	4,3	4,3	4,4	4,4	32
33	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	4,2	4,2	4,3	4,3	4,4	4,5	4,5	4,6	33
34	3,7	3,8	3,9	4,0	4,2	4,3	4,3	4,4	4,5	4,5	4,6	4,7	4,7	34
35	3,8	3,9	4,0	4,2	4,3	4,4	4,5	4,5	4,6	4,7	4,7	4,8	4,9	35

Für den Rechenschieber: $-0{,}000\,180\,B\,t = -\frac{556}{B}\,\frac{t}{10}$

(vgl. S. 476.)

Reduktion des Quecksilber-Barometers auf 0°

für Messingskale mit der Normaltemperatur 0°, — 0,000162 $B\,t$.

t C°	Barometerstand B in Millimetern.												t C°
	600	620	640	660	680	700	710	720	730	740	750	760	
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	
1°	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	1°
2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	2
3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,4	0,4	0,4	0,4	3
4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	4
5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	5
6°	0,6	0,6	0,6	0,6	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	6°
7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,9	0,9	7
8	0,8	0,8	0,8	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	1,0	1,0	1,0	8
9	0,9	0,9	0,9	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,1	1,1	1,1	1,1	9
10	1,0	1,0	1,0	1,1	1,1	1,1	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	10
11°	1,1	1,1	1,1	1,2	1,2	1,2	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,4	11°
12	1,2	1,2	1,2	1,3	1,3	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,5	1,5	12
13	1,3	1,3	1,3	1,4	1,4	1,5	1,5	1,5	1,5	1,6	1,6	1,6	13
14	1,4	1,4	1,5	1,5	1,5	1,6	1,6	1,6	1,7	1,7	1,7	1,7	14
15	1,5	1,5	1,6	1,6	1,7	1,7	1,7	1,7	1,8	1,8	1,8	1,8	15
16°	1,6	1,6	1,7	1,7	1,8	1,8	1,8	1,9	1,9	1,9	1,9	2,0	16°
17	1,7	1,7	1,8	1,8	1,9	1,9	2,0	2,0	2,0	2,0	2,1	2,1	17
18	1,7	1,8	1,9	1,9	2,0	2,0	2,1	2,1	2,1	2,2	2,2	2,2	18
19	1,8	1,9	2,0	2,0	2,1	2,2	2,2	2,2	2,2	2,3	2,3	2,3	19
20	1,9	2,0	2,1	2,1	2,2	2,3	2,3	2,3	2,4	2,4	2,4	2,5	20
21°	2,0	2,1	2,2	2,2	2,3	2,4	2,4	2,4	2,5	2,5	2,6	2,6	21°
22	2,1	2,2	2,3	2,4	2,4	2,5	2,5	2,6	2,6	2,6	2,7	2,7	22
23	2,2	2,3	2,4	2,5	2,5	2,6	2,6	2,7	2,7	2,8	2,8	2,8	23
24	2,3	2,4	2,5	2,6	2,6	2,7	2,8	2,8	2,8	2,9	2,9	3,0	24
25	2,4	2,5	2,6	2,8	2,8	2,8	2,9	2,9	3,0	3,0	3,0	3,1	25
26°	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	2,9	3,0	3,0	3,1	3,1	3,2	3,2	26°
27	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	3,1	3,1	3,2	3,2	3,3	3,3	27
28	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,2	3,3	3,3	3,4	3,4	3,5	28
29	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	3,3	3,4	3,4	3,5	3,5	3,6	29
30	2,9	3,0	3,1	3.2	3,3	3,4	3,5	3,5	3,5	3,6	3,6	3,7	30
31°	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,6	3,7	3,7	3,8	3,8	31°
32	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,7	3,8	3,8	3,9	3,9	32
33	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,8	3,9	4,0	4,0	4,1	33
34	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,9	3,9	4,0	4,0	4,1	4,1	4,2	34
35	3,4	3,5	3,6	3,7	3,9	4,0	4,0	4,1	4,1	4,2	4,3	4,3	35

Für den Rechenschieber: $-\,0{,}000\,162\,B\,t = -\dfrac{617}{B}\,\dfrac{t}{10}$

(vgl. S. 477 und S. 487.)

Reduktion des Quecksilber-Barometers auf 0°

für Messingskale mit der Normaltemperatur 0°,

zugleich mit einer Gefäss-Korrektion

für den Normalstand 750mm und das Durchmesserverhältniss 1 : 10.

$-(0{,}000162\,B\,t - 0{,}01\,(B - 750))$.

t	Barometerstand B in Millimetern									t
	730	735	740	745	750	755	760	765	770	
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	
9,0°	1,26	1,22	1,18	1,14	1,09	1,05	1,01	0,97	0,92	9,0°
9,5	1,32	1,28	1,24	1,20	1,15	1,11	1,07	1,03	0,99	9,5
10,0	1,38	1,34	1,30	1,26	1,21	1,17	1,13	1,09	1,05	10,0
10,5	1,44	1,40	1,36	1,32	1,28	1,23	1,19	1,15	1,11	10,5
11,0	1,50	1,46	1,42	1,38	1,34	1,30	1,25	1,21	1,17	11,0
11,5	1,56	1,52	1,48	1,44	1,40	1,36	1,32	1,28	1,23	11,5
12,0°	1,62	1,58	1,54	1,50	1,46	1,42	1,38	1,36	1,30	12,0°
12,5	1,68	1,64	1,60	1,56	1,52	1,48	1,44	1,40	1,36	12,5
13,0	1,74	1,70	1,66	1,62	1,58	1,54	1,50	1,46	1,42	13,0
13,5	1,80	1,76	1,72	1,68	1,64	1,60	1,56	1,52	1,48	13,5
14,0	1,86	1,82	1,78	1,74	1,70	1,66	1,62	1,59	1,55	14,0
14,5	1,91	1,88	1,84	1,80	1,76	1,72	1,69	1,65	1,61	14,5
15,0°	1,97	1,94	1,90	1,86	1,82	1,78	1,75	1,71	1,67	15,0°
15,5	2,03	2,00	1,96	1,92	1,88	1,85	1,81	1,77	1,73	15,5
16,0	2,09	2,06	2,02	1,98	1,94	1,91	1,87	1,83	1,80	16,0
16,5	2,15	2,11	2,08	2,04	2,00	1,97	1,93	1,89	1,86	16,5
17,0	2,21	2,17	2,14	2,10	2,07	2,03	1,99	1,96	1,92	17,0
17,5	2,27	2,23	2,20	2,16	2,13	2,09	2,05	2,02	1,98	17,5
18,0°	2,33	2,29	2,26	2,22	2,19	2,15	2,12	2,08	2,05	18,0°
18,5	2,39	2,35	2,32	2,28	2,25	2,21	2,18	2,14	2,11	18,5
19,0	2,45	2,41	2,38	2,34	2,31	2,27	2,24	2,20	2,17	19,0
19,5	2,51	2,47	2,44	2,40	2,37	2,34	2,30	2,27	2,23	19,5
20,0	2,57	2,53	2,50	2,46	2,43	2,40	2,36	2,33	2,29	20,0
20,5	2,62	2,59	2,56	2,52	2,49	2,46	2,42	2,39	2,36	20,5
21,0°	2,68	2,65	2,62	2,58	2,55	2,52	2,49	2,45	2,42	21,0°
21,5	2,74	2,71	2,68	2,64	2,61	2,58	2,55	2,51	2,48	21,5
22,0	2,80	2,77	2,74	2,71	2,67	2,64	2,61	2,58	2,54	22,0
22,5	2,86	2,83	2,80	2,77	2,73	2,70	2,67	2,64	2,61	22,5
23,0	2,92	2,89	2,86	2,83	2,79	2,76	2,73	2,70	2,67	23,0
23,5	2,98	2,95	2,92	2,89	2,86	2,82	2,79	2,76	2,73	23,5
24,0°	3,04	3,01	2,98	2,95	2,92	2,89	2,85	2,82	2,79	24,0°
24,5	3,10	3,07	3,04	3,01	2,98	2,95	2,92	2,89	2,86	24,5
25,0	3,16	3,13	3,10	3,07	3,04	3,01	2,98	2,95	2,92	25,0
25,5	3,22	3,19	3,16	3,13	3,10	3,07	3,04	3,01	2,98	25,5
26,0	3,27	3,25	3,22	3,19	3,16	3,13	3,10	3,07	3,04	26,0
26,5	3,33	3,31	3,28	3,25	3,22	3,19	3,16	3,13	3,11	26,5

(vgl. S. 479 und S. 486.)

Capillardepression in Barometerröhren

als Funktion des inneren Röhrendurchmessers und der Kuppenhöhe.

Kuppenhöhe	Innerer Durchmesser der Glasröhre in Millimetern												Kuppenhöhe
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
0,00	0,0	0,0	0,0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,05	0,3	0,1	0,1	0,06	0,04	0,03	0,02	0,02	0,01	0,01	0,00	0,00	0,05
0,10	0,6	0,3	0,2	0,12	0,08	0,06	0,04	0,03	0,02	0,02	0,01	0,01	0,10
0,15	0,9	0,4	0,3	0,18	0,13	0,09	0,07	0,05	0,04	0,03	0,02	0,02	0,15
0,20	1,1	0,6	0,4	0,24	0,17	0,12	0,09	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,20
0,25	1,4	0,8	0,5	0,30	0,21	0,15	0,11	0,08	0,06	0,05	0,04	0,03	0,25
0,30	1,5	0,9	0,6	0,36	0,25	0,18	0,13	0,10	0,07	0,06	0,04	0,03	0,30
0,35	1,8	1,0	0,6	0,42	0,29	0,21	0,15	0,11	0,08	0,07	0,05	0,04	0,35
0,40	2,1	1,2	0,7	0,48	0,33	0,24	0,17	0,13	0,10	0,07	0,06	0,04	0,40
0,45	2,3	1,3	0,8	0,53	0,37	0,27	0,20	0,15	0,11	0,08	0,07	0,05	0,45
0,50	2,5	1,4	0,9	0,59	0,41	0,29	0,22	0,16	0,12	0,09	0,07	0,05	0,50
0,55	2,7	1,5	0,9	0,64	0,45	0,32	0,24	0,18	0,13	0,10	0,08	0,06	0,55
0,60	2,9	1,6	1,0	0,70	0,49	0,35	0,26	0,19	0,14	0,11	0,08	0,06	0,60
0,65	3,0	1,8	1,1	0,75	0,52	0,37	0,28	0,21	0,16	0,12	0,09	0,07	0,65
0,70	3,1	1,9	1,2	0,80	0,56	0,40	0,30	0,22	0,17	0,13	0,10	0,07	0,70
0,75	3,2	2,0	1,3	0,85	0,60	0,43	0,32	0,24	0,18	0,14	0,10	0,08	0,75
0,80		2,0	1,3	0,90	0,63	0,45	0,34	0,25	0,19	0,14	0,11	0,08	0,80
0,85		2,1	1,4	0,94	0,66	0,48	0,35	0,26	0,20	0,15	0,12	0,09	0,85
0,90		2,2	1,4	0,98	0,70	0,50	0,37	0,28	0,21	0,16	0,12	0,09	0,90
0,95		2,3	1,5	1,03	0,73	0,53	0,39	0,29	0,22	0,17	0,13	0,10	0,95
1,00			1,6	1,07	0,76	0,55	0,41	0,30	0,23	0,18	0,13	0,10	1,00
1,05			1,6	1,10	0,79	0,57	0,42	0,32	0,24	0,18	0,14	0,11	1,05
1,10			1,7	1,14	0,82	0,59	0,44	0,33	0,25	0,19	0,15	0,11	1,10
1,15			1,7	1,18	0,84	0,61	0,46	0,34	0,26	0,20	0,15	0,12	1,15
1,20			1,7	1,21	0,87	0,63	0,47	0,35	0,27	0,20	0,16	0,12	1,20
1,25			1,8	1,24	0,89	0,65	0,49	0,37	0,28	0,21	0,16	0,13	1,25
1,30			1,8	1,27	0,92	0,67	0,50	0,38	0,29	0,22	0,17	0,13	1,30
1,35			1,8	1,30	0,94	0,69	0,52	0,39	0,29	0,22	0,17	0,13	1,35
1,40			1,9	1,32	0,96	0,71	0,53	0,40	0,30	0,23	0,18	0,14	1,40
1,45			1,9	1,34	0,98	0,72	0,54	0,41	0,31	0,24	0,18	0,14	1,45
1,50			2,0	1,37	1,00	0,74	0,55	0,42	0,32	0,24	0,19	0,14	1,50
1,55			2,0	1,39	1,01	0,75	0,56	0,43	0,32	0,25	0,19	0,15	1,55
1,60				1,41	1,03	0,77	0,58	0,44	0,33	0,25	0,20	0,15	1,60
1,65				1,42	1,04	0,78	0,59	0,44	0,34	0,26	0,20	0,15	1,65
1,70				1,44	1,06	0,79	0,60	0,45	0,34	0,26	0,20	0,16	1,70
1,75				1,45	1,07	0,80	0,60	0,46	0,35	0,27	0,21	0,16	1,75
1,80				1,46	1,08	0,81	0,61	0,47	0,36	0,27	0,21	0,16	1,80

(vgl. S. 480 und S. 486—487.)

Schwere-Reduktion.

log $(1 + \beta \cos 2\varphi)$ mit $\beta = 0{,}00265$ nach *Helmert*.

φ	log	d	φ	log	d	φ	log	d
0°	0.001 149	−0	30°	0.000 575	−35	60°	9.999 424	−34
1	0.001 149	2	31	0.000 540	36	61	9.999 390	34
2	0.001 147	4	32	0.000 504	37	62	9.999 356	33
3	0.001 143	5	33	0.000 467	36	63	9.999 323	32
4	0.001 138	6	34	0.000 431	37	64	9.999 291	31
5°	0.001 132	8	35°	0.000 394	39	65°	9.999 260	31
6	0.001 124	9	36	0.000 355	38	66	9.999 229	29
7	0.001 115	10	37	0.000 317	39	67	9.999 200	29
8	0.001 105	12	38	0.000 278	39	68	9.999 171	27
9	0.001 093	13	39	0.000 239	39	69	9.999 144	27
10°	0.001 080	14	40°	0.000 200	40	70°	9.999 117	25
11	0.001 066	16	41	0.000 160	40	71	9.999 092	24
12	0.001 050	17	42	0.000 120	40	72	9.999 068	24
13	0.001 033	18	43	0.000 080	40	73	9.999 044	21
14	0.001 015	19	44	0.000 040	40	74	9.999 023	21
15°	0.000 996	21	45°	0.000 000	40	75°	9.999 002	19
16	0.000 975	22	46	9.999 960	40	76	9.998 983	19
17	0.000 953	23	47	9.999 920	40	77	9.998 964	17
18	0.000 930	24	48	9.999 880	40	78	9.998 947	16
19	0.000 906	25	49	9.999 840	40	79	9.998 931	14
20°	0.000 881	26	50°	9.999 800	39	80°	9.998 917	13
21	0.000 855	28	51	9.999 761	39	81	9.998 904	12
22	0.000 827	28	52	9.999 722	39	82	9.998 892	11
23	0.000 799	29	53	9.999 683	39	83	9.998 881	8
24	0.000 770	31	54	9.999 644	38	84	9.998 873	8
25°	0.000 739	31	55°	9.999 606	37	85°	9.998 865	6
26	0.000 708	32	56	9.999 569	37	86	9.998 859	5
27	0.000 676	33	57	9.999 532	37	87	9.998 854	3
28	0.000 643	34	58	9.999 495	36	88	9.998 851	2
29	0.000 609	34	59	9.999 459	35	89	9.998 849	1
30	0.000 575		60	9.999 524		90	9.998 848	

log $\left(1 + \frac{2H}{r}\right)$ mit $r = 6\,370\,000^m$

H	log	d	H	log	d	H	log	d
0^m	0.000 000	14	500^m	0.000 068	14	1000^m	0.000 136	14
100	0.000 014	13	600	0.000 082	13	1100	0.000 150	14
200	0.000 027	14	700	0.000 095	14	1200	0.000 164	13
300	0.000 041	14	800	0.000 109	14	1300	0.000 177	14
400	0.000 055	13	900	0.000 123	13	1400	0.000 191	14
500	0.000 068		1000	0.000 136		1500	0.000 205	

$$g_0^{45} = g\,(1 + \beta \cos 2\varphi)\left(1 + \frac{2H}{r}\right) \quad , \quad B_0^{45} = B\,(1 - \beta \cos 2\varphi)\left(1 - \frac{2H}{r}\right)$$

$$g_0^{45} = 9{,}80596 \quad , \quad \beta = 0{,}00265.$$

Auf 5—6 Logarithmenstellen genau kann man annehmen:

$$1 - \beta \cos 2\varphi = \frac{1}{1 + \beta \cos 2\varphi} \quad \text{und} \quad 1 - \frac{2H}{r} = \frac{1}{1 + \frac{2H}{r}}$$

Für Höhen über 1500^m kann man annehmen *log* $\left(1 + 10\,\frac{2H}{r}\right) = 10$ *log* $\left(1 + \frac{2H}{r}\right)$

(vgl. S. 483 und S. 484.)

Schwere-Reduktion des Quecksilber-Barometers.

$$B_0^{45} - B = -\beta B \cos 2\varphi - 2\frac{BH}{r}, \text{ mit } \beta = 0{,}00265 \text{ nach } \textit{Helmert}.$$
$$r = 3700000^m.$$

Breite φ	Barometerstand B^{mm} (und Höhe H^m über dem Meer)										
	760mm (0m)	750mm (115m)	740mm (230m)	730mm (345m)	720mm (460m)	710mm (575m)	700mm (690m)	690mm (805m)	680mm (920m)	670mm (1035m)	660mm (1150m)
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	m	mm	mm	mm
0°	—2,01	—2,01	—2,01	— 2,01	— 2,01	— 2,01	— 2,01	— 2,00	— 2,00	— 1,99	— 1,99
5	1,98	1,98	1,98	1,98	1,98	1,98	1,98	1,97	1,97	1,96	1,96
10	1,89	1,89	1,90	1,90	1,90	1,89	1,90	1,89	1,89	1,89	1,88
15	1,74	1,75	1,75	1,75	1,76	1,76	1,76	1,76	1,76	1,76	1,75
20	1,54	1,55	1,56	1,56	1,57	1,57	1,57	1,58	1,58	1,58	1,58
25	1,29	1,30	1,31	1,32	1,33	1,34	1,34	1,35	1,35	1,36	1,36
30°	—1,01	—1,02	—1,03	— 1,05	— 1,06	— 1,07	— 1,08	— 1,09	— 1,10	— 1,10	— 1,11
31	0,95	0,96	0,97	0,99	1,00	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05	1,06
32	0,88	0,90	0,91	0,93	0,94	0,95	0,96	0,98	0,99	1,00	1,01
33	0,82	0,84	0,85	0,87	0,88	0,89	0,91	0,92	0,93	0,94	0,95
34	0,75	0,77	0,79	0,80	0,82	0,83	0,85	0,86	0,87	0,88	0,89
35°	—0,69	—0,71	—0,72	— 0,74	— 0,76	— 0,77	— 0,79	— 0,80	— 0,81	— 0,82	— 0,84
36	0,62	0,64	0,66	0,68	0,69	0,71	0,72	0,74	0,75	0,77	0,78
37	0,56	0,58	0,59	0,61	0,63	0,64	0,66	0,68	0,69	0,71	0,72
38	0,49	0,51	0,53	0,55	0,56	0,58	0,60	0,62	0,63	0,65	0,66
39	0,42	0,44	0,46	0,48	0,50	0,52	0,54	0,55	0,57	0,59	0,60
40°	—0,35	—0,37	—0,39	— 0,42	— 0,44	— 0,45	— 0,47	— 0,49	— 0,50	— 0,53	— 0,54
41	0,28	0,30	0,33	0,35	0,37	0,39	0,41	0,43	0,45	0,46	0,48
42	0,21	0,24	0,26	0,28	0,30	0,33	0,35	0,37	0,38	0,40	0,42
43	0,14	0,16	0,19	0,21	0,24	0,26	0,28	0,30	0,32	0,34	0,36
44	0,07	0,09	0,12	0,15	0,17	0,19	0,23	0,24	0,26	0,28	0,30
45°	—0,00	—0,03	—0,05	— 0,08	— 0,10	— 0,13	— 0,15	— 0,17	— 0,20	— 0,22	— 0,24
46	+0,07	+0,04	+0,02	— 0,01	— 0,04	— 0,06	— 0,09	— 0,11	— 0,13	— 0,16	— 0,18
47	+0,14	+0,11	+0,08	+ 0,06	+ 0,03	0,00	— 0,02	— 0,05	— 0,07	— 0,09	— 0,12
48	+0,21	+0,18	+0,15	+ 0,12	+ 0,10	+ 0,07	+ 0,04	+ 0,02	— 0,01	— 0,03	— 0,06
49	+0,28	+0,25	+0,22	+ 0,19	+ 0,16	+ 0,14	+ 0,11	+ 0,08	+ 0,05	+ 0,03	+ 0,00
50°	+0,35	+0,32	+0,29	+ 0,26	+ 0,23	+ 0,20	+ 0,17	+ 0,14	+ 0,12	+ 0,09	+ 0,06
51	0,42	0,39	0,36	0,32	0,29	0,27	0,23	0,21	0,18	0,15	0,12
52	0,49	0,44	0,42	0,39	0,36	0,33	0,30	0,27	0,24	0,21	0,18
53	0,56	0,52	0,49	0,45	0,42	0,38	0,36	0,33	0,30	0,27	0,24
54	0,62	0,59	0,55	0,52	0,49	0,46	0,42	0,39	0,36	0,33	0,30
55°	+0,69	+0,65	+0,62	+ 0,58	+ 0,55	+ 0,52	+ 0,48	+ 0,45	+ 0,42	+ 0,39	+ 0,36
56	0,75	0,72	0,68	0,64	0,61	0,58	0,54	0,51	0,48	0,45	0,42
57	0,82	0,78	0,74	0,71	0,67	0,64	0,60	0,58	0,54	0,50	0,47
58	0,88	0,84	0,81	0,77	0,73	0,70	0,66	0,63	0,59	0,56	0,53
59	0,95	0,91	0,87	0,83	0,79	0,76	0,72	0,68	0,65	0,62	0,68
60°	+1,01	+0,97	+0,93	+ 0,89	+ 0,85	+ 0,81	+ 0,88	+ 0,74	+ 0,70	+ 0,67	+ 0,64
65	1,29	1,25	1,21	1,16	1,12	1,08	1,04	1,00	0,99	0,92	0,88
70	1,54	1,50	1,45	1,40	1,36	1,32	1,27	1,23	1,18	1,14	1,10
75	1,74	1,69	1,64	1,60	1,55	1,50	1,46	1,41	1,36	1,32	1,28
80	1,89	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,59	1,54	1,50	1,45	1,40
85	1,98	1,93	1,88	1,83	1,78	1,73	1,68	1,63	1,58	1,53	1,48
90	2,01	1,96	1,91	1,86	1,80	1,76	1,70	1,65	1,61	1,56	1,51

(vgl. S. 484 und S. 485.)

Spannung des gesättigten Wasserdampfes

ausgedrückt in Normal-Barometer-Höhen, d. h. bei 0° Temperatur des Quecksilbers, 13,59593 Dichte des Quecksilbers, 45° geogr. Breite, im Meeresspiegel.

(Travaux et mémoires du bureau international des poids et mesures. I. Seite A. 33—38.)

t	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
0	4,57	4,60	4,64	4,67	4,70	4,74	4,77	4,80	4,84	4,87
1	4,91	4,94	4,98	5,02	5,05	5,09	5,12	5,16	5,20	5,23
2	5,27	5,31	5,35	5,39	5,42	5,46	5,50	5,54	5,58	5,62
3	5,66	5,70	5,74	5,78	5,82	5,86	5,90	5,94	5,98	6,03
4	6,07	6,11	6,15	6,20	6,24	6,28	6,33	6,37	6,42	6,46
5	6,51	6,55	6,60	6,64	6,69	6,74	6,78	6,83	6,88	6,92
6	6,97	7,02	7,07	7,12	7,17	7,22	7,26	7,31	7,36	7,42
7	7,47	7,52	7,57	7,62	7,67	7,72	7,78	7,83	7,88	7,94
8	7,99	8,05	8,10	8,15	8,21	8,27	8,32	8,38	8,43	8,49
9	8,55	8,61	8,66	8,72	8,78	8,84	8,90	8,96	9,02	9,08
10	9,14	9,20	9,26	9,32	9,39	9,45	9,51	9,58	9,64	9,70
11	9,77	9,83	9,90	9,96	10,03	10,09	10,16	10,23	10,30	10,36
12	10,43	10,50	10,57	10,64	10,71	10,78	10,85	10,92	10,99	11,06
13	11,14	11,21	11,28	11,36	11,43	11,50	11,58	11,66	11,73	11,81
14	11,88	11,96	12,04	12,12	12,19	12,27	12,35	12,43	12,51	12,59
15	12,67	12,76	12,84	12,92	13,00	13,09	13,17	13,25	13,34	13,42
16	13,51	13,60	13,68	13,77	13,86	13,95	14,04	14,12	14,21	14,30
17	14,40	14,49	14,58	14,67	14,76	14,86	14,95	15,04	15,14	15,23
18	15,33	15,43	15,52	15,62	15,72	15,82	15,92	16,02	16,12	16,22
19	16,32	16,42	16,52	16,63	16,73	16,83	16,94	17,04	17,15	17,26
20	17,36	17,47	17,58	17,69	17,80	17,91	18,02	18,13	18,24	18,35
21	18,47	18,58	18,69	18,81	18,92	19,04	19,16	19,27	19,39	19,51
22	19,63	19,75	19,87	19,99	20,11	20,24	20,36	20,48	20,61	20,73
23	20,86	20,98	21,11	21,24	21,37	21,50	21,63	21,76	21,89	22,02
24	22,15	22,29	22,42	22,55	22,69	22,83	22,96	23,10	23,24	23,38
25	23,52	23,66	23,80	23,94	24,08	24,23	24,37	24,52	24,66	24,81
26	24,96	25,10	25,25	25,40	25,55	25,70	25,86	26,01	26,16	26,32
27	26,47	26,63	26,78	26,94	27,10	27,26	27,42	27,58	27,74	27,90
28	28,07	28,23	28,39	28,56	28,73	28,89	29,06	29,23	29,40	29,57
29	29,74	29,92	30,09	30,26	30,44	30,62	30,79	31,97	31,15	31,33
30	31,51	31,69	31,87	32,06	32,24	32,43	32,61	32,80	32,99	33,18
31	33,37	33,56	33,75	33,94	34,14	34,33	34,53	34,72	34,92	35,12
32	35,32	35,52	35,72	35,92	36,13	36,33	36,54	36,74	36,95	37,16
33	37,37	37.58	37,79	38,00	38,22	38,43	38,65	38,87	39,08	39,30
34	39,52	39,74	39,97	40,19	40,42	40,64	40,87	41,09	41,32	41,55
35	41,78	42,02	42,25	42,48	42,72	42,96	43,19	43,43	43,67	43,92

Wenn T die Angabe des trockenen Thermometers, t die Angabe des feuchten Thermometers, B der Barometerstand und E der Dunstdruck für das feuchte Thermometer t, nach obiger Tafel ist, so erhält man den Dunstdruck e in der Luft durch die Formel:

$$e = E - \frac{0{,}48\,(T - t)\,B}{610 - t} \quad \text{oder genähert} \quad e = E - 0{,}6\,(T - t)$$

(vgl. S. 514—517.)

Spannung des gesättigten Wasserdampfes

ausgedrückt in Normal-Barometer-Höhen, d. h. bei 0° Temperatur des Quecksilbers, 13,59593 Dichte des Quecksilbers, 45° geogr. Breite, im Meeresspiegel.
(Traveaux et mémoires du bureau international des poids et mesures. I. Seite A. 38—39 und A. 46—48.)

°	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
85	443,19	434,90	436,60	438,32	440,04	441,76	443,49	445,23	446,97	448,72
86	450,47	452,23	454,00	455,77	457,54	459,33	461,11	462,91	464,71	466,51
87	468,32	470,14	471,96	473,79	475,63	477,47	479,32	481,17	483,03	484,89
88	486,76	488,64	490,52	492,41	494,31	496,21	498,12	500,03	501,95	503,87
89	505,81	507,74	509,69	511,64	513,60	515,56	517,53	519,50	521,48	523,47
90	525,47	527,47	529,48	531,49	533,51	535,54	537,57	539,61	541,65	543,71
91	545,76	547,83	549,90	551,98	554,07	556,16	558,26	560,36	562,47	564,59
92	566,71	568,85	570,98	573,13	575,28	577,44	579,61	581,78	583,96	586,14
93	588,33	590,53	592,74	594,95	597,17	599,40	601,64	603,88	606,13	608,38
94	610,64	612,91	615,19	617,47	619,76	622,06	624,37	626,68	629,00	631,32
95	633,66	636,00	638,35	640,70	643,06	645,43	647,81	650,20	652,59	654,99
96	657,40	659,81	662,23	664,66	667,10	669,54	672,00	674,45	676,92	679,40
97	681,88	684,37	686,87	689,37	691,89	694,41	696,93	699,47	702,02	704,57

°	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
98,0	707,13	707,38	707,64	707,90	708,15	708,41	708,67	708,92	709,18	709,44
98,1	709,69	709,95	710,21	710,47	710,72	710,98	711,24	711,50	711,76	712,01
98,2	712,27	712,53	712,79	713,05	713,30	713,56	713,82	714,08	714,34	714,60
98,3	714,85	715,11	715,37	715,63	715,89	716,15	716,41	716,67	716,93	717,19
98,4	717,44	717,70	717,96	718,22	718,48	718,74	719,00	719,26	719,52	719,78
98,5	720,04	720,30	720,57	720,83	721,09	721,35	721,61	721,87	722,13	722,39
98,6	722,65	722,91	723,17	723,44	723,70	723,96	724,22	724,48	724,74	725,00
98,7	725,27	725,53	725,79	726,05	726,32	726,58	726,84	727,10	727,37	727,63
98,8	727,89	728,15	728,42	728,68	728,94	729,21	729,47	729,73	729,99	730,26
98,9	730,52	730,78	731,05	731,31	731,58	731,84	732,10	732,37	732,63	732,90
99,0	733,16	733,42	733,69	733,95	734,22	734,48	734,75	735,01	735,28	735,54
99,1	735,81	736,07	736,34	736,60	736,87	737,14	737,40	737,67	737,93	738,20
99,2	738,46	738,73	739,00	739,26	739,53	739,79	740,06	740,33	740,59	740,86
99,3	741,13	741,39	741,66	741,93	742,20	742,46	742,73	743,00	743,26	743,53
99,4	743,80	744,07	744,33	744,60	744,87	745,14	745,41	745,67	745,94	746,21
95,5	746,48	746,75	747,02	747,28	747,55	747,82	748,09	748,36	748,63	748,90
99,6	749,17	749,44	749,71	749,97	750,24	750,51	750,78	751,05	751,32	751,59
99,7	751,86	752,13	752,41	752,67	752,94	753,21	753,48	753,76	754,03	754,30
99,8	754,57	554,84	755,11	755,38	755,65	755,92	756,19	756,47	756,74	757,01
99,9	757,28	757,55	757,82	758,10	758,37	758,64	758,91	759,18	759,46	259,73
100,0	760,00	760,27	760,55	760,82	761,09	761,36	761,64	761,91	762,18	762,46
100,1	762,73	763,00	763,28	763,55	763,82	764,10	764,37	764,65	764,92	765,19
100,2	765,47	765,74	766,02	766,29	766,56	766,84	767,11	767,39	767,66	767,94
100,3	768,21	768,49	768,76	769,04	769,31	769,59	769,86	770,14	770,42	770,69
100,4	770,97	771,24	771,52	771,80	772,07	772,35	772,62	772,90	773,18	773,45
100,5	773,73	774,01	774,28	774,56	774,84	775,11	775,39	775,67	775,95	776,22
Prop.	0,000°	0,001°	0,002°	0,003°	0,004°	0,005°	0,006°	0,007°	0,008°	0,009°
Teile	0,00mm	0,03mm	0,05mm	0,08mm	0,11mm	0,13mm	0,16mm	0,19mm	0,22mm	0,27mm

(vgl. S. 515 und S. 541—542.)

Genäherte Bestimmung des Dunstdrucks
aus den Angaben des trockenen und des feuchten Thermometers
(streng gültig für 755 mm Barometerstand.

Feuchtes Thermometer	Trockenes Thermometer											Feuchtes Thermometer
	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	
0°	4,6	4,0	3,4	2,8	2,2	1,6						0°
1		4,9	4,3	3,7	3,2	2,6	2,0	1,4				1
2			5,3	4,7	4,1	3,5	2,9	2,3	1,7			2
3				5,7	5,1	4,5	3,9	3,3	2,7	2,1	1,5	3
4					6,1	5,5	4,9	4,3	3,7	3,1	2,5	4
5						6,5	5,9	5,3	4,7	4,1	3,5	5
6							7,0	6,4	5,8	5,2	4,6	6
7								7,5	6,9	6,3	5,7	7
8									8,0	7,4	6,8	8
9										8,6	8,0	9
10											9,2	10

C°	Trockenes Thermometer											C°
	10°	11°	12°	13°	14°	15°	16°	17°	18°	19°	20°	
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	
4°	2,5	1,9	1,3									4°
5	3,5	2,9	2,3	1,7	1,1							5
6	4,6	4,0	3,4	2,8	2,2	1,6						6
7	5,7	5,1	4,5	3,9	3,3	2,7	2,1	1,5				7
8	6,8	6,2	5,6	5,0	4,4	3,8	3,2	2,6	2,0	1,4		8
9	8,0	7,4	6,8	6,2	5,6	5,0	4,3	3,7	3,1	2,5	1,9	9
10	9,2	8,6	8,0	7,3	6,7	6,1	5,5	4,9	4,3	3,7	3,1	10
11		9,8	9,2	8,6	8,0	7,4	6,8	6,2	5,5	4,9	4,3	11
12			10,5	9,8	9,2	8,6	8,0	7,4	6,8	6,2	5,6	12
13				11,2	10,6	9,9	9,4	8,7	8,1	7,5	6,9	13
14					11,9	11,3	10,7	10,1	9,5	8,9	8,3	14
15						12,7	12,1	11,5	10,9	10,3	9,6	15
16							13,5	13,0	12,3	11,7	11,1	16
17								14,4	13,8	13,2	12,6	17
18									15,4	14,7	14,1	18
19										16,3	15,7	19

C°	Trockenes Thermometer											C°
	20°	21°	22°	23°	24°	25°	26°	27°	28°	29°	30°	
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	
10°	3,1	2,5	1,9									10°
11	4,3	3,7	3,1	2,5								11
12	5,6	5,0	4,4	3,8	3,2	2,6						12
13	6,9	6,3	5,7	5,1	4,5	3,9	3,3	2,7				13
14	8,3	7,6	7,0	6,4	5,8	5,2	4,6	4,0	3,4			14
15	9,6	9,0	8,4	7,8	7,2	6,6	6,0	5,4	4,8	4,2	3,6	15
16	11,1	10,5	9,9	9,2	8,7	8,0	7,4	6,8	6,2	5,6	5,0	16
17	12,6	12,0	11,4	10,8	10,1	9,5	8,9	8,3	7,7	7,1	6,5	17
18	14,1	13,5	12,9	12,3	11,7	11,1	10,5	9,8	9,2	8,6	8,0	18
19	15,7	15,1	14,5	13,9	13,3	12,7	12,1	11,4	10,8	10,2	9,6	19
20		16,8	16,2	15,5	14,9	14,3	13,7	13,1	12,5	11,9	11,2	20
21				17,3	16,6	16,0	15,4	14,8	14,2	13,6	13,0	21
22					18,4	17,8	17,2	16,6	16,0	15,3	14,7	22
23							19,0	18,4	17,8	17,2	16,6	23
24									19,7	19,1	18,5	24
25										21,0	20,5	25

(vgl. S. 516.)

Luftfeuchtigkeit.

$$log\left(1 + 0{,}377\,\frac{e}{B}\right)$$

Logarithmische Korrektion zur barometrischen Höhenmessung.

Barom. B	Dunstdruck e 3mm	4mm	5mm	6mm	7mm	8mm	9mm	10mm	11mm	12mm	Diff. für Δe
mm											+
580	0.00085	0.00113	0.00141	0.00169	0.00197	0.00225	0.00253	0.00281	0.00309	0.00337	28
590	00083	00111	00139	00166	00194	00222	00249	00277	00304	00332	28
600	00082	00109	00136	00163	00190	00218	00245	00272	00299	00326	27
610	00080	00107	00134	00161	00188	00214	00241	00268	00294	00321	27
620	00079	00105	00132	00158	00184	00210	00238	00263	00290	00316	26
630	0.00078	0.00104	0.00130	0.00155	0.00181	0.00207	0.00233	0.00259	0.00285	0.00311	26
640	00076	00102	00127	00153	00179	00204	00230	00255	00281	00306	25
650	00075	00100	00125	00151	00176	00201	00226	00251	00276	00301	25
660	00074	00099	00123	00148	00173	00198	00222	00247	00272	00296	24
670	00073	00098	00122	00146	00171	00195	00220	00244	00268	00292	24
680	0.00072	0.00096	0.00120	0.00144	0.00168	0.00192	0.00216	0.00240	0.00264	0.00288	24
690	00071	00095	00118	00142	00166	00190	00213	00237	00260	00284	24
700	00070	00093	00116	00140	00163	00186	00210	00233	00257	00280	23
710	00069	00092	00115	00138	00161	00184	00207	00230	00253	00276	23
720	00068	00091	00113	00136	00159	00182	00204	00227	00249	00272	23
730	0.00067	0.00090	0.00112	0.00134	0.00157	0.00179	0.00201	0.00224	0.00246	0.00268	22
740	00066	00088	00110	00133	00155	00177	00199	00221	00243	00265	22
750	00065	00087	00109	00131	00153	00174	00196	00218	00240	00261	22
760	00064	00086	00107	00129	00150	00172	00193	00215	00236	00258	22
770	00064	00085	00106	00127	00148	00170	00191	00212	00233	00255	22

Mittelwerte, gültig für Deutschland.

$$log\left(1 + 0{,}377\,\frac{e}{B}\right)$$

Monat	Dunst-Druck e	Barometerstand B 600mm	650mm	700mm	750mm
	mm				
Januar	4,1	0.0011	0.0010	0.0010	0.0009
Februar	4,1	0.0011	0.0010	0.0010	0.0009
März	4,8	0.0013	0.0012	0.0010	0.0011
April	6,1	0.0016	0.0015	0.0014	0.0013
Mai	7,8	0.0021	0.0020	0.0018	0.0017
Juni	10,8	0.0027	0.0025	0.0023	0.0022
Juli	11,5	0.0031	0.0029	0.0027	0.0025
August	11,7	0.0032	0.0029	0.0027	0.0025
September . .	9,3	0.0025	0.0023	0.0021	0.0020
Oktober	7,4	0.0020	0.0019	0.0017	0.0016
November . . .	5,1	0.0014	0.0013	0.0012	0.0011
Dezember . . .	4,3	0.0012	0.0011	0.0010	0.0009
Jahresmittel	7,2	0.0020	0.0018	0.0017	0.0016

(vgl. S. 525 und 517.)

Ausdehnung der Luft durch die Wärme.

log $(1 + 0{,}003665\, t)$.

Logarithmische Korrektion zur barometrischen Höhenmessung.

t	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9	Diff. für 0,1°
— 9°	9.98543	9.98527	9.98510	9.98494	9.98477	9.98461	9.98444	9.98428	9.98411	9.98395	17
— 8	9.98708	9.98691	98675	98658	98642	98626	98609	98593	98576	98560	17
— 7	98871	98855	98839	98822	98806	98790	98773	98757	98740	98724	16
— 6	99034	99018	99002	98985	98969	98953	98937	98920	98904	98888	17
— 5	99197	99181	99164	99148	99132	99116	99099	99083	99967	99051	17
— 4°	9.99359	9.99342	9.99326	9.99310	9.99294	9.99278	9.99262	9.99245	9.99229	9.99213	16
— 3	99520	99504	99488	99472	99455	99439	99423	99407	99391	99375	16
— 2	99680	99664	99648	99632	99616	99600	99584	99568	99552	99536	16
— 1	9.99841	99825	99809	99793	99777	99761	99745	99729	99713	99697	16
— 0	0.00000	9.99984	9.99968	9.99952	9.99936	9.99920	9.99904	9.99888	9.99872	9.99856	16
+ 0°	0.00000	0.00016	0.00032	0.00048	0.00064	0.00080	0.00095	0.00111	0.00127	0.00143	16
1	00159	00175	00191	00206	00222	00238	00254	00270	00286	00301	16
2	00317	00333	00349	00364	00380	00396	00412	00428	00443	00459	16
3	00475	00491	00506	00522	00538	00554	00569	00585	00601	00616	16
4	00632	00648	00663	00679	00695	00710	00726	00742	00757	00773	16
5°	0.00789	0.00805	0.00820	0.00835	0.00851	0.00867	0.00882	0.00898	0.00913	0.00929	16
6	00945	00960	00976	00991	01007	01022	01038	01053	01069	01085	15
7	01100	01116	01131	01147	01162	01178	01193	01209	01224	01240	15
8	01255	01270	01286	01301	01317	01332	01348	01363	01379	01394	15
9	01409	01425	01440	01456	01471	01486	01502	01517	01532	01548	15
10°	0.01563	0.01579	0.01594	0.01609	0.01625	0.01640	0.01655	0.01671	0.01686	0.01701	15
11	01716	01732	01747	01762	01778	01793	01808	01823	01839	01854	15
12	01869	01884	01900	01915	01930	01945	01961	01976	01991	02006	15
13	02021	02037	02052	02067	02082	02097	02112	02128	02143	02158	15
14	02173	02188	02203	02218	02234	02249	02264	02279	02294	02309	15
15°	0.02324	0.02339	0.02354	0.02369	0.02385	0.02400	0.02415	0.02430	0.02445	0.02460	15
16	02475	02490	02505	02520	02535	02550	02565	02580	02595	02610	15
17	02625	02640	02655	02670	02685	02700	02715	02730	02745	02760	15
18	02774	02789	02804	02819	02834	02849	02864	02879	02894	02909	15
19	02924	02938	02953	02968	02983	02998	03013	03028	03042	03057	15
20°	0.03072	0.03087	0.03102	0.03117	0.03131	0.03146	0.03161	0.03176	0.03191	0.03205	15
21	03220	03235	03250	03264	03279	03294	03309	03323	03338	03353	15
22	03368	03382	03397	03412	03427	03441	03456	03471	03485	03500	15
23	03515	03529	03544	03559	03573	03588	03603	03617	03632	03647	14
24	03661	03676	03690	03705	03720	03734	03749	03764	03778	03793	14
25°	0.03807	0.03822	0.03836	0.03851	0.03866	0.03880	0.03895	0.03909	0.03924	0.03938	15
26	03953	03967	03982	03996	04011	04026	04040	04054	04069	04083	15
27	04098	04112	04127	04141	04156	04170	04185	04199	04214	04228	15
28	04243	04257	04271	04286	04300	04315	04329	04343	04358	04372	15
29	04387	04401	04415	04430	04444	04459	04473	04487	04502	04516	14
30°	0.04530	0.04545	0.04559	0.04573	0.04588	0.04602	0.04616	0.04631	0.04645	0.04659	14
31	04674	04688	04702	04716	04731	04745	04759	04773	04788	04802	14
32	04816	04830	04845	04859	04873	04887	04902	04916	04930	04944	14
33	04958	04973	04987	05001	05015	05029	05043	05058	05072	05086	14
34	05100	05114	05128	05143	05157	05171	05185	05199	05212	05227	14

(vgl. S. 524—525.)

Barometrische Höhentafel.

$$H = 18464\ (1 + 0{,}003665\, t)\ (log\, 762 - log\, B)$$

B	Lufttemperatur t							Differenz für 1 mm bei 15⁰	Differenz für 1⁰
	0⁰	5⁰	10⁰	15⁰	20⁰	25⁰	30⁰		
mm	m	m	m	m	m	m	m	m	m
450	4223	4301	4378	4456	4533	4610	4688	18,8	15,5
451	4206	4283	4360	4437	4514	4591	4668	18,8	15,4
452	4188	4265	4342	4418	4495	4572	4649	18,7	15,4
453	4170	4247	4323	4400	4476	4552	4629	18,7	15,3
454	4153	4229	4305	4381	4457	4533	4609	18,6	15,2
455	4135	4211	4286	4362	4438	4514	4590	18,6	15,2
456	4117	4193	4268	4344	4419	4494	4569	18,6	15,1
457	4100	4175	4250	4325	4400	4475	4551	18,5	15,0
458	4082	4157	4232	4307	4382	4457	4532	18,5	15,0
459	4065	4139	4214	4288	4363	4437	4512	18,4	14,9
460	4047	4121	4195	4270	4344	4418	4492	18,4	14,8
461	4030	4104	4177	4251	4325	4399	4473	18,4	14,8
462	4012	4086	4160	4233	4307	4380	4454	18,3	14,7
463	3995	4068	4142	4215	4288	4361	4435	18,3	14,6
464	3978	4051	4124	4197	4270	4342	4415	18,2	14,6
465	3960	4033	4106	4178	4251	4323	4396	18,2	14,5
466	3943	4016	4088	4160	4232	4305	4377	18,2	14,5
467	3926	3998	4070	4142	4214	4286	4358	18,1	14,4
468	3909	3981	4052	4124	4196	4267	4339	18,1	14,3
469	3892	3963	4035	4106	4177	4249	4320	18,0	14,3
470	3875	3946	4017	4088	4159	4230	4301	18,0	14,2
471	3858	3928	3999	4070	4141	4211	4282	18,0	14,1
472	3841	3911	3981	4052	4122	4193	4263	17,9	14,1
473	3824	3894	3964	4034	4104	4174	4244	17,9	14,0
474	3807	3877	3946	4016	4086	4156	4226	17,9	14,0
475	3790	3859	3929	3998	4068	4137	4207	17,8	13,9
476	3773	3842	3911	3981	4050	4119	4188	17,8	13,8
477	3756	3825	3894	3963	4032	4101	4170	17,7	13,8
478	3739	3808	3877	3945	4014	4082	4151	17,7	13,7
479	3723	3791	3859	3927	3996	4064	4132	17,7	13,6
480	3706	3774	3842	3910	3978	4046	4114	17,6	13,6
481	3689	3757	3825	3892	3960	4028	4095	17,6	13,5
482	3673	3740	3807	3875	3942	4009	4077	17,6	13,5
483	3656	3723	3790	3857	3924	3991	4058	17,5	13,4
484	3639	3706	3773	3840	3906	3973	4040	17,5	13,3
485	3623	3689	3756	3822	3888	3955	4021	17,4	13,3
486	3605	3672	3738	3805	3871	3937	4004	17,4	13,2
487	3590	3656	3721	3787	3853	3919	3985	17,4	13,2
488	3573	3639	3704	3770	3835	3901	3966	17,3	13,1
489	3557	3622	3687	3753	3818	3883	3948	17,3	13,0
490	3541	3605	3670	3735	3800	3865	3930	17,3	13,0
491	3524	3589	3653	3718	3783	3847	3912	17,2	12,9
492	3508	3572	3637	3701	3765	3830	3894	17,2	12,9
493	3492	3556	3620	3684	3748	3812	3876	17,2	12,8
494	3475	3539	3603	3667	3730	3794	3858	17,1	12,7
495	3459	3523	3586	3649	3713	3776	3840	17,1	12,7

(vgl. S. 529.)

Barometrische Höhentafel.

$$H = 18464\ (1 + 0{,}003665\ t)\ (\log 762 - \log B)$$

B	Lufttemperatur t							Differenz für 1 mm bei 15°	Differenz für 1°
	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°		
mm	m	m	m	m	m	m	m	m	m
495	3459	3523	3586	3649	3713	3776	3840	17,1	12,7
496	3443	3506	3569	3632	3695	3759	3822	17,1	12,6
497	3427	3490	3553	3615	3678	3741	3804	17,0	12,6
498	3411	3473	3536	3598	3661	3723	3786	17,0	12,5
499	3395	3457	3519	3581	3644	3706	3768	17,0	12,4
500	3379	3441	3502	3564	3626	3688	3750	16,9	12,4
501	3463	3424	3486	3548	3609	3671	3732	16,9	12,3
502	3347	3408	3469	3531	3592	3653	3715	16,9	12,3
503	3331	3392	3453	3514	3575	3636	3697	16,8	12,2
504	3315	3375	3436	3497	3558	3618	3679	16,8	12,2
505	3299	3359	3420	3480	3541	3601	3662	16,8	12,1
506	3283	3343	3403	3464	3524	3584	3644	16,7	12,0
507	3267	3327	3387	3447	3507	3566	3626	16,7	12,0
508	3251	3311	3371	3430	3490	3549	3609	16,7	11,9
509	3236	3295	3354	3413	3473	3532	3591	16,6	11,9
510	3220	3279	3338	3397	3456	3515	3574	16,6	11,8
511	3204	3263	3322	3380	3439	3498	3556	16,6	11,7
512	3188	3247	3305	3364	3422	3481	3539	16,5	11,7
513	3173	3231	3289	3347	3406	3464	3522	16,5	11,6
514	3157	3215	3273	3331	3389	3447	3504	16,5	11,6
515	3142	3199	3257	3314	3372	3430	3487	16,4	11,5
516	3126	3183	3241	3298	3355	3413	3470	16,4	11,5
517	3111	3168	3225	3282	3339	3396	3453	16,4	11,4
518	3095	3152	3209	3265	3322	3379	3435	16,3	11,3
519	3080	3136	3193	3249	3305	3362	3418	16,3	11,3
520	3064	3120	3176	3233	3289	3345	3401	16,3	11,2
521	3049	3105	3161	3216	3272	3328	3384	16,2	11,2
522	3033	3089	3145	3200	3256	3311	3367	16,2	11,1
523	3018	3073	3129	3184	3239	3295	3350	16,2	11,1
524	3003	3058	3113	3168	3223	3278	3333	16,1	11,0
525	2987	3042	3097	3152	3206	3261	3316	16,1	11,0
526	2972	3027	3081	3136	3190	3244	3299	16,1	10,9
527	2957	3011	3065	3120	3174	3228	3282	16,1	10,8
528	2942	2996	3050	3104	3157	3211	3265	16,0	10,8
529	2926	2980	3034	3087	3141	3195	3248	16,0	10,7
530	2911	2965	3018	3071	3125	3178	3231	16,0	10,7
531	2896	2949	3002	3056	3109	3162	3215	15,9	10,6
532	2881	2934	2987	3040	3092	3145	3198	15,9	10,6
533	2866	2919	2971	3024	3076	3129	3181	15,9	10,5
534	2851	2903	2956	3008	3060	3113	3165	15,8	10,5
535	2836	2888	2940	2992	3044	3096	3148	15,8	10,4
536	2821	2873	2925	2976	3028	3080	3132	15,8	10,4
537	2806	2858	2909	2961	3012	3063	3115	15,8	10,3
538	2791	2842	2894	2945	2996	3047	3098	15,7	10,2
539	2776	2827	2878	2929	2980	3031	3082	15,7	10,2
540	2761	2812	2863	2913	2964	3015	3065	15,7	10,1

(vgl. S. 529.)

Barometrische Höhentafel.

$H = 18464\ (1 + 0{,}003665\,t)\ (log\,762 - log\,B)$

Lufttemperatur t 0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	Differenz für 1 mm bei 15°	Differenz für 1°
m	m	m	m	m	m	m	m	m
2761	2812	2863	2913	2964	3015	3065	15,7	10,1
2746	2797	2847	2898	2948	2998	3049	15,6	10,1
2732	2782	2832	2882	2932	2982	3032	15,6	10,0
2717	2767	2817	2867	2916	2966	3016	15,6	10,0
2702	2752	2801	2851	2900	2950	3000	15,6	9,9
2687	2737	2786	2835	2885	2934	2983	15,5	9,9
2673	2722	2771	2820	2869	2918	2967	15,5	9,8
2658	2707	2756	2804	2853	2902	2951	15,5	9,8
2643	2692	2741	2789	2837	2886	2934	15,4	9,7
2629	2677	2725	2773	2822	2870	2918	15,4	9,6
2614	2662	2710	2758	2806	2854	2902	15,4	9,6
2600	2647	2695	2743	2790	2838	2886	15,4	9,5
2585	2633	2680	2727	2775	2822	2870	15,3	9,5
2571	2618	2665	2712	2759	2806	2854	15,3	9,4
2556	2603	2650	2697	2744	2791	2837	15,3	9,4
2542	2588	2635	2682	2728	2775	2821	15,2	9,3
2527	2574	2620	2666	2713	2759	2805	15,2	9,3
2513	2559	2605	2651	2697	2743	2789	15,2	9,2
2498	2544	2590	2636	2682	2728	2774	15,2	9,2
2484	2530	2575	2621	2666	2712	2757	15,1	9,1
2470	2515	2560	2606	2651	2696	2742	15,1	9,1
2455	2500	2546	2591	2636	2681	2726	15,1	9,0
2441	2486	2531	2576	2620	2665	2710	15,1	9,0
2427	2471	2516	2561	2605	2650	2694	15,0	8,9
2413	2457	2501	2546	2590	2634	2678	15,0	8,9
2398	2442	2486	2531	2574	2618	2662	15,0	8,8
2384	2428	2472	2516	2559	2603	2647	14,9	8,7
2370	2414	2457	2501	2544	2588	2631	14,9	8,7
2356	2399	2442	2486	2529	2572	2615	14,9	8,6
2342	2385	2428	2471	2514	2557	2599	14,9	8,6
2328	2371	2413	2456	2499	2541	2584	14,8	8,5
2314	2356	2399	2441	2483	2526	2568	14,8	8,5
2300	2342	2384	2426	2468	2511	2553	14,8	8,4
2286	2328	2370	2412	2453	2495	2537	14,8	8,4
2272	2313	2355	2397	2438	2480	2522	14,7	8,3
2258	2299	2341	2382	2423	2465	2506	14,7	8,3
2244	2285	2326	2367	2408	2450	2491	14,7	8,2
2230	2271	2312	2353	2394	2434	2475	14,7	8,2
2216	2257	2297	2338	2379	2419	2460	14,6	8,1
2202	2243	2283	2323	2364	2404	2444	14,6	8,1
2188	2229	2269	2309	2349	2389	2429	14,6	8,0
2175	2215	2254	2294	2334	2374	2414	14,6	8,0
2161	2200	2240	2280	2319	2359	2399	14,5	7,9
2146	2185	2225	2265	2305	2345	2384	14,5	7,9
2133	2172	2212	2251	2290	2329	2368	14,5	7,8
2120	2158	2197	2236	2275	2314	2353	14,5	7,8

(vgl. S. 529.)

Barometrische Höhentafel.

$$H = 18464\ (1 + 0{,}003665\ t)\ (log\ 762 - log\ B)$$

B	Lufttemperatur t							Differenz für 1 mm bei 15⁰	Differenz für 1⁰
	0⁰	5⁰	10⁰	15⁰	20⁰	25⁰	30⁰		
mm	m	m	m	m	m	m	m	m	m
585	2120	2158	2197	2236	2275	2314	2353	14,5	7,8
586	2106	2145	2183	2222	2260	2299	2338	14,4	7,7
587	2092	2131	2169	2207	2246	2284	2322	14,4	7,7
588	2079	2117	2155	2193	2231	2269	2307	14,4	7,6
589	2065	2103	2141	2179	2216	2254	2292	14,4	7,6
590	2051	2089	2127	2164	2202	2239	2277	14,3	7,5
591	2038	2075	2113	2150	2187	2225	2262	14,3	7,5
592	2024	2061	2098	2136	2173	2210	2247	14,3	7,4
593	2011	2048	2085	2121	2158	2195	2232	14,3	7,4
594	1997	2034	2070	2107	21[illegible]	2180	2217	14,2	7,3
595	1984	2020	2056	2093	2129	2165	2202	14,2	7,3
596	1970	2006	2042	2079	2115	2151	2187	14,2	7,2
597	1957	1993	2029	2065	2100	2136	2172	14,2	7,2
598	1943	1979	2015	2050	2086	2122	2157	14,1	7,1
599	1930	1965	2001	2036	2072	2107	2142	14,1	7,1
600	1917	1952	1987	2022	2057	2092	2127	14,1	7,0
601	1903	1938	1973	2008	2043	2078	2113	14,1	7,0
602	1890	1925	1959	1994	2029	2063	2098	14,1	6,9
603	1877	1911	1946	1980	2014	2049	2083	14,0	6,9
604	1863	1898	1932	1966	2000	2034	2068	14,0	6,8
605	1850	1884	1918	1952	1986	2020	2053	14,0	6,8
606	1837	1870	1904	1938	1972	2005	2039	14,0	6,7
607	1824	1857	1891	1924	1957	1991	2024	13,9	6,7
608	1810	1844	1877	1910	1943	1976	2010	13,9	6,6
609	1797	1830	1863	1896	1929	1962	1995	13,9	6,6
610	1784	1817	1850	1882	1915	1948	1980	13,9	6,5
611	1771	1803	1836	1868	1901	1933	1966	13,8	6,5
612	1758	1790	1822	1855	1887	1919	1951	13,8	6,4
613	1745	1777	1809	1841	1873	1905	1937	13,8	6,4
614	1732	1763	1795	1827	1859	1890	1922	13,8	6,4
615	1719	1750	1782	1813	1845	1876	1908	13,8	6,3
616	1706	1737	1768	1799	1831	1862	1893	13,7	6,3
617	1693	1724	1755	1786	1817	1848	1879	13,7	6,2
618	1680	1710	1741	1772	1803	1834	1864	13,7	6,2
619	1667	1697	1728	1758	1789	1819	1850	13,7	6,1
620	1654	1684	1714	1745	1775	1805	1835	13,6	6,1
621	1641	1671	1701	1731	1761	1791	1821	13,6	6,0
622	1628	1658	1688	1718	1747	1777	1807	13,6	6,0
623	1615	1645	1674	1704	1734	1763	1793	13,6	5,9
624	1602	1632	1661	1690	1720	1749	1779	13,6	5,9
625	1590	1619	1648	1677	1706	1735	1764	13,5	5,8
626	1577	1606	1635	1663	1692	1721	1750	13,5	5,8
627	1564	1593	1621	1650	1679	1707	1736	13,5	5,7
628	1551	1579	1608	1636	1665	1693	1722	13,5	5,7
629	1538	1566	1595	1623	1651	1679	1707	13,4	5,6
630	1525	1553	1581	1609	1637	1665	1693	13,4	5,6

(vgl. S. 529.)

Barometrische Höhentafel.

$$H = 18464\ (1 + 0{,}003665\,t)\ (\log 762 - \log B)$$

B	Lufttemperatur t							Differenz für 1 mm bei 15°	Differenz für 1°
	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°		
mm	m	m	m	m	m	m	m	m	m
630	1525	1553	1581	1609	1637	1665	1693	13,4	5,6
631	1513	1540	1568	1596	1624	1651	1679	13,4	5,5
632	1500	1527	1555	1582	1610	1637	1665	13,4	5,5
633	1487	1515	1542	1569	1596	1624	1651	13,4	5,5
634	1475	1502	1529	1556	1583	1610	1637	13,3	5,4
635	1462	1489	1516	1542	1569	1596	1623	13,3	5,4
636	1450	1476	1503	1529	1556	1582	1609	13,3	5,3
637	1437	1463	1489	1516	1542	1569	1595	13,3	5,3
638	1424	1450	1476	1502	1529	1555	1581	13,3	5,2
639	1412	1438	1463	1489	1515	1541	1567	13,2	5,2
640	1399	1425	1450	1476	1502	1527	1553	13,2	5,1
641	1387	1412	1437	1463	1488	1514	1539	13,2	5,1
642	1374	1399	1424	1450	1475	1500	1525	13,2	5,0
643	1362	1387	1412	1436	1461	1486	1511	13,2	5,0
644	1349	1374	1399	1423	1448	1473	1498	13,1	4,9
645	1337	1361	1386	1410	1435	1459	1484	13,1	4,9
646	1324	1349	1373	1397	1421	1446	1470	13,1	4,9
647	1312	1336	1360	1384	1408	1432	1456	13,1	4,8
648	1300	1323	1347	1371	1395	1419	1442	13,1	4,8
649	1287	1311	1334	1358	1382	1405	1429	13,0	4,7
650	1275	1298	1321	1345	1368	1392	1415	13,0	4,7
651	1263	1286	1309	1332	1355	1378	1401	13,0	4,6
652	1250	1273	1296	1319	1342	1365	1388	13,0	4,6
653	1238	1260	1283	1306	1329	1351	1374	13,0	4,5
654	1226	1248	1271	1293	1315	1338	1360	12,9	4,5
655	1213	1236	1258	1280	1302	1325	1347	12,9	4,4
656	1201	1223	1245	1267	1289	1311	1333	12,9	4,4
657	1189	1211	1232	1254	1276	1298	1320	12,9	4,4
658	1177	1198	1220	1241	1263	1285	1306	12,9	4,3
659	1165	1186	1207	1229	1250	1271	1293	12,8	4,3
660	1152	1173	1195	1216	1237	1258	1279	12,8	4,2
661	1140	1161	1182	1203	1224	1245	1266	12,8	4,2
662	1128	1149	1169	1190	1211	1232	1252	12,8	4,1
663	1116	1136	1157	1177	1198	1218	1239	12,8	4,1
664	1104	1124	1144	1165	1185	1205	1225	12,7	4,0
665	1092	1112	1132	1152	1172	1192	1212	12,7	4,0
666	1080	1100	1119	1139	1159	1179	1199	12,7	4,0
667	1068	1087	1107	1126	1146	1166	1185	12,7	3,9
668	1056	1075	1094	1114	1133	1153	1172	12,7	3,9
669	1044	1063	1082	1101	1120	1139	1159	12,6	3,8
670	1032	1051	1070	1088	1107	1126	1145	12,6	3,8
671	1020	1038	1057	1076	1095	1113	1132	12,6	3,7
672	1008	1026	1045	1063	1082	1100	1119	12,6	3,7
673	996	1014	1032	1051	1069	1087	1106	12,6	3,7
674	984	1002	1020	1038	1056	1074	1092	12,6	3,6
675	972	990	1008	1026	1043	1061	1079	12,5	3,6

(vgl. S. 529.)

Barometrische Höhentafel.

$$H = 18464\ (1 + 0{,}003665\,t)\ (\log 762 - \log B)$$

B	Lufttemperatur t							Differenz für 1 mm bei 15°	Differenz für 1°
	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°		
mm	m	m	m	m	m	m	m	m	m
675	972	990	1008	1026	1043	1061	1079	12,5	3,6
676	960	978	996	1013	1031	1048	1066	12,5	3,5
677	949	966	983	1001	1018	1035	1053	12,5	3,5
678	937	954	971	988	1005	1022	1040	12,5	3,4
679	925	942	959	976	993	1010	1027	12,5	3,4
680	913	930	946	963	980	997	1013	12,4	3,3
681	901	918	934	951	967	984	1000	12,4	3,3
682	890	906	922	938	955	971	987	12,4	3,3
683	878	894	910	926	942	958	974	12,4	3,2
684	866	882	898	914	929	945	961	12,4	3,2
685	854	870	886	901	917	933	948	12,3	3,1
686	843	858	873	889	904	920	935	12,3	3,1
687	831	846	861	877	892	907	922	12,3	3,0
688	819	834	849	864	879	894	909	12,3	3,0
689	808	822	837	852	867	882	896	12,3	3,0
690	796	810	825	840	854	869	883	12,3	2,9
691	784	799	813	827	842	856	871	12,2	2,9
692	773	787	801	815	829	844	858	12,2	2,8
693	761	775	789	803	817	831	845	12,2	2,8
694	750	763	777	791	805	818	832	12,2	2,7
695	738	752	765	779	792	806	819	12,2	2,7
696	726	740	753	766	780	793	807	12,2	2,7
697	715	728	741	754	767	781	794	12,1	2,6
698	703	716	729	742	755	768	781	12,1	2,6
699	692	705	717	730	743	755	768	12,1	2,5
700	680	693	705	718	730	743	755	12,1	2,5
701	669	681	694	706	718	730	743	12,1	2,5
702	658	670	682	694	706	718	730	12,1	2,4
703	646	658	670	682	694	706	717	12,0	2,4
704	635	646	658	670	681	693	705	12,0	2,3
705	623	635	646	658	669	681	692	12,0	2,3
706	612	623	635	646	657	668	680	12,0	2,2
707	601	612	623	634	645	656	667	12,0	2,2
708	589	601	611	622	633	643	654	11,9	2,2
709	578	589	599	610	621	631	642	11,9	2,1
710	567	577	588	598	608	619	629	11,9	2,1
711	555	566	576	586	596	606	617	11,9	2,0
712	544	554	564	574	584	594	604	11,9	2,0
713	533	543	553	562	572	582	592	11,9	2,0
714	522	531	541	550	560	570	579	11,8	1,9
715	511	520	529	539	548	557	567	11,8	1,9
716	500	508	518	527	536	545	554	11,8	1,8
717	488	497	506	515	524	533	542	11,8	1,8
718	477	486	494	503	512	521	530	11,8	1,7
719	466	474	483	491	500	509	517	11,8	1,7
720	455	463	471	480	488	496	505	11,7	1,7

(vgl. S. 529.)

Barometrische Höhentafel.

$H = 18464\ (1 + 0{,}003665\ t)\ (\log 762 - \log B)$

B	Lufttemperatur t							Differenz für 1mm bei 15°	Differenz für 1°
	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°		
mm	m	m	m	m	m	m	m	m	m
720	455	463	471	480	488	496	505	11,7	1,7
721	443	452	460	468	476	484	492	11,7	1,6
722	432	440	448	456	464	472	480	11,7	1,6
723	421	429	437	444	452	460	468	11,7	1,5
724	410	418	425	433	440	448	456	11,7	1,5
725	399	406	414	421	428	436	443	11,7	1,5
726	388	395	402	409	417	424	431	11,7	1,4
727	377	384	391	398	405	412	419	11,6	1,4
728	366	373	379	386	393	400	406	11,6	1,3
729	355	362	368	375	381	388	394	11,6	1,3
730	344	350	357	363	369	376	382	11,6	1,3
731	333	339	345	351	358	364	370	11,6	1,2
732	322	328	334	340	346	352	358	11,6	1,2
733	311	317	323	328	334	340	345	11,5	1,1
734	300	306	311	317	322	328	333	11,5	1,1
735	289	295	300	305	311	316	321	11,5	1,1
736	278	284	289	294	299	304	309	11,5	1,0
737	267	272	277	282	287	292	297	11,5	1,0
738	257	261	266	271	275	280	285	11,5	0,9
739	246	250	255	259	264	268	273	11,4	0,9
740	235	239	243	248	252	256	261	11,4	0,9
741	224	228	232	236	241	245	249	11,4	0,8
742	213	217	221	225	229	233	237	11,4	0,8
743	202	206	210	214	217	221	225	11,4	0,7
744	192	195	199	202	206	209	213	11,4	0,7
745	181	184	188	191	194	198	201	11,4	0,7
746	170	173	176	179	183	186	189	11,3	0,6
747	159	162	165	168	171	174	177	11,3	0,6
748	148	151	154	157	160	162	165	11,3	0,5
749	138	140	143	146	148	151	153	11,3	0,5
750	127	130	132	134	137	139	141	11,3	0,5
751	117	119	121	123	125	127	129	11,3	0,4
752	106	108	110	112	114	116	118	11,2	0,4
753	95	97	99	101	102	104	106	11,2	0,3
754	85	86	88	89	91	92	94	11,2	0,3
755	74	75	77	78	79	81	82	11,2	0,3
756	64	65	66	67	68	69	70	11,2	0,2
757	53	54	55	56	57	58	59	11,2	0,2
758	42	43	44	45	45	46	47	11,2	0,1
759	32	32	33	33	34	35	35	11,1	0,1
760	21	21	22	22	23	23	23	11,1	0,1
761	10	11	11	11	11	11	12	11,1	0,0
762	0	0	0	0	0	0	0	11,1	0,0
763	—10	—11	—11	—11	—11	—11	—12	11,1	—0,0
764	—21	—21	—22	—22	—23	—23	—23	11,1	—0,1
765	—31	—32	—33	—33	—34	—34	—35	11,1	—0,1

(vgl. S. 529.)

Barometrische Höhentafel.

$H = 18464\ (1 + 0{,}003665\ t)\ (log\ 762 - log\ B)$

$t = 15°$

B	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9	Diff. für 1 mm
mm	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
675	1025,6	1024,3	1023,1	1021,8	1020,6	1019,3	1018,1	1016,8	1015,6	1014,3	12,53
676	1013,1	1011,8	1010,6	1009,3	1008,1	1006,8	1005,6	1004,3	1003,1	1001,8	12,51
677	1000,6	999,3	998,1	996,8	995,6	994,3	993,1	991,8	990,6	989,3	12,50
678	988,1	986,8	985,6	984,3	983,1	981,8	980,6	979,3	978,1	976,9	12,48
679	975,6	974,4	973,1	971,9	970,6	969,4	968,1	966,9	965,6	964,4	12,46
680	963,2	961,9	960,7	959,4	958,2	956,9	955,7	954,5	953,2	952,0	12,44
681	950,7	949,5	948,2	947,0	945,8	944,5	943,3	942,0	940,8	939,5	12,42
682	938,3	937,1	935,8	934,6	933,3	932,1	930,9	929,6	928,4	927,2	12,40
683	925,9	924,7	923,4	922,2	921,0	919,7	918,5	917,2	916,0	914,8	12,39
684	913,5	912,3	911,1	909,8	908,6	907,4	906,1	904,9	903,6	902,4	12,37
685	901,2	900,0	898,7	897,5	896,2	895,0	893,8	892,5	891,3	890,1	12,35
686	888,8	887,6	886,4	885,1	883,9	882,7	881,4	880,2	879,0	877,7	12,33
687	876,5	875,3	874,1	872,8	871,6	870,4	869,1	867,9	866,7	865,4	12,31
688	864,2	863,0	861,7	860,5	859,3	858,1	856,8	855,6	854,4	853,2	12,30
689	851,9	850,7	849,5	848,2	847,0	845,8	844,6	843,3	842,1	840,9	12,28
690	839,7	838,4	837,2	836,0	834,8	833,5	832,3	831,1	829,9	828,6	12,26
691	827,4	826,2	825,0	823,7	822,5	821,3	820,1	818,8	817,6	816,4	12,24
692	815,2	814,0	812,7	811,5	810,3	809,1	807,8	806,6	805,4	804,2	12,22
693	803,0	801,7	800,5	799,3	798,1	796,9	795,6	794,4	793,2	792,0	12,21
694	790,8	789,5	788,3	787,1	785,9	784,7	783,4	782,2	781,0	779,8	12,19
695	778,6	777,4	776,1	774,9	773,7	772,5	771,3	770,0	768,8	767,6	12,17
696	766,4	765,2	764,0	762,7	761,5	760,3	759,1	757,9	756,7	755,5	12,15
697	754,2	753,0	751,8	750,6	749,4	748,2	747,0	745,8	744,5	743,3	12,14
698	742,1	740,9	739,7	738,5	737,3	736,1	734,9	733,6	732,4	731,2	12,12
699	730,0	728,8	727,6	726,4	725,2	724,0	722,8	721,6	720,3	719,1	12,10
700	717,9	716,7	715,5	714,3	713,1	711,9	710,7	709,5	708,3	707,1	12,08
701	705,9	704,6	703,4	702,2	701,0	699,8	698,6	697,4	696,2	695,0	12,07
702	693,8	692,6	691,4	690,2	689,0	687,8	686,6	685,4	684,2	683,0	12,05
703	681,8	680,6	679,3	678,1	676,9	675,7	674,5	673,3	672,1	670,9	12,03
704	669,7	668,5	667,3	666,1	664,9	663,7	662,5	661,3	660,1	658,9	12,02
705	657,7	656,5	655,3	654,1	652,9	651,7	650,5	649,3	648,1	646,9	12,00
706	645,7	644,5	643,3	642,1	641,0	639,7	638,6	637,3	636,2	635,0	11,98
707	633,8	632,6	631,4	630,2	629,0	627,8	626,6	625,4	624,2	623,0	11,97
708	621,8	620,6	619,4	618,2	617,0	615,8	614,6	613,4	612,2	611,0	11,95
709	609,9	608,7	607,5	606,3	605,1	603,9	602,7	601,5	600,3	599,1	11,93
710	597,9	596,7	595,6	594,4	593,2	592,0	590,8	589,6	588,4	587,2	11,91
711	586,0	584,8	583,7	582,5	581,3	580,1	578,9	577,7	576,5	575,3	11,90
712	574,1	573,0	571,8	570,6	569,4	568,2	567,0	565,8	564,6	563,5	11,88
713	562,3	561,1	559,9	558,7	557,5	556,3	555,2	554,0	552,8	551,6	11,86
714	550,4	549,2	548,0	546,9	545,7	544,5	543,3	542,1	541,0	539,8	11,85
715	538,6	537,4	536,2	535,0	533,8	532,7	531,5	530,3	529,1	527,9	11,83
716	526,7	525,6	524,4	523,2	522,0	520,8	519,7	518,5	517,3	516,1	11,82
717	514,9	513,8	512,6	511,4	510,2	509,1	507,9	506,7	505,5	504,3	11,80
718	503,2	502,0	500,8	499,6	498,4	497,3	496,1	494,9	493,7	492,6	11,78
719	491,4	490,2	489,0	487,8	486,7	485,5	484,3	483,1	482,0	480,8	11,77

Probeseite der ausführlicheren Höhentafeln.

(vgl. S. 529.)

Barometrische Höhentafel.

$H = 18464\ (1 + 0{,}003665\ t)\ (log\ 762 - log\ B)$

$t = 15^\circ$

B	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9	Diff. für 1 mm
mm	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
720	479,6	478,4	477,3	476,1	474,9	473,8	472,6	471,4	470,2	469,1	11,75
721	467,9	466,7	465,5	464,4	463,2	462,0	460,9	459,7	458,5	457,3	11,73
722	456,2	455,0	453,8	452,6	451,5	450,3	449,1	448,0	446,8	445,6	11,72
723	444,4	443,3	442,1	440,9	439,8	438,6	437,4	436,3	435,1	433,9	11,70
724	432,8	431,6	430,4	429,3	428,1	426,9	425,8	424,6	423,4	422,3	11,68
725	421,1	419,9	418,8	417,6	416,4	415,3	414,1	412,9	411,8	410,6	11,67
726	409,4	408,3	407,1	405,9	404,8	403,6	402,4	401,3	400,1	398,9	11,65
727	397,8	396,6	395,4	394,3	393,1	391,9	390,8	389,6	388,5	387,3	11,64
728	386,1	385,0	383,8	382,6	381,5	380,3	379,2	378,0	376,9	375,7	11,62
729	374,5	373,4	372,2	371,1	369,9	368,7	367,6	366,4	365,3	364,1	11,60
730	362,9	361,8	360,6	359,5	358,3	357,1	356,0	354,8	353,7	352,5	11,59
731	351,3	350,2	349,0	347,9	346,7	345,6	344,4	343,3	342,1	341,0	11,57
732	339,8	338,6	337,5	336,3	335,2	334,0	332,9	331,7	330,6	329,4	11,56
733	328,2	327,1	325,9	324,8	323,6	322,5	321,3	320,2	319,0	317,9	11,54
734	316,7	315,6	314,4	313,3	312,1	311,0	309,8	308,7	307,5	306,3	11,53
735	305,2	304,0	302,9	301,7	300,6	299,4	298,3	297,1	296,0	294,8	11,51
736	293,7	292,5	291,4	290,2	289,1	287,9	286,8	285,7	284,5	283,4	11,49
737	282,2	281,0	279,9	278,8	277,6	276,5	275,3	274,2	273,0	271,9	11,48
738	270,7	269,6	268,4	267,3	266,2	265,0	263,9	262,7	261,6	260,4	11,46
739	259,3	258,1	257,0	255,9	254,7	253,6	252,4	251,3	250,1	249,0	11,45
740	247,8	246,7	245,6	244,4	243,3	242,1	241,0	239,8	238,7	237,6	11,43
741	236,4	235,3	234,1	233,0	231,9	230,7	229,6	228,4	227,3	226,1	11,42
742	225,0	223,9	222,7	221,6	220,4	219,3	218,2	217,0	215,9	214,7	11,40
743	213,6	212,5	211,3	210,2	209,1	207,9	206,8	205,6	204,5	203,4	11,39
744	202,2	201,1	200,0	198,8	197,7	196,5	195,4	194,3	193,1	192,0	11,37
745	190,9	189,7	188,6	187,5	186,3	185,2	184,1	182,9	181,8	180,6	11,36
746	179,5	178,4	177,2	176,1	175,0	173,8	172,7	171,6	170,5	169,3	11,34
747	168,2	167,1	165,9	164,8	163,6	162,5	161,4	160,3	159,1	158,0	11,33
748	156,9	155,7	154,6	153,5	152,3	151,2	150,1	149,0	147,8	146,7	11,31
749	145,6	144,5	143,3	142,2	141,1	139,9	138,8	137,7	136,5	135,4	11,30
750	134,3	133,2	132,0	130,9	129,8	128,6	127,5	126,4	125,3	124,1	11,28
751	123,0	121,9	120,8	119,6	118,5	117,4	116,3	115,1	114,1	112,9	11,26
752	111,8	110,6	109,5	108,4	107,3	106,1	105,0	103,9	102,8	101,6	11,25
753	100,5	99,4	98,2	97,1	96,0	94,9	93,8	92,7	91,5	90,4	11,23
754	89,3	88,2	87,0	85,9	84,8	83,7	82,6	81,4	80,3	79,2	11,22
755	78,1	77,0	75,8	74,7	73,6	72,5	71,4	70,2	69,1	68,0	11,20
756	66,9	65,8	64,6	63,5	62,4	61,3	60,2	59,1	57,9	56,8	11,19
757	55,7	54,6	53,5	52,3	51,2	50,1	49,0	47,9	46,8	45,6	11,17
758	44,5	43,4	42,3	41,3	40,1	38,9	37,8	36,7	35,6	34,5	11,16
759	33,4	32,3	31,1	30,0	28,9	27,8	26,7	25,6	24,5	23,3	11,15
760	22,2	21,1	20,0	18,9	17,8	16,7	15,6	14,5	13,3	12,2	11,13
761	11,1	10,0	8,9	7,8	6,7	5,6	4,4	3,3	2,2	1,1	11,12
762	0,0	—1,1	—2,2	—3,3	—4,4	—5,5	—6,7	—7,8	—8,9	—10,0	11,10
763	—11,1	—12,2	—13,3	—14,4	—15,5	—16,6	—17,7	—18,9	—20,0	—21,1	11,09
764	—22,2	—23,3	—24,4	—25,5	—26,6	—27,7	—28,8	—29,9	—31,0	—32,1	11,07

Probeseite der ausführlicheren Höhentafeln.

(vgl. S. 529.)

Barometrische Höhenstufen.

Höhendifferenz Δh_1 für die Barometerdifferenz 1^{mm}.

$$\Delta h_1 = \frac{8019}{B}(1 + 0{,}003665\, t)$$

t	Mittlerer Barometerstand B in Millimetern											t
	760	755	750	745	740	735	730	725	720	715	710	
	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	
— 5°	10,36	10,43	10,50	10,57	10,64	10,71	10,78	10,86	10,93	11,01	11,09	— 5°
— 4	10,40	10,47	10,54	10,61	10,68	10,75	10,82	10,90	10,97	11,05	11,13	— 4
— 3	10,43	10,50	10,57	10,64	10,72	10,79	10,86	10,94	11,01	11,09	11,17	— 3
— 2	10,47	10,54	10,61	10,68	10,76	10,83	10,90	10,98	11,06	11,13	11,21	— 2
— 1	10,51	10,58	10,65	10,72	10,80	10,87	10,94	11,02	11,10	11,17	11,25	— 1
0°	10,55	10,62	10,69	10,76	10,84	10,91	10,98	11,06	11,14	11,21	11,29	0°
1	10,59	10,66	10,73	10,80	10,88	10,95	11,03	11,10	11,18	11,26	11,34	1
2	10,63	10,70	10,77	10,84	10,92	10,99	11,07	11,14	11,22	11,30	11,38	2
3	10,67	10,74	10,81	10,88	10,96	11,03	11,11	11,18	11,26	11,34	11,42	3
4	10,71	10,78	10,85	10,92	10,99	11,07	11,15	11,22	11,30	11,38	11,46	4
5°	10,74	10,82	10,89	10,96	11,04	11,11	11,19	11,26	11,34	11,42	11,50	5°
6	10,78	10,85	10,93	11,00	11,07	11,15	11,23	11,30	11,38	11,46	11,54	6
7	10,82	10,89	10,97	11,04	11,11	11,19	11,27	11,34	11,42	11,50	11,58	7
8	10,86	10,93	11,01	11,08	11,15	11,23	11,31	11,38	11,46	11,54	11,63	8
9	10,90	10,97	11,04	11,12	11,19	11,27	11,35	11,43	11,51	11,59	11,67	9
10°	10,94	11,01	11,08	11,16	11,23	11,31	11,39	11,47	11,55	11,63	11,71	10°
11	10,98	11,05	11,12	11,20	11,27	11,35	11,43	11,51	11,59	11,67	11,75	11
12	11,01	11,09	11,16	11,24	11,31	11,39	11,47	11,55	11,63	11,71	11,79	12
13	11,05	11,13	11,20	11,28	11,35	11,43	11,51	11,59	11,67	11,75	11,83	13
14	11,09	11,17	11,24	11,31	11,39	11,47	11,55	11,63	11,71	11,79	11,87	14
15°	11,13	11,20	11,28	11,36	11,43	11,51	11,59	11,67	11,75	11,83	11,91	15°
16	11,17	11,24	11,32	11,40	11,47	11,55	11,63	11,71	11,79	11,87	11,96	16
17	11,21	11,28	11,36	11,43	11,51	11,59	11,67	11,75	11,83	11,91	12,00	17
18	11,25	11,32	11,40	11,47	11,55	11,63	11,71	11,79	11,87	11,96	12,04	18
19	11,29	11,36	11,44	11,51	11,59	11,67	11,75	11,83	11,91	12,00	12,08	19
20°	11,32	11,40	11,48	11,55	11,63	11,71	11,79	11,87	11,95	12,04	12,12	20°
21	11,36	11,44	11,52	11,59	11,67	11,75	11,83	11,91	11,99	12,08	12,16	21
22	11,40	11,48	11,55	11,63	11,71	11,79	11,87	11,95	12,04	12,12	12,20	22
23	11,44	11,52	11,59	11,67	11,75	11,83	11,91	11,99	12,08	12,16	12,25	23
24	11,48	11,56	11,63	11,71	11,79	11,87	11,95	12,03	12,12	12,20	12,29	24
25°	11,52	11,59	11,67	11,75	11,83	11,91	11,99	12,07	12,16	12,24	12,33	25°
26	11,56	11,63	11,71	11,79	11,87	11,95	12,03	12,11	12,20	12,28	12,37	26
27	11,60	11,67	11,75	11,83	11,91	11,99	12,07	12,16	12,24	12,32	12,41	27
28	11,63	11,71	11,79	11,87	11,95	12,03	12,11	12,20	12,28	12,37	12,45	28
29	11,67	11,75	11,83	11,91	11,99	12,07	12,15	12,24	12,32	12,41	12,49	29
30°	11,71	11,79	11,87	11,95	12,03	12,11	12,19	12,28	12,36	12,45	12,54	30°
31	11,75	11,83	11,91	11,99	12,07	12,15	12,23	12,32	12,40	12,49	12,58	31
32	11,79	11,87	11,95	12,02	12,11	12,19	12,27	12,36	12,44	12,53	12,62	32
33	11,83	11,91	11,99	12,07	12,15	12,23	12,31	12,40	12,48	12,57	12,66	33
34	11,87	11,94	12,02	12,10	12,19	12,27	12,35	12,44	12,53	12,61	12,70	34
35°	11,90	11,98	12,06	12,15	12,23	12,31	12,39	12,48	12,57	12,65	12,74	35°

(vgl. S. 531.)

Barometrische Höhenstufen.

Höhendifferenz Δh_1 für die Barometerdifferenz 1^{mm}.

$$\Delta h_1 = \frac{8019}{B}(1 + 0{,}003665\, t)$$

t	Mittlerer Barometerstand B in Millimetern											t
	700	690	680	670	660	650	640	630	620	610	600	
	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	
— 5°	11,25	11,41	11,58	11,75	11,93	12,11	12,30	12,50	12,70	12,90	13,12	— 5°
— 4	11,29	11,45	11,62	11,79	11,97	12,16	12,35	12,54	12,74	12,95	13,17	— 4
— 3	11,33	11,49	11,66	11,84	12,02	12,20	12,39	12,59	12,79	13,00	13,22	— 3
— 2	11,37	11,54	11,71	11,88	12,06	12,25	12,44	12,64	12,84	13,05	13,27	— 2
— 1	11,41	11,58	11,75	11,93	12,11	12.29	12,48	12,68	12,89	13,10	13,32	— 1
0°	11,46	11,62	11,79	11,97	12,15	12,34	12,53	12,73	12,93	13,15	13,36	0°
1	11,50	11,66	11,84	12,01	12,19	12,38	12,58	12,78	12,98	13,19	13,41	1
2	11,54	11,71	11,88	12,06	12,24	12,43	12,62	12,82	13,03	13,24	13,46	2
3	11,58	11,75	11,92	12,10	12,28	12,47	12,67	12,87	13,08	13,29	13,51	3
4	11,62	11,79	11,97	12,14	12,33	12,52	12,71	12,92	13,12	13,34	13,56	4
5°	11,67	11,83	12,01	12,19	12,37	12,56	12,76	12,96	13,17	13,39	13,61	5°
6	11,71	11,88	12,05	12,23	12,42	12,61	12,81	13,01	13,22	13,44	13,66	6
7	11,75	11,92	12,10	12,28	12,46	12,65	12,85	13,06	13,27	13,49	13,71	7
8	11,79	11,96	12,14	12,32	12,51	12,70	12,90	13,10	13,31	13,54	13,76	8
9	11,83	12,01	12,18	12,36	12,55	12,74	12,94	13,15	13,36	13,58	13,81	9
10°	11,88	12,05	12,23	12,41	12,60	12,79	12,99	13,20	13,41	13,63	13,85	10°
11	11,92	12,09	12,27	12,45	12,64	12,83	13,04	13,24	13,46	13,68	13,90	11
12	11,96	12,13	12,31	12,50	12,68	12,88	13,08	13,29	13,50	13,73	13,95	12
13	12,00	12,18	12,35	12,54	12,73	12,92	13,13	13,33	13,55	13,78	14,00	13
14	12,04	12,22	12,40	12,58	12,77	12,97	13,17	13,38	13,60	13,83	14,05	14
15°	12,08	12,26	12,44	12,63	12,82	13,01	13,22	13,43	13,65	13,88	14,10	15°
16	12,13	12,30	12,48	12,67	12,86	13,06	13,27	13,47	13,69	13,93	14,15	16
17	12,17	12,35	12,53	12,71	12,91	13,11	13,31	13,52	13,74	13,97	14,20	17
18	12,21	12,39	12,57	12,76	12,95	13,15	13,36	13,57	13,79	14,02	14,25	18
19	12,25	12,43	12,61	12,80	13,00	13,20	13,40	13,61	13,83	14,07	14,30	19
20°	12,30	12,47	12,66	12,85	13,04	13,24	13,45	13,66	13,88	14,12	14,35	20°
21	12,34	12,52	12,70	12,89	13,09	13,29	13,50	13,71	13,93	14,17	14,39	21
22	12,38	12,56	12,74	12,93	13,13	13,33	13,54	13,75	13,98	14,22	14,44	22
23	12,42	12,60	12,79	12,98	13,17	13,38	13,59	13,80	14,02	14,27	14,49	23
24	12,46	12,64	12,83	13,02	13,22	13,42	13,63	13,85	14,07	14,31	14,54	24
25°	12,51	12,69	12,87	13,07	13,26	13,47	13,68	13,89	14,12	14,36	14,59	25°
26	12,55	12,73	12,92	13,11	13,31	13,51	13,72	13,94	14,17	14,41	14,64	26
27	12,59	12,77	12,96	13,15	13,35	13,56	13,77	13,99	14,21	14,46	14,69	27
28	12,63	12,81	13,00	13,20	13,40	13,60	13,82	14,03	14,26	14,51	14,74	28
29	12,67	12,86	13,05	13,24	13,44	13,65	13,86	14,08	14,31	14,56	14,79	29
30°	12,72	12,90	13,09	13,29	13,49	13,69	13,91	14,13	14,36	14,61	14,84	30°
31	12,76	12,94	13,13	13,33	13,53	13,74	13,96	14,17	14,40	14,66	14,88	31
32	12,80	12,99	13,18	13,37	13,57	13,78	14,00	14,22	14,45	14,70	14,93	32
33	12,84	13,03	13,22	13,42	13,62	13,83	14,05	14,27	14,50	14,75	14,98	33
34	12,88	13,07	13,26	13,46	13,66	13,87	14,09	14,31	14,55	14,80	15,03	34
35°	12,93	13,11	13,31	13,50	13,71	13,92	14,14	14,36	14,59	14,83	15,08	35°

(vgl. S. 531.)

Reduktion v. Schrittwerten auf Meter durch Barometer-Differenzen.

I. Aufwärts.

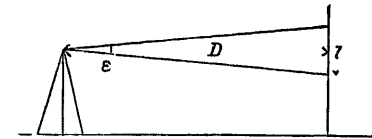
Schrittzahl	Barometer-Differenz $\varDelta B$																
	mm 0,0	*mm* —0,1	*mm* —0,2	*mm* —0,3	*mm* —0,4	*mm* —0,5	*mm* —0,6	*mm* —0,7	*mm* —0,8	*mm* —0,9	*mm* —1,0	*mm* —1,1	*mm* —1,2	*mm* —1,3	*mm* —1,4	*mm* —1,5	*mm* —1,6
	m	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*
5	4																
10	8	6	3														
15	12	10	8	5													
20	15	14	12	10	6												
25	19	18	16	14	12	7											
30	23	22	20	18	16	14	8										
35	27	26	24	22	20	19	17										
40	31	30	28	26	24	22	20										
45	35	34	32	30	28	27	25	22	18								
50	38	37	36	34	32	30	28	26	24	16							
55	42	41	40	38	37	35	32	30	28	27	19						
60	46	45	44	42	40	39	36	34	33	31	29	27					
65	50	49	48	47	45	42	41	38	37	34	32	31					
70	54	53	52	51	48	47	45	42	41	38	37	34	33				
75	58	57	56	54	52	51	49	47	44	43	40	38	37	36			
80	62	61	60	59	57	55	53	51	48	46	45	42	41	39			
85	65	64	63	62	60	58	57	55	52	50	48	44	42	40	37	35	
90	69	68	68	67	65	63	61	58	56	54	53	52	49	47	44	41	36
95	73	72	71	70	69	67	65	63	62	58	56	55	53	51	49	46	45
100	77	76	75	74	73	71	69	67	65	63	60	59	57	55	53	51	49

II. Abwärts.

Schrittzahl	Barometer-Differenz $\varDelta B$												
	mm 0,0	*mm* +0,2	*mm* +0,4	*mm* +0,6	*mm* +0,8	*mm* +1,0	*mm* +1,2	*mm* +1,4	*mm* +1,6	*mm* +1,8	*mm* +2,0	*mm* +2,2	*mm* +2,4
	m	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*
5	4												
10	8	7											
15	12	11	9										
20	15	14	14										
25	19	18	17	16									
30	23	22	21	20									
35	27	26	25	24	22								
40	31	30	29	28	27	25							
45	35	34	33	32	31	29							
50	38	37	36	36	35	34	31						
55	42	41	40	40	39	38	36	32					
60	46	44	44	43	43	42	41	38					
65	50	49	48	47	47	46	46	45	43	40			
70	54	53	52	51	50	50	49	48	45	42			
75	58	57	56	55	54	54	53	52	50	46			
80	62	61	60	58	58	57	57	55	54	52			
85	65	65	64	62	62	61	60	60	59	57	54		
90	69	68	67	66	66	65	65	63	62	61	59	56	
95	73	72	71	70	69	68	68	67	66	66	64	61	57
100	77	76	75	74	73	72	72	71	70	69	68	66	62

(vgl. S. 534.)

Distanzmessung durch den parallaktischen Winkel.

$$D = \frac{l}{\varepsilon}\varrho$$

ε	0″	10″	20″	30″	40″	50″	Diff. für 10″
0° 0′	∞	20626	10313	6875	5157	4125	
1	3438	2947	2578	2292	2063	1875	
2	1719	1587	1473	1375	1289	1213	
3	1146	1086	1031	982	938	897	38
4	859	825	793	764	737	711	23
5	688	665	645	625	607	589	16
6	573	557	543	529	516	503	12
7	491	480	469	458	448	439	9
8	430	421	413	404	397	389	7
9	382	375	368	362	356	350	6
0° 10′	343,8	338,1	333,7	327,4	322,3	317,3	4,8
11	312,5	307,9	302,3	298,9	294,6	290,5	4,0
12	286,5	282,6	278,7	275,0	271,4	267,9	3,5
13	264,4	261,1	257,8	254,6	251,5	548,5	2,9
14	245,6	242,7	239,8	237,1	234,4	231,8	2,6
15	229,2	226,7	224,2	221,8	219,4	217,1	2,2
16	214,9	212,6	210,5	208,3	206,3	204,2	2,0
17	202,2	200,3	198,3	196,4	194,6	192,8	1,8
18	191,0	189,2	187,5	185,8	184,2	182,5	1,6
19	180,9	179,4	177,8	176,3	174,8	173,3	1,4
0° 20′	171,9	170,5	169,1	167,7	166,3	165,1	1,4
21	163,7	162,4	161,1	159,9	158,7	157,5	1,1
22	156,3	155,1	153,9	152,8	151,7	150,6	1,1
23	149,5	148,4	147,3	146,3	145,3	144,2	1,0
24	143,2	142,3	141,3	140,3	189,4	138,4	0,9
25	137,5	136,6	135,7	134,8	131,9	133,1	0,9
26	132,2	131,4	130,6	129,7	128,9	128,1	0,8
27	127,3	126,5	125,8	125,0	124,2	123,5	0,7
28	122,8	122,1	121,3	120,6	119,9	119,2	0,7
29	118,5	118,0	117,2	116,5	115,9	115,2	0,6
0° 30′	114,6	114,0	113,4	112,7	112,1	111,5	0,6
31	110,9	110,3	109,7	109,1	108,6	108,0	0,6
32	107,4	106,9	106,3	105,8	105,2	104,7	0,5
33	104,2	103,7	103,1	102,6	102,1	101,6	0,5
34	101,1	100,6	100,1	99,6	99,2	98,7	0,5
35	98,2	97,8	97,3	96,8	96,4	95,9	0,4
36	95,5	95,1	94,6	94,2	93,8	93,3	0,4
37	92,9	92,5	92,1	91,7	91,3	90,9	0,4
38	90,5	90,1	89,7	89,3	88,9	88,5	0,4
39	88,1	87,8	87,4	87,0	86,7	86,3	0,4
0° 40′	85,9	85,6	85,2	84,9	84,5	84,2	0,4
41	83,8	83,5	83,2	82,8	82,5	82,2	0,4
42	81,9	81,5	81,2	80,9	80,6	80,3	0,3
43	79,9	79,6	79,3	79,0	78,7	78,4	0,3
44	78,1	77,8	77,5	77,3	77,0	76,7	0,3
45	76,4	76,1	75,8	75,6	75,3	75,0	0,3
46	74,7	74,5	74,2	73,9	73,7	73,4	0,3
47	73,1	72,9	72,6	72,4	72,1	71,9	0,3
48	71,6	71,4	71,1	70,9	70,6	70,4	0,2
49	70,2	69,9	69,7	69,4	69,2	69,0	0,2
0° 50′	68,8	68,5	68,3	68,1	67,9	67,6	0,2
51	67,4	67,2	67,0	66,8	66,5	66,3	0,2
52	66,1	65,9	65,7	65,5	65,3	65,1	0,2
53	64,9	64,7	64,4	64,2	64,1	63,9	0,2
54	63,7	63,5	63,3	63,1	62,9	62,7	0,2
55	62,5	62,3	62,1	61,9	61,8	61,6	0,2
56	61,4	61,2	61,0	60,8	60,7	60,5	0,2
57	60,3	60,1	60,0	59,8	59,6	59,4	0,1
58	59,3	59,1	58,9	58,8	58,6	58,4	0,1
59	58,3	58,1	57,9	57,8	57,6	57,5	0,1

ε	D
1° 0′	57,3
10	49,1
20	43,0
30	38,2
40	34,4
50	31,2
2° 0′	28,6
10	26,4
20	24,5
30	22,9
40	21,7
50	20,2
3° 0′	19,1
10	18,1
20	17,2
30	16,4
40	15,6
50	14,9
4° 0′	14,3
10	13,7
20	13,2
30	12,7
40	12,3
50	11,9
5° 0′	11,5
10	11,1
20	10,7
30	10,4
40	10,1
50	9,8
6° 0′	9,5

(vgl. S. 555—558.)

Berechnung von Messband-Zügen mit Höhenwinkeln.

20 cos α	α	20 sin α ,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9
20,0	0°	0,00	0,03	0,07	0,10	0,14	0,17	0,21	0,24	0,28	0,31
20,0	1	0,35	0,38	0,42	0,45	0,49	0,52	0,56	0,59	0,63	0,66
20,0	2	0,70	0,73	0,77	0,80	0,84	0,87	0,91	0,94	0,98	1,01
20,0	3	1,05	1,08	1,12	1,15	1,19	1,22	1,26	1,29	1,33	1,36
20,0	4	1,40	1,43	1,46	1,50	1,53	1,57	1,60	1,64	1,67	1,71
19,9	5	1,74	1,78	1,81	1,85	1,88	1,92	1,95	1,99	2,02	2,06
19,9	6	2,09	2,13	2,16	2,19	2,23	2,26	2,30	2,33	2,37	2,40
19,9	7	2,44	2,47	2,51	2,54	2,58	2,61	2,65	2,68	2,71	2,75
19,8	8	2,78	2,82	2,85	2,89	2,92	2,96	2,99	3,03	3,06	3,09
19,8	9	3,13	3,16	3,20	3,23	3,27	3,30	3,34	3,37	3,40	3,44
19,7	10	3,47	3,51	3,54	3,58	3,61	3,64	3,68	3,71	3,75	3,78
19,6	11	3,82	3,85	3,88	3,92	3,95	3,99	4,02	4,06	4,09	4,12
19,6	12	4,16	4,19	4,23	4,26	4,29	4,33	4,36	4,40	4,43	4,47
19,5	13	4,50	4,53	4,57	4,60	4,63	4,67	4,70	4,74	4,77	4,80
19,4	14	4,84	4,87	4,91	4,94	4,97	5,01	5,04	5,07	5,11	5,14
19,3	15	5,18	5,21	5,24	5,28	5,31	5,34	5,38	5,41	5,45	5,48
19,2	16	5,51	5,55	5,58	5,61	5,65	5,68	5,71	5,75	5,78	5,81
19,1	17	5,85	5,88	5,91	5,95	5,98	6,01	6,05	6,08	6,11	6,15
19,0	18	6,18	6,21	6,25	6,28	6,31	6,35	6,38	6,41	6,45	6,48
18,9	19	6,51	6,54	6,58	6,61	6,64	6,68	6,71	6,74	6,77	6,81
18,8	20	6,84	6,87	6,91	6,94	6,97	7,00	7,04	7,07	7,10	7,13
18,7	21	7,17	7,20	7,23	7,27	7,30	7,33	7,36	7,39	7,43	7,46
18,5	22	7,49	7,52	7,56	7,59	7,62	7,65	7,69	7,72	7,75	7,78
18,4	23	7,81	7,85	7,88	7,91	7,94	7,98	8,01	8,04	8,07	8,10
18,3	24	8,13	8,17	8,20	8,23	8,26	8,29	8,33	8,36	8,39	8,42
18,1	25	8,45	8,48	8,52	8,55	8,58	8,61	8,64	8,67	8,70	8,74
18,0	26	8,77	8,80	8,83	8,86	8,89	8,92	8,96	8,99	9,02	9,05
17,8	27	9,08	9,11	9,14	9,17	9,20	9,23	9,27	9,30	9,33	9,36
17,7	28	9,39	9,42	9,45	9,48	9,51	9,54	9,57	9,60	9,64	9,67
17,5	29	9,70	9,73	9,76	9,79	9,82	9,85	9,88	9,91	9,94	9,97
17,3	30	10,00	10,03	10,06	10,09	10,12	10,15	10,18	10,21	10,24	10,27
17,1	31	10,30	10,33	10,36	10,39	10,42	10,45	10,48	10,51	10,54	10,57
17,0	32	10,60	10,63	10,66	10,69	10,72	10,75	10,78	10,80	10,83	10,86
16,8	33	10,89	10,92	10,95	10,98	11,01	11,04	11,07	11,10	11,13	11,15
16,6	34	11,18	11,21	11,24	11,27	11,30	11,33	11,36	11,39	11,41	11,44
16,4	35	11,47	11,50	11,53	11,56	11,59	11,61	11,64	11,67	11,70	11,73
16,2	36	11,76	11,78	11,81	11,84	11,87	11,90	11,92	11,95	11,98	12,01
16,0	37	12,04	12,06	12,09	12,12	12,15	12,18	12,20	12,23	12,26	12,29
15,8	38	12,31	12,34	12,37	12,40	12,42	12,45	12,48	12,50	12,53	12,56
15,5	39	12,59	12,61	12,64	12,67	12,69	12,72	12,75	12,78	12,80	12,83
15,3	40	12,86	12,88	12,91	12,94	12,96	12,99	13,02	13,04	13,07	33,09
15,1	41	13,12	13,15	13,17	13,20	13,23	13,25	13,28	13,30	13,33	13,36
14,9	42	13,38	13,41	13,43	13,46	13,49	13,51	13,54	13,56	13,59	13,61
14,6	43	13,64	13,67	13,69	13,72	13,74	13,77	13,79	13,82	13,84	13,87
14,4	44	13,89	13,92	13,94	13,97	13,99	14,02	14,04	14,07	14,09	14,12

(vgl. S. 630—631.)

Magnetische Missweisung, westlich, für die Mitte des Jahres 1890.

Geogr. Breite	Geographische Länge, von *Ferro* gezählt.																			
	20°	21°	22°	23°	24°	25°	26°	27°	28°	29°	30°	31°	32°	33°	34°	35°	36°	37°	38°	39°
55° 0′	16,8°	16,1°	15,4°	14,8°	14,1°	13,6°	13,0°	12,4°	11,9°	11,3°	10,8°	10,1°	9,3°	8,7°	8,2°	7,7°	7,1°	6,6°	6,1°	5,6°
54 30	16,7	16,1	15,3	14,7	14,1	13,5	12,9	12,4	11,8	11,3	10,7	10,0	9,3	8,6	8,1	7,6	7,1	6,6	6,1	5,6
54 0	16,6	16,0	15,3	14,7	14,1	13,5	12,9	12,4	11,8	11,3	10,7	9,9	9,2	8,6	8,0	7,6	7,1	6,6	6,1	5,7
53 30	16,6	15,9	15,2	14,7	14,0	13,5	12,9	12,3	11,8	11,2	10,7	9,9	9,2	8,6	8,0	7,6	7,1	6,7	6,2	5,7
53 0	16,5	15,8	15,2	14,6	14,0	13,4	12,9	12,3	11,8	11,2	10,7	10,0	9,2	8,6	8,1	7,6	7,2	6,8	6,3	5,8
52° 30′	16,3	15,7	15,1	14,6	13,9	13,4	12,9	12,3	11,8	11,2	10,7	10,1	9,3	8,7	8,2	7,7	7,3	6,8	6,4	5,9
52 0	16,2	15,6	15,0	14,5	13,9	13,4	12,8	12,3	11,8	11,2	10,7	10,1	9,4	8,7	8,2	7,8	7,4	6,9	6,5	6,0
51 30	16,0	15,5	15,0	14,4	13,9	13,4	12,8	12,3	11,7	11,2	10,7	10,1	9,4	8,8	8,3	7,9	7,5	7,1	6,6	6,2
51 0	15,9	15,4	14,9	14,4	13,8	13,3	12,8	12,2	11,7	11,2	10,7	10,2	9,5	9,0	8,5	8,0	7,6	7,2	6,8	6,4
50 30	15,8	15,2	14,8	14,3	13,7	13,3	12,8	12,2	11,7	11,2	10,7	10,2	9,5	9,2	8,6	8,2	7,8	7,3	6,9	6,5
50° 0′	15,6	15,1	14,7	14,2	13,7	13,2	12,8	12,2	11,7	11,2	10,7	10,2	9,6	9,2	8,7	8,3	7,9	7,5	7,0	6,6
49 30	15,5	15,0	14,6	14,1	13,7	13,2	12,7	12,2	11,7	11,2	10,7	10,2	9,7	9,2	8,8	8,5	8,0	7,6	7,1	6,6
49 0	15,4	14,9	14,5	14,0	13,6	13,1	12,6	12,1	11,6	11,1	10,6	10,2	9,7	9,3	8,9	8,6	8,2	7,8	7,3	6,8
48 30	15,3	14,8	14,4	14,0	13,5	13,0	12,5	12,0	11,6	11,1	10,6	10,2	9,7	9,3	9,0	8,6	8,1	7,9	7,4	7,0
48 0	15,2	14,7	14,3	13,9	13,4	12,9	12,4	11,9	11,5	11,0	10,6	10,2	9,7	9,5	9,0	8,7	8,1	7,9	7,5	7,1
47° 30′	15,1	14,6	14,1	13,7	13,3	12,8	12,3	11,9	11,4	11,0	10,5	10,1	9,7	9,3	9,0	8,7	8,2	7,9	7,5	7,1
47 0	15,0	14,5	14,0	13,6	13,2	12,7	12,3	11,8	11,4	10,9	10,5	10,0	9,6	9,3	9,0	8,7	8,2	7,9	7,5	7,2
46 30	14,8	14,3	13,9	13,5	13,0	12,6	12,1	11,7	11,3	10,9	10,4	10,0	9,6	9,3	9,0	8,6	8,2	7,9	7,5	7,2
46 0	14,7	14,2	13,8	13,4	12,9	12,5	12,0	11,6	11,2	10,8	10,3	9,9	9,5	9,2	8,9	8,6	8,3	7,8	7,5	7,2
45 30	14,5	14,1	13,7	13,3	12,8	12,4	12,0	11,5	11,1	10,7	10,3	9,9	9,4	9,1	8,9	8,6	8,3	7,9	7,5	7,2
45 0	14,4	14,0	13,6	13,1	12,8	12,3	11,9	11,5	11,0	10,6	10,2	9,8	9,3	9,0	8,8	8,5	8,3	7,8	7,5	7,1
	2°20′	3°20′	4°20′	5°20′	6°20′	7°20′	8°20′	9°20′	10°20′	11°20′	12°20′	13°20′	14°20′	15°20′	16°20′	17°20′	18°20′	19°20′	20°20′	21°20′
	Geographische Länge, von *Grennwich* gezählt.																			

Jährliche Abnahme der Missweisung = 0,125°

Jahr:	1888	1889	1890	1891	1892	1893	1894	1895	1896	1897	1898	1899	1900
Tafel-Reduktion:	+0,3°	+0,1°	0,0°	−0,1°	−0,3°	−0,4°	−0,5°	−0,6°	−0,8°	−0,9°	−1,0°	−1,1°	−1,3°

(vgl. 616—617.)

(vgl. S. 616.)

Tachymetrische Tafel.

99 ($\frac{1}{2} \sin 2\alpha$)

α	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°
0′	0,00	1,73	3,45	5,17	6,89	8,60	10,29	11,98	13,64	15,30
3′	0,09	1,81	3,54	5,26	6,97	8,68	10,38	12,06	13,73	15,38
6′	0,17	1,90	3,63	5,35	7,06	8,77	10,46	12,14	13,81	15,46
9′	0,26	1,99	3,71	5,43	7,15	8,85	10,54	12,23	13,89	15,54
12′	0,35	2,07	3,80	5,52	7,23	8,94	10,63	12,31	13,98	15,62
15′	0,43	2,16	3,88	5,60	7,32	9,02	10,71	12,39	14,06	15,71
18′	0,52	2,25	3,97	5,69	7,40	9,11	10,80	12,48	14,14	15,79
21′	0,60	2,33	4,06	5,78	7,49	9,19	10,88	12,56	14,22	15,87
24′	0,69	2,42	4,14	5,86	7,57	9,28	10,97	12,64	14,31	15,95
27′	0,78	2,50	4,23	5,95	7,66	9,36	11,05	12,73	14,39	16,03
30′	0,86	2,59	4,31	6,03	7,74	9,45	11,14	12,81	14,47	16,12
33′	0,95	2,68	4,40	6,12	7,83	9,53	11,21	12,89	14,55	16,20
36′	1,04	2,76	4,49	6,20	7,91	9,61	11,30	12,98	14,64	16,28
39′	1,12	2,85	4,57	6,29	8,00	9,70	11,39	13,06	14,72	16,36
42′	1,21	2,94	4,66	6,38	8,08	9,78	11,47	13,15	14,80	16,44
45′	1,30	3,02	4,74	6,46	8,17	9,87	11,56	13,23	14,88	16,52
48′	1,38	3,11	4,83	6,55	8,26	9,95	11,64	13,31	14,97	16,60
51′	1,47	3,19	4,92	6,63	8,34	10,04	11,72	13,39	15,05	16,69
54′	1,55	3,28	5,00	6,72	8,43	10,12	11,81	13,48	15,13	16,77
57′	1,64	3,37	5,09	6,80	8,51	10,21	11,89	13,56	15,21	16,85

α	10°	11°	12°	13°	14°	15°	16°	17°	18°	19°
0′	16,93	18,54	20,13	21,70	23,24	24,75	26,23	27,68	29,10	30,48
3′	17,01	18,62	20,21	21,78	23,32	24,82	26,30	27,75	29,17	30,54
6′	17,09	18,70	20,29	21,85	23,39	24,90	26,38	27,82	29,23	30,61
9′	17,17	18,78	20,37	21,93	23,47	24,97	26,45	27,89	29,30	30,68
12′	17,25	18,86	20,45	22,01	23,54	25,05	26,52	27,97	29,37	30,75
15′	17,34	18,94	20,53	22,09	23,62	25,12	26,60	28,04	29,44	30,81
18′	17,42	19,02	20,61	22,16	23,70	25,20	26,67	28,11	29,51	30,88
21′	17,50	19,10	20,68	22,24	23,77	25,27	26,74	28,18	29,58	30,95
24′	17,58	19,18	20,76	22,32	23,85	25,35	26,81	28,25	29,65	31,02
27′	17,66	19,26	20,84	22,40	23,92	25,42	26,89	28,32	29,72	31,08
30′	17,74	19,34	20,92	22,47	24,00	25,49	26,96	28,39	29,79	31.15
33′	17,82	19,42	21,00	22,55	24,07	25,57	27,03	28,46	29,86	31,22
36′	17,90	19,50	21,08	22,63	24,15	25,64	27,10	28,53	29,93	31,29
39′	17,98	19,58	21,15	22,70	24,22	25,72	27,18	28,60	30,00	31,35
42′	18,06	19,66	21,23	22,78	24,30	25,79	27,25	28,67	30,07	31,42
45′	18,14	19,74	21,31	22,86	24,37	25,86	27,32	28,74	30,13	31,49
48′	18,22	19.82	21,39	22,93	24,45	25,94	27,39	28,82	30,20	31,55
51′	18,30	19,90	21,47	23,01	24,53	26,01	27,46	28,89	30,27	31,62
54′	18,38	19,98	21,54	23,09	24,60	26,08	27,54	28,96	30,34	31,69
57′	18,46	20,05	21,62	23,16	24,68	26,16	27,61	29,03	30,41	31,75

α	20°	21°	22°	23°	24°	25°	26°	27°	28°	29°
0′	31,82	33,12	34,39	35,61	36,79	37,92	39,01	40,05	41,04	41,98
3′	31,88	33,19	34,45	35,67	36,84	37,97	39,06	40,10	41,09	42,02
6′	31,95	33,25	34,51	35,73	36,90	38,03	39,11	40,15	41,13	42,07
9′	32 02	33,31	34,57	35,79	36,96	38,09	39,17	40,20	41,18	42,12
12′	32,08	33,38	34,63	35,85	37,07	38,14	39,22	40,25	41,23	42,16
15′	32.15	33,44	34,70	35,91	37,07	38,20	39,27	40,30	41,28	42,21
18′	32,21	33,51	34,76	35,97	37,13	38,25	39,32	40,35	41,32	42,25
21′	32,28	33,57	34,82	36,02	37,19	38,31	39,38	40,40	41,37	42,30
24′	32,34	33,63	34,88	36,08	37,24	38,36	39,43	40,45	41,42	42,34
27′	32,41	33,70	34,94	36,14	37,30	38,41	39,48	40,50	41,47	42,39
30′	32,47	33,76	35,00	36,20	37,36	38,47	39,53	40,55	41,51	42,43
33′	32,54	33,82	35,06	36,26	37,41	38,52	39,58	40,60	41,56	42,47
36′	32,61	33,89	35,12	36,32	37,47	38,58	39,64	40,65	41,61	42,52
39′	32,67	33,95	35,18	36,38	37,53	38,63	39,69	40,70	41,65	42,56
42′	32,73	34,01	35,25	36,44	37,58	38,69	39,74	40,75	41,70	42,61
45′	32,80	34,07	35,31	36,50	37,64	38,74	39,79	40,79	41,75	42,65
48′	32,86	34,14	35,37	36,55	37,70	38,79	39,84	40,84	41,79	42,69
51′	32,93	34,20	35,43	36,61	37,75	38,85	39,89	40,89	41,84	42,74
54′	32,99	34,26	35.49	36,67	37,81	38,90	39,94	40,94	41,89	42,78
57′	33,06	34,32	35,55	36,73	37,86	38,95	40,00	40,99	41,93	42,83

99 $\cos^2 \alpha$	
0	99,0
1°	99,0
2°	98,9
3°	98,8
4°	98,5
5°	98,2
6°	97,9
7°	97,5
8°	97,1
9°	96,6
10°	96,0
10° 30′	95,7
11°	95,4
11° 30′	95,1
12°	94,7
12° 30′	94,4
13°	94,0
13° 30′	93,6
14°	93,2
14° 30′	92,8
15°	92,4
15° 30′	91,9
16°	91,5
16° 30′	91,0
17°	90,5
17° 30′	90,0
18°	89,5
18° 30′	89,0
19°	88,5
19° 30′	88,0
20°	87,4
20° 20′	87,0
20° 40′	86,7
21°	86,3
21° 20′	85,9
21° 40′	85,5
22°	85,1
22° 20′	84,7
22° 40′	84,3
23°	83,9
23° 20′	83,5
23° 40′	83,0
24°	82,6
24° 20′	82,2
24° 40′	81,8
25°	81,3
25° 20′	80,9
25° 40′	80,4
26°	80,0
26° 20′	79,5
26° 40′	79,1
27°	78,6
27° 20′	78,1
27° 40′	77,7
28°	77,2
28° 20′	76,7
28° 40′	76,2
29°	75,7
29° 20′	75,2
29° 40′	74,7
30°	74,3

Probeseite der ausführlicheren Tafel für 10^m bis 100^m.

(vgl S. 609)

Tachymetrische Tafel.

100 ($\frac{1}{2}$ *sin* 2 α)

α	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°
0′	0,00	1,74	3,49	5,23	6,96	8,68	10,40	12,10	13,78	15,45
2′	0,06	1,80	3,55	5,28	7,02	8,74	10,45	12,15	13,84	15,51
4′	0,12	1,86	3,60	5,34	7,07	8,80	10,51	12,21	13,89	15,56
6′	0,17	1,92	3,66	5,40	7,13	8,85	10,57	12,27	13,95	15,62
8′	0,23	1,98	3,72	5,46	7,19	8,91	10,62	12,32	14,01	15,67
10′	0,29	2,04	3,78	5,52	7,25	8,97	10,68	12,38	14,06	15,73
12′	0,35	2,09	3,84	5,57	7,30	9,03	10,74	12,43	14,12	15,78
14′	0,41	2,15	3,89	5,63	7,36	9,08	10,79	12,49	14,17	15,84
16′	0,47	2,21	3,95	5,69	7,42	9,14	10,85	12,55	14,23	15,89
18′	0,52	2,27	4,01	5,75	7,48	9,20	10,91	12,60	14,28	15,95
20′	0,58	2,33	4,07	5,80	7,53	9,25	10,96	12,66	14,34	16,00
22′	0,64	2,38	4,13	5,86	7,59	9,31	11,02	12,72	14,40	16,06
24′	0,70	2,44	4,18	5,92	7,65	9,37	11,08	12,77	14,45	16,11
26′	0,76	2,50	4,24	5,98	7,71	9,43	11,13	12,83	14,51	16,17
28′	0,81	2,56	4,30	6,04	7,76	9,48	11,19	12,88	14,56	16,22
30′	0,87	2,62	4,36	6,09	7,82	9,54	11,25	12,94	14,62	16,28
32′	0,93	2,67	4,42	6,15	7,88	9,60	11,30	13,00	14,67	16,33
34′	0,99	2,73	4,47	6,21	7,94	9,65	11,36	13,05	14,73	16,39
36′	1,05	2,79	4,53	6,27	7,99	9,71	11,42	13,11	14,79	16,44
38′	1,11	2,85	4,59	6,32	8,05	9,77	11,47	13,17	14,84	16,50
40′	1,16	2,91	4,65	6,38	8,11	9,83	11,53	13,22	14,90	16,55
42′	1,22	2,97	4,71	6,44	8,17	9,88	11,59	13,28	14,95	16,61
44′	1,28	3,02	4,76	6,50	8,22	9,94	11,64	13,33	15,01	16,66
46′	1,34	3,08	4,82	6,56	8,28	10,00	11,70	13,39	15,06	16,72
48′	1,40	3,14	4,88	6,61	8,34	10,05	11,76	13,45	15,12	16,77
50′	1,45	3,20	4,94	6,67	8,40	10,11	11,81	13,50	15,17	16,83
52′	1,51	3,26	4,99	6,73	8,45	10,17	11,87	13,56	15,23	16,88
54′	1,57	3,31	5,05	6,79	8,51	10,22	11,93	13,61	15,28	16,94
56′	1,63	3,37	5,11	6,84	8,57	10,28	11,98	13,67	15,34	16,99
58′	1,69	3,43	5,17	6,90	8,63	10,34	12,04	13,73	15,40	17,05

α	10°	11°	12°	13°	14°	15°	16°	17°	18°	19°
0′	17,10	18,73	20,34	21,92	23,47	25,00	26,50	27,96	29,39	30,78
2′	17,16	18,78	20,39	21,97	23,52	25,05	26,55	28,01	29,44	30,83
4′	17,21	18,84	20,44	22,02	23,58	25,10	26,59	28,06	29,48	30,87
6′	17,26	18,89	20,50	22,08	23,63	25,15	26,64	28,10	29,53	30,92
8′	17,32	18,95	20,55	22,13	23,68	25,20	26,69	28,15	29,58	30,97
10′	17,37	19,00	20,60	22,18	23,73	25,25	26,74	28,20	29,62	31,01
12′	17,43	19,05	20,66	22,23	23,78	25,30	26,79	28,25	29,67	31,06
14′	17,48	19,11	20,71	22,28	23,83	25,35	26,84	28,30	29,72	31,10
16′	17,54	19,16	20,76	22,34	23,88	25,40	26,89	28,34	29,76	31,15
18′	17,59	19,21	20,81	22,39	23,93	25,45	26,94	28,39	29,81	31,19
20′	17,65	19,27	20,87	22,44	23,99	25,50	26,99	28,44	29,86	31,24
22′	17,70	19,32	20,92	22,49	24,04	25,55	27,04	28,49	29,90	31,28
24′	17,76	19,38	20,97	22,54	24,09	25,60	27,09	28,54	29,95	31,33
26′	17,81	19,43	21,03	22,60	24,14	25,65	27,13	28,58	30,00	31,38
28′	17,86	19,48	21,08	22,65	24,19	25,70	27,18	28,63	30,04	31,42
30′	17,92	19,54	21,13	22,70	24,24	25,75	27,23	28,68	30,09	31,47
32′	17,97	19,59	21,18	22,75	24,29	25,80	27,28	28,73	30,14	31,51
34′	18,03	19,64	21,24	22,80	24,34	25,85	27,33	28,77	30,18	31,56
36′	18,08	19,70	21,29	22,85	24,39	25,90	27,38	28,82	30,23	31,60
38′	18,14	19,75	21,34	22,91	24,44	25,95	27,43	28,87	30,28	31,65
40′	18,19	19,80	21,39	22,96	24,49	26,00	27,48	28,91	30,32	31,69
42′	18,24	19,86	21,45	23,01	24,55	26,05	27,52	28,96	30,37	31,74
44′	18,30	19,91	21,50	23,06	24,60	26,10	27,57	29,01	30,41	31,78
46′	18,35	19,96	21,55	23,11	24,65	26,15	27,62	29,06	30,46	31,83
48′	18,41	20,02	21,60	23,16	24,70	26,20	27,67	29,11	30,51	31,87
50′	18,46	20,07	21,66	23,22	24,75	26,25	27,72	29,15	30,55	31,92
52′	18,51	20,12	21,71	23,27	24,80	26,30	27,77	29,20	30,60	31,96
54′	18,57	20,18	21,76	23,32	24,85	26,35	27,81	29,25	30,65	32,01
56′	18,62	20,23	21,81	23,37	24,90	26,40	27,86	29,30	30,69	32,05
58′	18,68	20,28	21,87	23,42	24,95	26,45	27,91	29,34	30,74	32,09

100 $\cos^2 \alpha$	
0°	100,0
0° 30′	100,0
1°	100,0
1° 30′	99,9
2°	99,9
2° 30′	99,8
3°	99,7
3° 30′	99,6
4°	99,5
4° 30′	99,4
5°	99,2
5° 30	99,1
6°	98,9
6° 30′	98,7
7°	98,5
7° 30′	98,3
8°	98,1
8° 30′	97,8
9°	97,6
9° 30′	97,3
10°	97,0
10° 20′	96,8
10° 40′	96,6
11°	96,4
11° 20′	96,1
11° 40′	95,9
12°	95,7
12° 20′	95,4
12° 40′	95,2
13°	94,9
13° 20′	94,7
13° 40′	94,4
14°	94,1
14° 20′	93,9
14° 40′	93,6
15°	93,3
15° 20′	93,0
15° 40′	92,7
16°	92,4
16° 20′	92,1
16° 40′	91,8
17°	91,5
17° 20′	91,1
17° 40′	90,8
18°	90,5
18° 20′	90,1
18° 40′	89,8
19°	89,4
19° 20′	89,0
19° 40′	88,7
20°	88,3

Probeseite der ausführlicheren Tafel für 100^m bis 175^m.

(vgl. S. 609.)

Tachymetrische Tafel.

175 ($\frac{1}{2} \sin 2\alpha$)

α	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°
0′	0,00	3,05	6,10	9,15	12,18	15,19	18,19	21,17	24,12	27,04
2′	0,10	3,16	6,21	9,25	12,28	15,29	18,29	21,27	24,22	27,14
4′	0,20	3,26	6,31	9,35	12,38	15,39	18,39	21,37	24,31	27,23
6′	0,31	3,36	6,41	9,45	12,48	15,49	18,49	21,46	24,41	27,33
8′	0,41	3,46	6,51	9,55	12,58	15,60	18,59	21,56	24,51	27,43
10′	0,51	3,56	6,61	9,65	12,68	15,70	18,69	21,66	24,61	27,52
12′	0,61	3,66	6,71	9,75	12,78	15,80	18,79	21,76	24,70	27,62
14′	0,71	3,77	6,81	9,85	12,88	15,90	18,89	21,86	24,80	27,72
16′	0,81	3,87	6,92	9,96	12,98	16,00	18,99	21,96	24,90	27,81
18′	0,92	3,97	7,02	10,06	13,08	16,10	19,09	22,06	25,00	27,91
20′	1,02	4,07	7,12	10,16	13,18	16,20	19,19	22,15	25,10	28,01
22′	1,12	4,17	7,22	10,26	13,29	16,30	19,29	22,25	25,19	28,10
24′	1,22	4,27	7,32	10,36	13,39	16,40	19,39	22,35	25,29	28,20
26′	1,32	4,38	7,42	10,46	13,49	16,50	19,48	22,45	25,39	28,29
28′	1,43	4,48	7,52	10,56	13,59	16,60	19,58	22,55	25,49	28,39
30′	1,53	4,58	7,63	10,66	13,69	16,70	19,68	22,65	25,58	28,49
32′	1,63	4,68	7,73	10,76	13,79	16,80	19,78	22,74	25,68	28,58
34′	1,73	4,78	7,83	10,87	13,89	16,90	19,88	22,84	25,78	28,68
36′	1,83	4,88	7,93	10,97	13,99	17,00	19,98	22,94	25,87	28,78
38′	1,93	4,99	8,03	11,07	14,09	17,10	20,08	23,04	25,97	28,87
40′	2,04	5,09	8,13	11,17	14,19	17,20	20,18	23,14	26,07	28,97
42′	2,14	5,19	8,23	11,27	14,29	17,30	20,28	23,24	26,17	29,06
44′	2,24	5,29	8,34	11,37	14,39	17,39	20,38	23,33	26,26	29,16
46′	2,34	5,39	8,44	11,47	14,49	17,49	20,48	23,43	26,36	29,26
48′	2,44	5,49	8,54	11,57	14,59	17,59	20,57	23,53	26,46	29,35
50′	2,54	5,60	8,64	11,67	14,69	17,69	20,67	23 63	26,55	29,45
52′	2,65	5,70	8,74	11,77	14,79	17,79	20,77	23,73	26,65	29,54
54′	2,75	5,80	8,84	11,88	14,89	17,89	20,87	23,82	26,75	29,64
56′	2,85	5,90	8,94	11,98	14,99	17,99	20,97	23,92	26,85	29,74
58′	2,95	6,00	9,04	12,08	15,09	18,09	21,07	24,02	26,94	29,83

α	10°	11°	12°	13°	14°	15°	16°	17°	18°	19°
0′	29,93	32,78	35,59	38,36	41,08	43,75	46,37	48,93	51,43	53,87
2′	30,02	32,87	35,68	38,45	41,17	43,84	46,45	49,01	51,51	53,95
4′	30,12	32,97	35,78	38,54	41,26	43,93	46,54	49,10	51,60	54,03
6′	30,21	33,06	35,87	38,63	41,35	44,01	46,63	49,18	51,68	54,11
8′	30,31	33,15	35,96	38,71	41,44	44,10	46,71	49,27	51,76	54,19
10′	30,40	33,25	36,05	38,81	41,53	44,19	46,80	49,35	51,84	54,27
12′	30,50	33,34	36,15	38,91	41,62	44,28	46,88	49,43	51,92	54,35
14′	30,60	33,44	36,24	38,09	41,71	44,37	46,97	49,52	52,01	54,43
16′	30,69	33,53	36,33	39,09	41,80	44,45	47,06	49,60	52,09	54,51
18′	30,79	33,63	36,42	39,18	41,89	44,54	47,14	49,69	52,17	54,59
20′	30,88	33,72	36,52	39,27	41,97	44,63	47,23	49,77	52,25	54,67
22′	30,98	33,81	36,61	39,36	42,06	44,72	47,31	49,85	52,33	54,75
24′	31,07	33,91	36,70	39,45	42,15	44,80	47,40	49,94	52,41	54,83
26′	31,17	34,00	36,79	39,54	42,24	44,89	47,49	50,02	52,50	54,91
28′	31,26	34,10	36,89	39,63	42,33	44,98	47,57	50,10	52,58	54,99
30′	31,36	34,19	36,98	39,72	42,42	45,07	47,66	50,19	52,66	55,07
32′	31,45	34,28	37,07	39,81	42,51	45,15	47,74	50,27	52,74	55,14
34′	31,55	34,38	37,16	39,91	42,60	45,24	47,83	50,35	52,82	55,22
36′	31,64	34,47	37,26	40,00	42,69	45,33	47,91	50,44	52,90	55,30
38′	31,74	34,56	37,35	40,09	42,78	45,41	48,00	50,52	52,98	55,38
40′	31,83	34,66	37,44	40,18	42,87	45,50	48,08	50,60	53,06	55,46
42′	31,93	34,75	37,53	40,27	42,95	45,59	48,18	50,69	53,15	55,54
44′	32,02	34,84	37,62	40,36	43,04	45,68	48,25	50,71	53,23	55,62
46′	32,12	34,94	37,72	40,44	43,13	45,76	48,34	50,85	53,31	55,70
48′	32,21	35,03	37,81	40,54	43,22	45,85	48,42	50,94	53,39	55,77
50′	32,31	35,12	37,90	40,62	43,31	45,94	48,51	51,02	53,47	55,85
52′	32,40	35,22	37,99	40,71	43,40	46,02	48,59	51,10	53,55	55,93
54′	32,49	35,31	38,08	10,81	43,49	46,11	48,68	51,18	53,63	56,01
56′	32,59	35,40	38,17	40,90	43,57	46,20	48,76	51,27	53,71	56,09
58′	32,68	35,50	38,27	40,98	43,66	46,28	48,84	51,35	53,79	56,17

175 $\cos^2 \alpha$	
0°	175,0
0° 30′	175,0
1°	174,9
1° 30′	174,9
2°	174,8
2° 30′	174,7
3°	174,5
3° 30′	174,3
4°	174,1
4° 30′	173,9
5°	173,7
5° 30′	173,4
6°	173,1
6° 30′	172,8
7°	172,4
7° 30′	172,0
8°	171,6
8° 30′	171,2
9°	170,7
9° 30′	170,2
10°	169,7
10° 20′	169,4
10° 40′	169,0
11°	168,6
11° 20′	168,2
11° 40′	167,8
12°	167,4
12° 20′	167,0
12° 40′	166,6
13°	166,1
13° 20′	165,7
13° 40′	165,2
14°	164,8
14° 20′	164,3
14° 40′	163,8
15°	163,3
15° 20′	162,8
15° 40′	162,2
16°	161,7
16° 20′	161,2
16° 40′	160,6
17°	160,0
17° 20′	159,5
17° 40′	158,9
18°	158,3
18° 20′	157,7
18° 40′	157,1
19°	156,5
19° 20′	155,8
19° 40′	155,2
20°	154,5

Probeseite der ausführlicheren Tafel für 100^m bis 175^m.

(vgl S 609.)

Tachymetrische Tafel.

176 ($^1/_2$ *sin* 2 α)

α	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°
0′	0,00	3,07	6,14	9,20	12,25	15,28	18,30	21,29	24,26	27,19
1′	0,05	3,12	6,19	9,25	12,30	15,33	18,35	21,34	24,31	27,24
2′	0,10	3,17	6,24	9,30	12,35	15,38	18,40	21,39	24,35	27,29
3′	0,15	3,22	6,29	9,35	12,40	15,43	18,45	21,44	24,40	27,34
4′	0,20	3,28	6,34	9,40	12,45	15,48	18,50	21,49	24,45	27,39
5′	0,26	3,33	6,39	9,45	12,50	15,53	18,55	21,54	24,50	27,44
6′	0,31	3,38	6,44	9,50	12,55	15,58	18,60	21,59	24,55	27,49
7′	0,36	3,43	6,50	9,55	12,61	15,63	18,65	21,64	24,60	27,53
8′	0,41	3,48	6,55	9,61	12,65	15,68	18,70	21,69	24,65	27,58
9′	0,46	3,53	6,60	9,66	12,70	15,73	18,75	21,74	24,70	27,63
10′	0,51	3,58	6,65	9,71	12,75	15,78	18,80	21,79	24,75	27,68
11′	0,56	3,63	6,70	9,76	12,80	15,84	18,85	21,84	24,80	27,73
12′	0,61	3,69	6,75	9,81	12,86	15,89	18,90	21,88	24,85	27,78
13′	0,67	3,74	6,80	9,86	12,91	15,94	18,95	21,93	24,90	27,83
14′	0,72	3,79	6,85	9,91	12,96	15,99	19,00	21,98	24,94	27,87
15′	0,77	3,84	6,90	9,96	13,01	16,04	19,05	22,03	24,99	27,92
16′	0,82	3,89	6,96	10,01	13,06	16,09	19,10	22,08	25,04	27,97
17′	0,87	3,94	7,01	10,06	13,11	16,14	19,15	22,13	25,09	28,02
18′	0,92	3,99	7,06	10,11	13,16	16,19	19,20	22,18	25,14	28,07
19′	0,97	4,04	7,11	10,17	13,21	16,24	19,25	22,23	25,19	28,12
20′	1,02	4,09	7,16	10,22	13,26	16,29	19,30	22,28	25,24	28,17
21′	1,07	4,15	7,21	10,27	13,31	16,34	19,35	22,33	25,29	28,21
22′	1,13	4,20	7,26	10,32	13,36	16,39	19,40	22,38	25,34	28,26
23′	1,18	4,25	7,31	10,37	13,41	16,44	19,45	22,43	25,39	28,31
24′	1,23	4,30	7,36	10,42	13,46	16,49	19,50	22,48	25,43	28,36
25′	1,28	4,35	7,41	10,47	13,51	16,54	19,55	22,53	25,48	28,41
26′	1,33	4,40	7,47	10,52	13,56	16,59	19,60	22,58	25,53	28,46
27′	1,38	4,45	7,52	10,57	13,61	16,64	19,65	22,63	25,58	28,50
28′	1,43	4,50	7,57	10,62	13,67	16,69	19,70	22,68	25,63	28,55
29′	1,48	4,55	7,62	10,67	13,72	16,74	19,75	22,73	25,68	28,60
30′	1,54	4,61	7,67	10,72	13,77	16,79	19,80	22,78	25,73	28,65
31′	1,59	4,66	7,72	10,78	13,82	16,84	19,85	22,83	25,78	28,70
32′	1,64	4,71	7,77	10,83	13,87	16,89	19,90	22,87	25,83	28,75
33′	1,69	4,76	7,82	10,88	13,92	16,94	19,95	22,92	25,88	28,80
34′	1,74	4,81	7,87	10,93	13,97	16,99	20,00	22,97	25,92	28,84
35′	1,79	4,86	7,92	10,98	14,02	17,04	20,04	23,02	25,97	28,89
36′	1,84	4,91	7,98	11,03	14,07	17,09	20,09	23,07	26,02	28,94
37′	1,89	4,96	8,03	11,08	14,12	17,14	20,14	23,12	26,07	28,99
38′	1,95	5,01	8,08	11,13	14,17	17,19	20,19	23,17	26,12	29,04
39′	2,00	5,07	8,13	11,18	14,22	17,24	20,25	23,22	26,17	29,09
40′	2,05	5,12	8,18	11,23	14,27	17,29	20,29	23,27	26,22	29,13
41′	2,10	5,17	8,23	11,28	14,32	17,34	20,34	23,32	26,27	29,18
42′	2,15	5,22	8,28	11,33	14,37	17,39	20,39	23,37	26,32	29,23
43′	2,20	5,27	8,33	11,38	14,42	17,44	20,44	23,42	26,36	29,28
44′	2,25	5,32	8,38	11,44	14,47	17,49	20,49	23,47	26,41	29,33
45′	2,30	5,37	8,43	11,49	14,52	17,54	20,54	23,52	26,46	29,37
46′	2,35	5,42	8,49	11,54	14,57	17,59	20,59	23,57	26,51	29,42
47′	2,41	5,47	8,54	11,59	14,63	17,64	20,64	23,62	26,56	29,47
48′	2,46	5,53	8,59	11,64	14,68	17,69	20,69	23,66	26,61	29,52
49′	2,51	5,58	8,64	11,69	14,73	17,75	20,74	23,71	26,66	29,57
50′	2,56	5,63	8,69	11,74	14,78	17,80	20,79	23,76	26,71	29,62
51′	2,61	5,68	8,74	11,79	14,83	17,85	20,84	23,81	26,75	29,66
52′	2,66	5,73	8,79	11,84	14,88	17,90	20,89	23,86	26,80	29,71
53′	2,71	5,78	8,84	11,89	14,93	17,95	20,94	23,91	26,85	29,76
54′	2,76	5,83	8,89	11,94	14,98	18,00	20,99	23,96	26,90	29,81
55′	2,82	5,88	8,94	11,99	15,03	18,05	21,04	24,01	26,95	29,86
56′	2,87	5,93	8,99	12,04	15,08	18,10	21,09	24,06	27,00	29,91
57′	2,92	5,99	9,05	12,10	15,13	18,15	21,14	24,10	27,05	29,95
58′	2,97	6,04	9,10	12,15	15,18	18,20	21,19	24,16	27,10	30,00
59′	3,02	6,09	9,15	12,20	15,23	18,25	21,24	24,21	27,14	30,05

176 *cos*² α	
0°	176,0
0° 30′	176,0
1°	175,9
1° 30′	175,9
2°	175,8
2° 30′	175,7
3°	175,5
3° 30′	175,3
4°	175,1
4° 30′	174,9
5°	174,7
5° 20′	174,5
5° 40′	174,3
6°	174,1
6° 20′	173,9
6° 40′	173,6
7°	173,4
7° 20′	173,1
7° 40′	172,9
8°	172,6
8° 20′	172,3
8° 40′	172,0
9°	171,7
9° 20′	171,4
9° 40′	171,0
10°	170,7

Probeseite der ausführlicheren Tafel für 175ᵐ bis 250ᵐ.

(vgl. S. 609.)

Rechtwinklige Coordinaten für Kreisbögen.

Abscisse	Halbmesser										Abscisse
	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	
5	0,51	0,42	0,36	0,31	0,28	0,25	0,23	0,21	0,19	0,18	5
10	2,09	1,72	1,46	1,27	1,13	1,01	0,92	0,84	0,77	0,72	10
15	5,00	4,02	3,38	2,92	2,57	2,30	2,08	1,91	1,75	1,63	15
20	10,00	7,64	6,28	5,36	4,69	4,17	3,77	3,43	3,15	2,92	20
25	25,00	13,42	10,51	8,78	7,58	6,70	6,01	5,46	5,00	4,62	25
30		30,00	16,97	13,54	11,46	10,00	8,90	8,04	7,34	6,75	30
35			35,00	20,64	16,72	14,29	12,57	11,27	10,23	9,38	35
40				40,00	24,38	20,00	17,25	15,28	13,77	12,55	40
45					45,00	28,21	23,38	20,31	18,10	16,38	45
50						50,00	32,09	26,83	23,47	21,01	50

Abscisse	Halbmesser										Abscisse
	75	80	85	90	95	100	110	120	125	130	
5	0,17	0,16	0,15	0,14	0,13	0,13	0,11	0,10	0,10	0,10	5
10	0,67	0,63	0,59	0,56	0,53	0,50	0,46	0,42	0,40	0,39	10
15	1,52	1,42	1,33	1,26	1,19	1,13	1,03	0,94	0,90	0,87	15
20	2,72	2,54	2,39	2,25	2,13	2,02	1,83	1,68	1,61	1,55	20
25	4,29	4,01	3,76	3,54	3,35	3,18	2,88	2,63	2,53	2,43	25
30	6,26	5,84	5,47	5,15	4,86	4,61	4,17	3,81	3,65	3,51	30
35	8,67	8,06	7,54	7,08	6,68	6,33	5,72	5,22	5,00	4,80	35
40	11,56	10,72	10,00	9,38	8,83	8,35	7,53	6,86	6,57	6,31	40
45	15,00	13,86	12,89	12,06	11,33	10,70	9,63	8,76	8,38	8,04	45
50	19,10	17,55	16,26	15,17	14,22	13,40	12,02	10,91	10,44	10,00	50
55	24,01	21,91	20,19	18,76	17,54	16,48	14,74	13,35	12,75	12,21	55
60	30,00	27,08	24,79	22,92	21,35	20,00	17,80	16,08	15,34	14,67	60
65	37,58	33,36	30,23	27,75	25,72	24,01	21,26	19,13	18,23	17,42	65
70	48,07	41,27	36,78	33,43	30,77	28,59	25,15	22,53	21,44	20,46	70
75	75,00	52,16	45,00	40,25	36,69	33,86	29,53	26,33	25,00	23,82	75

Abscisse	Halbmesser										Abscisse
	140	150	160	170	175	180	190	200	210	220	
10	0,36	0,33	0,31	0,29	0,29	0,28	0,26	0,25	0,24	0,23	10
20	1,44	1,34	1,25	1,18	1,15	1,11	1,06	1,00	0,95	0,91	20
30	3,25	3,03	2,84	2,67	2,59	2,52	2,38	2,26	2,15	2,06	30
40	5,84	5,43	5,08	4,77	4,63	4,50	4,26	4,04	3,84	3,67	40
50	9,23	8,58	8,01	7,52	7,29	7,08	6,70	6,35	6,04	5,76	50
60	13,51	12,52	11,68	10,94	10,61	10,29	9,72	9,21	8,75	8,34	60
70	18,76	17,34	16,13	15,08	14,61	14,17	13,36	12,65	12,01	11,43	70
80	25,11	23,11	21,44	20,00	19,36	18,75	17,66	16,70	15,84	15,06	80
90	32,76	30,00	27,71	25,78	24,92	24,12	22,67	21,39	20,26	19,25	90
100	42,02	38,20	35,10	32,52	31,39	30,33	28,45	26,79	25,34	24,04	100
110	53,40	48,02	43,81	40,39	38,89	37,52	35,08	32,97	31,11	29,47	110
120	67,89	60,00	54,16	49,58	47,62	45,84	42,69	40,00	37,66	35,61	120
130	88,04	75,17	66,73	60,46	57,85	55,50	51,44	48,01	45,08	42,52	130
140	140,00	96,15	82,54	73,56	70,00	66,86	61,55	57,17	53,48	50,29	140
150		150,00	104,32	90,00	84,86	80,50	73,38	67,71	63,03	59,07	150

(vgl. S. 671.)

Rechtwinklige Coordinaten für Kreisbögen.

Abscisse	Halbmesser										Abscisse
	230	240	250	260	270	280	290	300	310	320	
10	0,22	0,21	0,20	0,19	0,19	0,18	0,17	0,17	0,16	0,16	10
20	0,87	0,83	0,80	0,77	0,74	0,72	0,69	0,67	0,65	0,63	20
30	1,96	1,88	1,81	1,74	1,67	1,61	1,56	1,50	1,46	1,41	30
40	3,50	3,36	3,22	3,10	2,98	2,87	2,77	2,68	2,59	2,51	40
50	5,50	5,27	5,05	4,85	4,67	4,50	4,34	4,20	4,06	3,93	50
60	7,96	7,62	7,31	7,02	6,75	6,50	6,27	6,06	5,86	5,68	60
70	10,91	10,44	10,00	9,60	9,23	8,89	8,58	8,28	8,01	7,75	70
80	14,36	13,73	13,15	12,61	12.12	11,67	11,25	10,86	10,50	10,16	80
90	18,34	17,51	16,76	16,07	15,44	14,86	14,32	13,82	13,35	12,92	90
100	22,88	21,83	20,87	20,00	19,20	18,47	17,79	17,16	16,57	16,03	100
110	28,01	26,69	25,50	24,42	23,42	22,51	21,67	20,89	20,17	19,50	110
120	33,79	32,15	30,68	29,35	28,13	27,02	25,99	25,05	24,17	23,35	120
130	40,26	38,26	36,46	34,83	33,36	32,01	30,77	29,63	28,58	27,60	130
140	47,52	45,06	42,88	40,91	39,13	37,51	36,03	34,67	33,41	32,25	140
150	55,64	52,65	50 00	47,63	45,50	43,57	41,81	40,19	38,71	37,33	150
160	64,77	61,11	57,91	55,06	52,51	50,22	48,13	46,23	44,48	42,87	160
170	75,08	70,59	66,70	63,28	60,24	57,51	55,05	52,82	50,77	48,89	170
180	86,82	81,25	76,51	72,38	68,75	65,52	62,62	60,00	57,61	55,42	180
190	100,39	93,37	87,52	82,52	78,17	74,33	70,91	67,84	65,05	62,51	190
200	116,42	107,34	100,00	93,87	88,62	84,04	80,00	76,39	73,15	70,20	200

Abscisse	Halbmesser										Abscisse
	430	440	450	460	470	480	500	550	600	650	
10	0,12	0,11	0,11	0,11	0,11	0,10	0,10	0,09	0,08	0,08	10
20	0,47	0,45	0,44	0,43	0,43	0,42	0,40	0,36	0,33	0,31	20
30	1,05	1,02	1,00	0,98	0,96	0,94	0,90	0,82	0,75	0,69	30
40	1,86	1,82	1,78	1,74	1,71	1,67	1,60	1,46	1,33	1,23	40
50	2,92	2,85	2,79	2,73	2,67	2,61	2,51	2,28	2,09	1,93	50
60	4,21	4,11	4,02	3,93	3,85	3,76	3,61	3,28	3,01	2,78	60
70	5,74	5,60	5,48	5,36	5,24	5,13	4,92	4,47	4,10	3,78	70
80	7,51	7,33	7,17	7,01	6,86	6,71	6,44	5,85	5,36	4,94	80
90	9,52	9,30	9,09	8,89	8,70	8,51	8,17	7,41	6,79	6,26	90
100	11,79	11,51	11,25	11,00	10,76	10,53	10,10	9,17	8,39	7,74	100
110	14,31	13,97	13,65	13,35	13,05	12,77	12,25	11,11	10,17	9,38	110
120	17,08	16,68	16,30	15,93	15,58	15,24	14,61	13,25	12,12	11,17	120
130	20,12	19,64	19,19	18,75	18,34	17,94	17,20	15,58	14,25	13,13	130
140	23,43	22,87	22,33	21,82	21,34	20,87	20,00	18,12	16,56	15,26	140
150	27,01	26,36	25,74	25,14	24,58	24,04	23,03	20,85	19,05	17,54	150
160	30,88	30,12	29,41	28,72	28,07	27,45	26,29	23,79	21,73	20.00	160
170	35,03	34,17	33,35	32,57	31,82	31,11	29,79	26,93	24,59	22,62	170
180	39,49	38,50	37,57	36,68	35,83	35,03	33,52	30,29	27,64	25,42	180
190	44,25	43,14	42,08	41,07	40,12	39,21	37,51	33,86	30,88	28,39	190
200	49,34	48,08	46,89	45,75	44,68	43,65	41,74	37,65	34,31	31,53	200
210	54,77	53,35	52,01	50,73	49,52	48,38	46,24	41,67	37,95	34,86	210
220	60,54	58,95	57,44	56,02	54,67	53,39	51,00	45,92	41,79	38,36	220
230	66,68	64,90	63,22	61,63	60,12	58,69	56,04	50,40	45,83	42,05	230
240	73,21	71,22	69,34	67,57	65,90	64,31	61,37	55,13	50,09	45,93	240
250	80,14	77,92	75,83	73,87	72,01	70,24	66,99	60,10	54,56	50,00	250

(vgl. S. 671.)

Rechtwinklige Coordinaten für Kreisbögen.

Abscisse	Halbmesser										Abscisse
	330	340	350	360	370	380	390	400	410	420	
10	0,15	0,15	0,14	0,14	0,14	0,13	0,13	0,13	0,12	0,12	10
20	0,61	0,59	0,57	0,56	0,54	0,53	0,51	0,50	0,49	0,48	20
30	1,37	1,33	1,29	1,25	1,22	1,19	1,16	1,13	1,10	1,07	30
40	2,43	2,36	2,29	2,23	2,17	2,11	2,06	2,01	1,96	1,91	40
50	3,81	3,70	3,59	3,49	3,39	3,30	3,22	3,14	3,06	2,99	50
60	5,50	5,34	5,18	5,04	4,90	4,77	4,64	4,53	4,41	4,31	60
70	7,51	7,28	7,07	6,87	6,68	6,50	6,33	6,17	6,02	5,87	70
80	9,84	9,55	9,27	9,00	8,75	8,52	8,29	8,08	7,88	7,69	80
90	12,51	12,13	11,77	11,43	11,11	10,81	10,53	10,26	10,00	9,76	90
100	15,52	15,04	14,59	14,17	13,77	13,39	13,04	12,70	12,38	12,08	100
110	18,87	18,29	17,74	17,22	16,73	16,27	15,83	15,42	15,03	14,66	110
120	22,59	21,88	21,21	20,59	20,00	19,44	18,92	18,42	17,95	17,51	120
130	26,68	25,83	25,04	24,29	23,59	22,93	22,30	21,71	21,16	20,63	130
140	31,17	30,16	29,22	28,34	27,51	26,73	25,99	25,30	24,64	24,02	140
150	36,06	34,88	33,77	32,74	31,77	30,86	30,00	29,19	28,42	27,70	150
160	41,38	40,00	38,71	37,51	36,38	35,33	34,33	33,39	32,51	31,67	160
170	47,16	45,55	44,06	42,67	41,37	40,15	39,00	37,92	36,90	35,94	170
180	53,41	51,56	49,83	48,23	46,74	45,34	44,02	42,79	41,63	40,53	180
190	60,19	58,04	56,06	54,22	52,51	50.91	49,41	48,01	46,68	45,43	190
200	67,51	65,05	62,77	60,67	58,71	56,89	55,19	53,59	52,09	50,68	200

Abscisse	Halbmesser										Abscisse
	700	750	800	900	1000	1500	2000	2500	3000	5000	
10	0,07	0,07	0,06	0,06	0,05	0,03	0,03	0,02	0,02	0,01	10
20	0,29	0,27	0,25	0,22	0,20	0,13	0,10	0,08	0,07	0,04	20
30	0,64	0,60	0,56	0,50	0,45	0,30	0,23	0,18	0,15	0,09	30
40	1,14	1,07	1,00	0,89	0,80	0,53	0,40	0,32	0,27	0,16	40
50	1,79	1,67	1,56	1,39	1,25	0,83	0,63	0,50	0,42	0,25	50
60	2,58	2,40	2,25	2,00	1,80	1,20	0,90	0,72	0,60	0,36	60
70	3,51	3,27	3,07	2,73	2,45	1,63	1,23	0,98	0,82	0,49	70
80	4,59	4,28	4,01	3,56	3,21	2,13	1,60	1,28	1,07	0,64	80
90	5,81	5,42	5,08	4,51	4,06	2,70	2,03	1,62	1,35	0,81	90
100	7,18	6,70	6,27	5,57	5,01	3,34	2,50	2,00	1,67	1,00	100
110	8,70	8,11	7,60	6,75	6,07	4,04	3,03	2,42	2,02	1,21	110
120	10,36	9,66	9,05	8,04	7,23	4,81	3,60	2,88	2,40	1,44	120
130	12,18	11,35	10,63	9,44	8,49	5,64	4,23	3,38	2,82	1,69	130
140	14,14	13,18	12,35	10,96	9,85	6,55	4,91	3,92	3,27	1,96	140
150	16,26	15,15	14,19	12,59	11,31	7,52	5,63	4,50	3,75	2,25	150
160	18,53	17,27	16,16	14,34	12,88	8,56	6,41	5,13	4,27	2,56	160
170	20,96	19,52	18,27	16,20	14,56	9,66	7,24	5,79	4,82	2,89	170
180	23,54	21,92	20,51	18,18	16,33	10,84	8,12	6,49	5,40	3,24	180
190	26,28	24,47	22,89	20,28	18,22	12,08	9,05	7,23	6,02	3,61	190
200	29,18	27,16	25,40	22,50	20,20	13,39	10,03	8,01	6,67	4,00	200
210	32,24	30,00	28,05	24,84	22,30	14,77	11,06	8,84	7,36	4,41	210
220	35,47	32,99	30,84	27,30	24,50	16,22	12,14	9,70	8,08	4,84	220
230	38,86	36,14	33,78	29,89	26,81	17,74	13,27	10,60	8,83	5,29	230
240	42,43	39,44	36,85	32,59	29,23	19,32	14,45	11,55	9,62	5,76	240
250	46,17	42,89	40,07	35,42	31,75	20,98	15,69	12,53	10,43	6,25	250

(vgl. S. 671.)

Peripheriewinkel α für die Sehnenlänge $s = 20$

$$\sin \alpha = \frac{s}{2r}$$

Bogen	Halbmesser 100	120	140	150	160	180	200	220	Bogen
10	122° 36′	132° 12′	139° 2′	141° 46′	144° 10′	148° 9′	151° 20′	153° 57′	10
9	128 21	136 59	143 8	145 36	147 45	151 20	154 12	156 33	9
8	134 5	141 46	147 14	149 25	151 20	154 31	157 4	159 9	8
7	139 50	146 32	151 20	153 15	154 55	157 42	159 56	161 46	7
6	145 34	151 19	155 25	157 4	158 30	160 53	162 48	164 22	6
5	151 18	156 6	159 31	160 53	162 5	164 5	165 40	166 58	5
4	157 3	160 53	163 37	164 43	165 40	167 16	168 32	169 35	4
3	162 47	165 40	167 43	168 32	169 15	170 27	171 24	172 11	3
2	168 31	170 26	171 48	172 21	172 50	173 38	174 16	174 47	2
1	174 16	175 13	175 54	176 11	176 25	176 49	177 8	177 24	1
0									0
1	5 44	4 47	4 6	3 49	3 35	3 11	2 52	2 36	1
2	11 29	9 34	8 12	7 39	7 10	6 22	5 44	5 13	2
3	17 13	14 20	12 17	11 28	10 45	9 33	8 36	7 49	3
4	22 57	19 7	16 23	15 17	14 20	12 44	11 28	10 25	4
5	28 42	23 54	20 29	19 7	17 55	15 55	14 20	13 2	5
6	34 26	28 41	24 35	22 56	21 30	19 7	17 12	15 38	6
7	40 10	33 28	28 40	26 45	25 5	22 18	20 4	18 14	7
8	45 55	38 14	32 46	30 35	28 40	25 29	22 56	20 51	8
9	51 39	43 1	36 52	34 24	32 15	28 40	25 48	23 27	9
10	57 24	47 48	40 58	38 14	35 50	31 51	28 40	26 3	10

Bogen	Halbmesser 240	250	260	280	300	320	340	350	Bogen
12	151° 21′	152° 29′	153° 33′	155° 26′	157° 5′	158° 31′	159° 47′	160° 21′	12
11	153 44	154 47	155 45	157 29	158 59	160 18	161 28	161 59	11
10	156 7	157 5	157 57	159 32	160 54	162 6	163 9	163 38	10
9	158 30	159 22	160 10	161 35	162 48	163 53	164 50	165 16	9
8	160 54	161 40	162 22	163 38	164 43	165 40	166 31	166 54	8
7	163 17	163 57	164 34	165 40	166 38	167 28	168 12	168 32	7
6	165 40	166 15	166 46	167 43	168 32	169 15	169 53	170 11	6
5	168 4	168 32	168 59	169 46	170 27	171 3	171 34	171 49	5
4	170 27	175 50	171 11	171 49	172 22	172 50	173 16	173 27	4
3	172 50	173 7	173 23	173 52	174 16	174 38	174 57	175 5	3
2	175 13	175 25	175 35	175 54	176 11	176 25	176 38	176 44	2
1	177 37	177 42	177 48	177 57	178 5	178 13	178 19	178 22	1
0									0
1	2 23	2 18	2 12	2 3	1 55	1 47	1 41	1 38	1
2	4 47	4 35	4 25	4 6	3 49	3 35	3 22	3 16	2
3	7 10	6 53	6 37	6 8	5 44	5 22	5 3	4 55	3
4	9 33	9 10	8 49	8 11	7 38	7 10	6 44	6 33	4
5	11 56	11 28	11 1	10 14	9 33	8 57	8 26	8 11	5
6	14 20	13 45	13 14	12 17	11 28	10 45	10 7	9 49	6
7	16 43	16 3	15 26	14 20	13 22	12 32	11 48	11 28	7
8	19 6	18 20	17 38	16 22	15 17	14 20	13 29	13 6	8
9	21 30	20 38	19 50	18 25	17 12	16 7	15 10	14 44	9
10	23 53	22 55	22 3	20 28	19 6	17 54	16 51	16 22	10
11	26 16	25 13	24 15	22 31	21 1	19 42	18 32	18 1	11
12	28 39	27 31	26 27	24 34	22 55	21 29	20 13	19 39	12

(vgl. S. 673.)

Peripheriewinkel α für die Sehnenlänge $s = 20$.

$$\sin \alpha = \frac{s}{2r}$$

Bogen	Halbmesser																Bogen
	360		380		400		450		500		550		600		650		
20	148°	10′	149°	50′	151°	21′	154°	32′	157°	5′	159°	10′	160°	54′	162°	22′	20
19	149	45	151	21	152	47	155	48	158	14	160	12	161	51	163	15	19
18	151	21	152	51	154	13	157	5	159	22	161	15	162	49	164	8	18
17	152	56	154	22	155	39	158	21	160	31	162	17	163	46	165	1	17
16	154	32	155	52	157	5	159	38	161	40	163	20	164	32	165	54	16
15	156	7	157	23	158	31	160	54	162	49	164	22	165	41	166	47	15
14	157	43	158	53	159	57	162	10	163	57	165	25	166	38	167	40	14
13	159	18	160	24	161	23	163	27	165	6	166	27	167	35	168	32	13
12	160	54	161	54	162	49	164	43	166	15	167	30	168	32	169	25	12
11	162	29	163	25	164	15	166	0	167	24	168	32	169	30	170	18	11
10	164	5	164	55	165	40	167	16	168	32	169	35	170	27	171	11	10
9	165	40	166	26	167	6	168	32	169	41	170	37	171	24	172	4	9
8	167	16	167	56	168	32	169	49	170	50	171	40	172	22	172	57	8
7	168	51	169	27	169	58	171	5	171	59	172	42	173	19	173	50	7
6	170	27	170	57	171	24	172	22	173	7	173	45	174	16	174	43	6
5	172	2	172	28	172	50	173	38	174	16	174	47	175	14	175	36	5
4	173	38	173	58	174	16	174	54	175	25	175	50	176	11	176	28	4
3	175	13	175	29	175	42	176	11	176	34	176	52	177	8	177	21	3
2	176	49	176	59	177	8	177	27	177	42	177	55	178	5	178	14	2
1	178	24	178	30	178	34	178	44	178	51	178	57	179	3	179	7	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	36	1	30	1	26	1	16	1	9	1	3	0	57	0	53	1
2	3	11	3	1	2	52	2	33	2	18	2	5	1	55	1	46	2
3	4	47	4	31	4	18	3	49	3	26	3	8	2	52	2	39	3
4	6	22	6	2	5	44	5	6	4	35	4	10	3	49	3	32	4
5	7	58	7	32	7	10	6	22	5	44	5	13	4	46	4	24	5
6	9	33	9	3	8	36	7	38	6	53	6	15	5	44	5	17	6
7	11	9	10	33	10	2	8	55	8	1	7	18	6	41	6	10	7
8	12	44	12	4	11	28	10	11	9	10	8	20	7	38	7	3	8
9	14	20	13	34	12	54	11	28	10	19	9	23	8	36	7	56	9
10	15	55	15	5	14	20	12	44	11	28	10	25	9	33	8	49	10
11	17	31	16	35	15	45	14	0	12	36	11	28	10	30	9	42	11
12	19	6	18	6	17	11	15	17	13	45	12	30	11	28	10	35	12
13	20	42	19	36	18	37	16	33	14	54	13	33	12	25	11	28	13
14	22	17	21	7	20	3	17	50	16	3	14	35	13	22	12	20	14
15	23	53	22	37	21	29	19	6	17	11	15	38	14	19	13	13	15
16	25	28	24	8	22	55	20	22	18	20	16	40	15	17	14	6	16
17	27	4	25	38	24	21	21	39	19	29	17	43	16	14	14	59	17
18	28	39	27	9	25	47	22	55	20	38	18	45	17	11	15	52	18
19	30	15	28	39	27	13	24	12	21	46	19	48	18	9	16	45	19
20	31	50	30	10	28	39	25	28	22	55	20	50	19	6	17	38	20

(vgl. S. 673.)

Peripheriewinkel α für die Sehnenlänge $s = 20$.

$$\sin \alpha = \frac{s}{2r}$$

Bogen	Halbmesser 700	750	800	900	1000	1500	2000	2500	Bogen
20	163° 38′	164° 43′	165° 41′	167° 16′	168° 32′	172° 22′	174° 16′	175° 25′	20
19	164 27	165 29	166 24	167 54	169 7	172 45	174 33	175 39	19
18	165 16	166 15	167 6	168 32	169 41	173 7	174 51	175 52	18
17	166 5	167 1	167 49	169 11	170 16	173 30	175 8	176 6	17
16	166 54	167 47	168 32	169 49	170 50	173 53	175 25	176 20	16
15	167 43	168 32	169 15	170 27	171 24	174 16	175 42	176 34	15
14	168 32	169 18	169 58	171 5	171 59	174 39	175 59	176 47	14
13	169 22	170 4	170 41	171 43	172 33	175 2	176 17	177 1	13
12	170 11	170 50	171 24	172 22	173 7	175 25	376 34	177 15	12
11	171 0	171 36	172 7	173 0	173 42	175 48	176 51	177 29	11
10	171 49	172 22	172 50	173 38	174 16	176 11	177 8	177 42	10
9	172 38	173 7	173 33	174 16	174 51	176 34	177 25	177 56	9
8	173 27	173 53	174 16	174 54	175 25	176 57	177 42	178 10	8
7	174 16	174 39	174 59	175 33	175 59	177 20	178 0	178 24	7
6	175 5	175 25	175 42	176 11	176 34	177 42	178 17	178 37	6
5	175 54	176 11	176 25	176 49	177 8	178 5	178 34	178 51	5
4	176 44	176 57	177 8	177 27	177 42	178 28	178 51	179 5	4
3	177 33	177 42	177 51	178 5	178 17	178 51	179 8	179 19	3
2	178 22	178 28	178 34	178 44	178 51	179 14	179 26	179 32	2
1	179 11	179 14	179 17	179 22	179 26	179 37	179 43	179 46	1
0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0
1	0 49	0 46	0 43	0 38	0 34	0 23	0 17	0 14	1
2	1 38	1 32	1 26	1 16	1 9	0 46	0 34	0 28	2
3	2 27	2 18	2 9	1 55	1 43	1 9	0 52	0 41	3
4	3 16	3 3	2 52	2 33	2 18	1 32	1 9	0 55	4
5	4 6	3 49	3 35	3 11	2 52	1 55	1 26	1 9	5
6	4 55	4 35	4 18	3 49	3 26	2 18	1 43	1 23	6
7	5 44	5 21	5 1	4 27	4 1	2 40	2 0	1 36	7
8	6 33	6 7	5 44	5 6	4 35	3 3	2 18	1 50	8
9	7 22	6 53	6 27	5 44	5 9	3 26	2 35	2 4	9
10	8 11	7 38	7 10	6 22	5 44	3 49	2 52	2 18	10
11	9 0	8 24	7 53	7 0	6 18	4 12	3 9	2 31	11
12	9 49	9 10	8 36	7 38	6 53	4 35	3 26	2 45	12
13	10 38	9 56	9 19	8 17	7 27	4 58	3 43	2 59	13
14	11 28	10 42	10 2	8 55	8 1	5 21	4 1	3 13	14
15	12 17	11 28	10 45	9 33	8 36	5 44	4 18	3 26	15
16	13 6	12 13	11 28	10 11	9 10	6 7	4 35	3 40	16
17	13 55	12 59	12 11	10 49	9 44	6 30	4 52	3 54	17
18	14 44	13 45	12 54	11 28	10 19	6 53	5 9	4 8	18
19	15 33	14 31	13 36	12 6	10 53	7 15	5 27	4 21	19
20	16 22	15 17	14 19	12 44	11 28	7 38	5 44	4 35	20

(vgl. S. 673.)

Sehnenlänge *s* für den Peripheriewinkel *α*.

$s = 2\,r\,sin\,\alpha$.

r	$\alpha = 5°$	$\alpha = 2°$	$\alpha = 1°$	$\alpha = 30'$	$\alpha = 20'$	$\alpha = 15'$	$\alpha = 10'$	r
100	17,431	6,980						100
120	20,917	8,376						120
140	24,404	9,772						140
150	26,147	10,470						150
160	27,890	11,168						160
180	31,376	12,564						180
200	34,862	13,960						200
220	38,349	15,356						220
240	41,835	16,752						240
250	43,578	17,450						250
260	45,321	18,148	9,075					260
280	48,807	19,544	9,773					280
300	52,293	20,940	10,471					300
320	55,780	22,336	11,170					320
340	59,266	23,732	11,868					340
350		24,430	12,217					350
360		25,128	12,566					360
380		26,524	13,264					380
400		27,920	13,962					400
420		29,316	14,660					420
440		30,712	15,358	7,679				440
450		31,410	15,707	7,854				450
460		32,108	16,056	8,028				460
480		33,504	16,754	8,377				480
500		34,900	17,452	8,727				500
520		36,295	18,150	9,076				520
540		37,691	18,849	9,425				540
550		38,389	19,198	9,599				550
560		39,087	19,547	9,774				560
580		40,483	20,245	10,123				580
600			20,943	10,472	6,981			600
650			22,688	11,344	7,563			650
700			24,433	12,217	8,145			700
750			26,179	13,090	8,727			750
800			27,924	13,962	9,308			800
850			29,669	14,835	9,890	7,418		850
900			31,414	15,708	10,472	7,854		900
950			33,160	16,580	11,054	8,290		950
1000			34,905	17,453	11,635	8,727		1000
1200			41,886	20,944	13,963	10,472		1200
1400				24,434	16,290	12,217	8,145	1400
1500				26,180	17,453	13,090	8,727	1500
1600				27,925	18,617	13,963	9,308	1600
1800				31,416	20,944	15,708	10,472	1800
2000				34,906	23,271	17,453	11,636	2000
2500				43,633	29,089	21,817	14,544	2500
3000				52,359	34,906	26,180	17,453	3000
3500				61,086	40,724	30,543	20,362	3500
4000				69,812	46,542	34,906	23,271	4000
5000				87,265	58,177	43,633	29,089	5000

(vgl. S. 674.)

Übergangskurven.

Ordinate $y = \frac{x^3}{6\,q}$

Abscisse x	$q =$ 4000	12000	18000	25000	40000
m	m	m	m	m	m
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
5	0,005	0,002	0,001	0,001	0,001
10	0,042	0,014	0,009	0,007	0,004
15	0,141	0,047	0,031	0,023	0,014
20	0,333	0,111	0,074	0,053	0,033
25	0,651	0,217	0,145	0,104	0,065
30	1,125	0,375	0,250	0,180	0,112
35		0,595	0,397	0,286	0,179
40		0,889	0,593	0,427	0,267
45		1,266	0,844	0,607	0,380
50		1,736	1,157	0,833	0,521
55		2,311	1,541	1,109	0,693
60		3,000	2,000	1,440	0,900
65				1,831	1,144
70				2,287	1,429

Krümmungshalbmesser $R = \frac{q}{x}$

Abscisse x	$q =$ 4000	12000	18000	25000	40000
m	m	m	m	m	m
0	∞	∞	∞	∞	∞
5	800	2400	3600	5000	8000
10	400	1200	1800	2500	4000
15	267	800	1200	1667	2667
20	200	600	900	1250	2000
25	160	480	720	1000	1600
30	133	400	600	833	1333
35		343	514	714	1143
40		300	450	625	1000
45		267	400	556	889
50		240	360	500	800
55		218	327	455	727
60		200	300	417	667
65				385	615
70				357	571

Länge der Übergangskurve oder Abscisse ihres Endpunktes

$l = 2\,a = \frac{q}{r}$

Kreishalbm. r	$q =$ 4000	12000	18000	25000	40000
m	m	m	m	m	m
150	26,67	80,00			
200	20,00	60,00			
250	16,00	48,00			
300	13,33	40,00	60,00		
320	12,50	37,50	56,25		
340	11,76	35,29	52,94		
360	11,11	33,33	40,00		
380	10,53	31,58	47,38		
400	10,00	30,00	45,00	62,50	100,00
420		28,57	42,86	59,52	95,24
440		27,27	40,91	56,32	90,91
460		26,09	39,13	54,35	86,96
480		25,00	37,50	52,08	83,33
500		24,00	36,00	50,00	80,00
550		21,82	32,73	45,45	72,73
600		20,00	30,00	41,67	66,67
650		18,46	27,69	38,46	61,54
700		17,14	25,71	35,71	57,14
750		16,00	24,00	33,33	53,33
800		15,00	22,50	31,25	50,00
850		14,12	21,18	29,41	47,06
900		13,33	20,00	27,78	44,44
1000		12,00	18,00	25,00	40,00

Verschiebung der Tangente oder Verkürzung des Kreishalbmessers

$v = \frac{q^2}{24\,r^3}$

Kreishalbm. r	$q =$ 4000	12000	18000	25000	40000
m	m	m	m	m	m
150	0,198	1,778			
200	0,083	0,750			
250	0,043	0,384			
300	0,025	0,222	0,500		
320	0,020	0,183	0,412		
340	0,017	0,153	0,343		
360	0,014	0,129	0,289		
380	0,012	0,109	0,246		
400	0,010	0,094	0,211	0,407	1,042
420		0,081	0,182	0,351	0,900
440		0,070	0,158	0,306	0,783
460		0,062	0,139	0,268	0,685
480		0,054	0,122	0,235	0,603
500		0,048	0,108	0,208	0,533
550		0,036	0,081	0,157	0,401
600		0,028	0,063	0,121	0,309
650		0,022	0,049	0,095	0,243
700		0,017	0,039	0,076	0,194
750		0,014	0,032	0,062	0,158
800		0,012	0,026	0,051	0,130
850		0,010	0,022	0,042	0,109
900		0,008	0,019	0,036	0,091
1000		0,006	0,014	0,026	0,067

(vgl. S. 692—694.)

Mass-Vergleichung.

Metermass und Pariser Mass.

				log
1 Meter	=	443,296	Par. Linien	2.646 6938·125
1 Meter	=	0,513 074 074	Toisen	9.710 1800·700
1 Meter	=	3,078 444 4	Pariser Fuss	0.488 3313
1 Millimeter	=	0,036 941 3	Pariser Zoll	8.567 5126
1 Millimeter	=	0,443 296	Par. Linien	9.646 6938
1 Toise = 6 Par. Fuss = 864 Par. Linien	=	1,949 036 310 7	Meter	0.289 8199·300
1 Par. Fuss = 12 Par. Zoll = 144 P. Lin.	=	0,324 839 4	Meter	9.511 6687
1 Pariser Zoll = 12 Pariser Linien	=	0,027 069 9	Meter	8.432 4874
1 Pariser Linie	=	2,255 829 063	Millimeter	0.353 3061·875

Deutsches Reich.

Die ursprünglich nur für den Norddeutschen Bund bestimmte Mass- und Gewichtsordnung vom 17. August 1868 (Bundesgesetzblatt von 1868 Nr. 28, S. 473) wurde durch Artikel 80, I., 11 der Verfassung des Deutschen Reichs vom November 1870 zur Mass- und Gewichtsordnung des Deutschen Reiches erhoben.

Die Grundlage des Masses und Gewichtes ist das Meter mit decimaler Teilung und Vervielfachung.

Als Urmass gilt bis auf Weiteres derjenige Platinstab, welcher im Besitze der Königlich Preussischen Regierung sich befindet, im Jahre 1863 durch eine von dieser und der Kaiserlich Französischen Regierung bestellte Kommission mit dem in dem Kaiserlichen Archive zu Paris aufbewahrten *Mètre des Archives* verglichen und bei der Temperatur des schmelzenden Eises gleich 1,000 003 01 Meter befunden worden ist.

Ältere deutsche Maasse.

Preussen.

				log
1 Preussischer (Rheinländischer Fuss)	=	139,13	Par. Linien	2.143 4207·851
1 Preussischer (Rheinländischer Fuss)	=	0,313 853 497	Meter	9.496 7269·726
1 Preussischer Zoll ($^1/_{12}$ Fuss) . .	=	0,026 154 5	Meter	8.417 5457
1 Preussische Linie ($^1/_{12}$ Zoll) . .	=	2,179 538 2	Millimeter	0.338 3645
1 Preussische Ruthe (12 Fuss) . .	=	3,766 242 0	Meter	0.575 9082
1 Preussischer Decimalfuss	=	0,376 624 2	Meter	9.575 9082
1 Preussische Q.-Ruthe	=	14,184 578 6	Q.-Meter	1.151 8164
1 Preussischer Morgen (180 Q.-Ruthen)	=	0,255 322 4	Hektar	9.407 0890
1 Meter	=	3,186 199 957	Preuss. Fuss	0.503 2730·274
1 Meter	=	38,234 399 5	Preuss. Zoll	1.582 4543
1 Millimeter	=	0,458 812 8	Pr. Linien	9.661 6355
1 Meter	=	0,265 516 7	Pr. Ruthen	9.424 0918
1 Q.-Meter	=	0,070 499 1	Pr. Q.-Ruth.	8.848 1836
1 Hektar	=	3,916 616 5	Pr. Morgen	0.592 9110
1 Hektar	=	3 Morgen 164,99	Ruthen	

Bayern.

				log
1 Bayrischer Fuss	=	129,38	Par. Linien	2.111 8671·468
1 Bayr. Fuss (= $^1/_{10}$ Ruthe = 10 Zoll = 100 Linien)	=	0,291 859 164 1	Meter	9.465 1733·343
1 Q.-Ruthe	=	8,518 177	Q.-Meter	0.930 3467
1 Tagwerk (= 40 Q.-Ruthen) . .	=	34,072 709	Ar	1.532 4067
1 Decimale (= 4 Q.-Ruthen) . .	=	34,072 709	Q.-Ruthen	1.532 4067

Hannover.

				log
1 Hannov. Fuss (= 12 Zoll = 144 Linien)	=	0,292 094 7	Meter	9.465 5236
1 Hannoversche Ruthe (= 16 Fuss)	=	4,673 514 8	Meter	0.669 6436
1 Hannoversche Q.-Ruthe	=	21,841 74	Q.-Meter	1.339 2872
1 Hannover. Morgen (= 120 Q.-Ruth.)	=	26,210 09	Ar	1.418 4685

Sachsen.

				log
1 Sächsischer Fuss	=	125,537	Par. Linien	2.098 7717
1 Sächsischer Fuss	=	0,283 19	Meter	9.452 0779
1 Elle = 2 Fuss	=	0,566 38	Meter	9.753 1079
1 Feldmesserruthe	=	4,295 0	Meter	0.632 9632
1 Strassenruthe	=	4,531 0	Meter	0.656 19
1 Q.-Ruthe (Feldmesserruthe) . .	=	18,447	Q.-Meter	1.265 93
1 Acker = 300 Q.-Feldmesserruthen	=	55,342	Ar	1.743 05

Württemberg.

				log
1 Württemberg. Fuss (= $^1/_{10}$ Ruthe = 10 Zoll = 100 Linien) .	=	0,286 490 3	Meter	9.457 1099
1 Q.-Ruthe	=	8,207 67	Q.-Meter	0.914 22
1 Morgen (= 384 Q.-Ruthen) . .	=	31,517 45	Ar	1.498 55
1 Achtel (= 48 Q.-Ruthen) . .	=	3,939 68	Ar	0.595 46

Diese Zahlen stützen sich auf die Massordnung vom 30. November 1806, wo 1 Fuss = 127 Pariser Linien sein soll (= 0,286 4903 Meter). Der Württembergischen Landes-Triangulierung liegt aber ein anderer Fuss zu Grunde, nämlich:

				log
1 Württemb. Landesvermessungsfuss	=	126,97	Par. Linien	
	=	0,286 422 616 1	Meter	9.457 0073·071

Der Horizont der Württembergischen Triangulierung ist 844 Pariser Fuss = 274,16^m über dem Meer. Man hat daher zur Verwandlung von Landesvermessungsfussen im Vermessungshorizont in Meter im Meereshorizont den Reduktions-Logarithmus 9.456 9886·5.

Baden.

				log
1 Bad. Fuss (= $^1/_{10}$ Ruthe = 10 Zoll = 100 Linien)	=	0,3	Meter	9.477 1213
1 Q.-Ruthe	=	9	Q.-Meter	0.954 2425
1 Morgen (= 400 Q.-Ruthen) . .	=	36	Ar	1.556 3025

Hessen-Darmstadt.

1 Fuss = 0,25^m. 1 Klafter = 2,5^m. 1 Morgen = 400 Q.-Klafter = 25 Ar.

Kurhessen.

1 Kurhessischer Normalfuss = 0,287 70^m. 1 Kurhessische Katasterruthe = 3,988 756 95^m. 1 Kurhessischer Acker = 150 Q.-Ruthen = 23,87 Ar.

Sachsen-Weimar.

1 Fuss = 0,281 98^m. 1 Ruthe = 16 Fuss = 4,5117^m. 1 Acker = 140 Q.-Ruthen = 28,497 Ar.

Mecklenburg.

1 Mecklenburger Fuss = 129 Pariser Linien = 0,291 001 95^m. 1 Ruthe = 16 Fuss = 4,656 031 2^m. 1 Morgen = 300 Q.-Ruthen = 65,036 Ar.

Oldenburg.

1 Oldenburger Fuss = 0,295 879 0^m. 1 Ruthe = 18 Fuss = 5,3258^m. 1 Jück = 160 Q.-Ruthen = 45,383 Ar.

Nassau.

1 Nassauer Werkfuss = 0,3^m. 1 Feldruthe = 10 Feldfuss = 5^m. 1 Morgen = 100 Q.-Ruthen = 25 Ar.

Braunschweig.

1 Fuss = 126,5 Pariser Linien = 0,285 362 4^m. 1 Ruthe = 16 Fuss = 4,565 798 0^m. 1 Feldmorgen = 120 Q.-Ruthen = 25,02 Ar. 1 Waldmorgen = 160 Q.-Ruthen = 33,35 Ar.

Österreich.

				log
1 Wiener Klafter	=	1,896 484	Meter	0.277 9491·829
1 Fuss (= 1/6 Klafter)	=	0,316 080	Meter	9.499 7979
1 Österr. Postmeile = 4000 Klafter	=	7,585 936	Kilometer	0.880 0092
1 Q.-Fuss	=	0,099 907	Q.-Meter	8.999 5959
1 Q.-Klafter (= 36 Q.-Fuss) . . .	=	3,596 652	Q.-Meter	0.555 8984
1 Joch (= 1600 Q.-Klafter) . . .	=	0,575 464 2	Hektare	9.760 0183
1 Meter	=	0,527 291 6	Wiener Klafter	9.722 0508·171
1 Kilometer	=	0,131 823	Östr. Postmeile	9.119 9908
1 Q.-Meter	=	10,009 310	Q.-Fuss	1.000 4041
1 Q.-Meter	=	0,278 036	Q.-Klafter	9.444 1016
1 Ar	=	27,803 639	Q.-Klafter	1.444 1016
1 Hektar	=	1,737 727	Österr. Joch	0.239 9817

Die vorstehenden Reduktionszahlen sind in § 4. des österr. Mass-Gesetzes vom 16. Juli 1871 als für den Verkehr gültig bestimmt. Das amtliche Vermessungswerk „Die astronomisch-geodätischen Arbeiten des K. K. militär-geographischen Instituts in Wien, I. Band, Wien 1871“ sagt auf S. 188 folgendes:

Zur Verwandlung der Wiener Klafter in Meter diente der von *W. Struve* aus den im Jahre 1850 zu Pulkowa ausgeführten Massvergleichungen hervorgegangenen Logarithmus 0.277 9491·463. Nach diesem Vorgang hat man bei trigonometrischen Arbeiten anzunehmen:

1 Wiener Klafter = 1,896 483 840 Meter	0.277 0491·463

England und Nordamerika.

				log
1 Englische Yard (= 3 engl. Fuss)	*)	= 0,914 391 80	Meter	9.961 1323·228
1 „ „	*)	= 405,346 22	Par. Linien	2.607 8261·274
1 Toise	*)	= 2,131 511 16	Yard	0.328 6876·108
1 Meter	*)	= 1,093 623 11	Yard	0.038 8676·790
1 Englischer Fuss		= 0,304 797 27	Meter	9.484 0110·7
1 Englischer Zoll		= 2,539 977	Centimeter	0.404 8298
1 Kette (*chain*) = 22 Yards . . .		= 20,116 620	Meter	1.303 5550
1 Furlong = 220 Yards		= 201,166 20	Meter	2.303 5550
1 Meile = 8 Furlongs		= 1,609 33	Kilometer	0.206 6450
1 Acre (= 10 Q.-Ketten)		= 40,467 84	Ar	1.607 1100
1 Square Mile = 640 Acres . . .		= 2,589 94	Q.-Kilometer	0.413 2900

Der Englische Fuss ist auch in Russland und Nordamerika im Gebrauch.

*) Diese Reduktionszahlen (nicht die Logarithmen) sind die Resultate der neuesten Untersuchungen, mitgeteilt von *Clarke*, in dem Werk: Comparisons of the standards of length of England, France etc. London 1866 S. 250. (Auszug hieraus s. Vierteljahresschrift der Astr. Gesellschaft. 1868. S. 260.)

Dadurch wird die frühere Reduktionszahl ersetzt, nämlich 1 Meter = 3,280 874 63 engl. Fuss, oder 1 Toise = 6,394 543 78 engl. Fuss, welche auf S. 745 der Ord. trig. survey, principal triangulation, angegeben ist.

Russland.

1 Russischer Fuss = 1 englischer Zoll	= 0,304 797 27	Meter	9.484 0110·7
1 Russische Saschen = 7 Fuss . .	= 2,133 580 89	Meter	0.329 1091·1

Dänemark.

1 Dänischer Fuss = 1 Preussischer Fuss	= 139,13	Par. Linien	2.143 4208
	= 0,313 853 50	Meter	9.496 7270

Schweden.

1 Schwedischer Fuss = 1/6 Faden .	= 0,296 901 04	Meter	9.472 6117

Meilen-Maasse.

1 Geographische Meile (1/15° d. Äq.)	= 7,420 438 54	Kilometer	0.870 4295·7
1 Französische Lieue (1/25° d. Äq.)	= 4,452 26	„	0.648 5808
1 Englische Meile	= 1,609 33	„	0.206 6450
1 Österreichische Meile	= 7,585 94	„	0.880 0092
1 Preussische Meile (= 200 Ruthen)	= 7,532 48	„	0.876 9382
1 Russische Werst (= 3 500 Fuss) .	= 1,066 79	„	0.028 0791
1 Schweizer Stunde	= 4,8	„	0.681 2412
1 Kilometer	= 0,134 763	Geogr. Meilen	9.129 5704
1 Geographische Q.-Meile	= 55,062 908	Q.-Kilometer	1.740 8591·4
1 Q.-Kilometer	= 0,018 161	Geogr. Q.-Meilen	8.259 1408·6
1 Seemeile = 1/4 geographische Meile = 1 Äquator-Minute . . .	= 1,855 110	Kilometer	0.268 3696

Berichtigungen und Nachträge.

Seite 18. Achte Linie von unten statt S. [2], lies: S. [3].
„ 21. Vierzehnte Linie statt S. [1], lies: S. [2].
„ 27. In der Tabelle (10) bei I. statt 2,60, lies: 2,39.
„ 95. Zur *Leibnitz*schen Rechenmaschine, vgl. „Zeitschr. f. Verm. 1887", S. 226 und S. 593.
„ 173. Bei (21) statt $\varphi = 5° 30'$, lies: $\varphi_0 = 5° 30'$.
„ 205. Statt $x_a = + 64524,94$, lies: $x_a = - 64524,94$.
„ 210. Fünfte Linie von unten statt S. [5], lies: S. [6].
„ 239. Rechts unten statt $y = 15521,52$, lies: $y = -15190,78$.
„ 298. Bei (6) ist zuzusetzen: $+ 17$.
„ 320. In Fig. 3. sollen C und C in einer Vertikalen untereinander liegen.
„ 321. Fig. 4. statt Massstab etwa 1:0000, lies: 1:6.
„ 382. Fig. 9. statt Latten, lies: Latte.
„ 461. Nach (1) statt $k = 18464$, lies: $K = 18464$.
„ 544. Am Schluss von § 151. statt starke Fehler, lies: *einzelne* starke Fehler.
„ 550. Zu § 154. Ein sehr ausführliches Litteratur-Verzeichnis zur barometrischen Höhenmessung hat Professor *Kunze* in der „Zeitschr. für Verm. 1879", Ergänzungsheft Seite (1) bis (116) veröffentlicht.
„ 552. 1876. *Hann*, statt 0,00154, lies: 1 + 0,00154.
„ 576. Sechste Linie von unten statt 2ε, lies: ε der distanzmessende Winkel.
„ 579. In der Tabelle (19) statt 1° 34', lies: 0° 34'.
„ [14] und [15] unten, statt $\frac{556}{B}$ und $\frac{617}{B}$, lies: $\frac{B}{556}$ und $\frac{B}{617}$.